АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ДВУХЪ И ТРЕХЪ ИЗМѢРЕНІЙ.

сочиненіе

М. Е. Ващенко-Захарченко,

Сверхштатнаго Ординарнаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владиміра.



КІЕВЪ.

Въ Типографіи Императорскаго Университета Св. Владиміра.

1887.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета Св. Владиміра, 15 Ноября 1886 года.

Ректоръ *Н. Ренненкампфъ*.

Продается въ книжныхъ магазинахъ Н. Я. Оглоблина:

Кіевъ, Крещатикъ, № 33. | С.-Петербургъ, Малая Садовая, № 4.

Предисловіе.

До XVII столѣтія не существовало никакого общаго метода для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ, а въ XVI в., когда были положены первыя основы алгебры, она была приложена и къ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ, но въ каждомъ отдѣльномъ вопросѣ, величины данныя и искомыя обозначались буквами и по условіямъ задачи составлялись уравненія, которыя затѣмъ рѣшались алгебраическими способами, въ результатѣ получалось алгебраическое выраженіе, которое требовалось построить геометрически. Смотря по расположенію данныхъ въ задачѣ, такое построеніе бываетъ возможно или невозможно, поэтому и задача, хотя и рѣшена комбинаціей алгебраическихъ символовъ, но конкретнаго значенія не представляетъ. Стараясь истолковать геометрически всякое алгебраическое выраженіе, дающее рѣшеніе геометрической задачи, геометры нашли геометрическое значеніе отрицательныхъ рѣшеній и предложили нѣсколько способовъ для геометрическаго представленія мнимыхъ — воображаемыхъ количествъ. Геометрическое значеніе отрицательныхъ количествъ и разсматриваніе мнимыхъ результатовъ, какъ рѣшенія, хотя не конкретныхъ представленій, но отвлеченныхъ, дало такую общность изслѣдованіямъ, которой древніе геометры не могли достигнуть и это потому, что всѣ ихъ разсужденія происходили на чертежѣ, символами своихъ количественныхъ мыслей они не выражали, поэтому они не пришли ни къ отрицательнымъ, ни къ мнимымъ рѣшеніямъ, которыя дали возможность включить въ одно выраженіе всѣ случаи расположенія данныхъ въ задачѣ; случаи эти древніе геометры должны были разсматривать и доказывать отдѣльно.

Введеніе мнимыхъ выраженій дало возможность геометрамъ выражать предложенія между геометрическими данными, когда эти данныя такъ расположены, что предложеніе конкретно перестаетъ существовать —глазъ не видитъ, но отвлеченная комбинація символовъ не перестаетъ

выражать свойство исчезнувшее для глаза, являющееся опять въ дальнѣйшихъ комбинаціяхъ конкретно въ видѣ предложенія, которое безъ этого могло-бы остаться неизвѣстнымъ. Безъ мнимыхъ—воображаемыхъ количествъ многія предложенія въ геометріи не было-бы возможности доказать.

Такая частность пріемовъ для рѣшенія геометрическихъ задачъ и доказательствъ предложеній алгебраическимъ путемъ происходила отъ того, что не имѣли способовъ выражать уравненіями основныхъ элементовъ геометріи точки и прямой, точки и плоскости. Что такое точка? Обыкновенно точку опредѣляютъ, говоря, *что это есть геометрическое мѣсто въ пространствѣ, неимѣющее измѣренія.* Затѣмъ, если примемъ, что это опредѣленіе даетъ возможность составить отчетливое понятіе объ этомъ элементѣ, то прямую опредѣляютъ, говоря, *что прямая есть такая линія, которая вполнѣ опредѣляется двумя данными точками;* изъ этого опредѣленія непосредственно слѣдуетъ: что двѣ прямыя пересѣкаются только въ одной точкѣ. Если теперь замѣтимъ, что въ силу постулата Евклида, двѣ прямыя линіи на плоскости всегда пересѣкаются въ одной точкѣ, конечной или безконечно-удаленной, то мы будемъ имѣть слѣдующую взаимность между точкою и прямою: *прямая опредѣляется двумя точками, а точка двумя прямыми.* Изъ этого видимъ, что въ отвлеченномъ опредѣленіи, между точкою и прямою нѣтъ разницы, разница состоитъ въ ихъ конкретномъ представленіи, которое не имѣетъ никакого значенія, такъ какъ всѣ дальнѣйшія изслѣдованія вытекаютъ изъ отвлеченнаго опредѣленія, а не изъ конкретнаго ихъ представленія. Такая же взаимность существуетъ между точкою и плоскостью въ пространствѣ.

Итакъ, какой-бы ни взяли изъ этихъ двухъ элементовъ за основной, другой будетъ имъ опредѣляться тождественнымъ выраженіемъ въ обоихъ случаяхъ, слѣдовательно эти два элемента мы должны принимать какъ данные—извѣстные, ясно представляемые. Изъ сказаннаго также видимъ, что необходимо два элемента въ плоскости или три элемента въ пространствѣ одного рода для опредѣленія одного элемента другаго рода—двѣ точки для прямой и двѣ прямыя для точки, три точки для плоскости и три плоскости для точки, слѣдовательно, если-бы можно было одинъ изъ элементовъ—точку или прямую, или плоскость, выразить уравненіемъ, то другой выразится двумя уравненіями. Изъ такой зависимости между элементами—точкою и прямою на плоскости, точкою и плоскостью въ пространствѣ, вытекъ методъ двойственности, обобщившій геометрическое значеніе алгебраическихъ уравненій.

Первая мысль общаго алгебраическаго способа, для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ и изслѣдованій вообще, принадлежитъ французскому

философу и геометру Декарту, который въ своей „Геометріи", въ 1637 г., далъ первыя основы такого метода изслѣдованій и приложилъ его къ коническимъ сѣченіямъ.

Методъ Декарта, извѣстный въ настоящее время подъ именемъ Аналитической Геометріи, даетъ возможность выразить уравненіемъ между двумя перемѣнными количествами, всякую плоскую кривую, если ея свойство присущее каждой ея точкѣ извѣстно, и, обратно, каждое уравненіе съ двумя перемѣнными количествами, представить геометрической фигурой. Онъ даетъ способъ выразить уравненіемъ между тремя перемѣнными всякую поверхность въ пространствѣ, если извѣстно свойство каждой ея точки, и обратно, каждое уравненіе между тремя перемѣнными представляетъ поверхность. Такимъ образомъ вмѣсто чертежа геометръ имѣетъ передъ глазами рядъ уравненій, въ которыхъ нелвно включены всѣ свойства геометрическихъ фигуръ, подлежащихъ изслѣдованію, всѣ разсужденія обращаются въ комбинацію отвлеченныхъ алгебраическихъ законовъ, синтезъ древнихъ геометровъ потерялъ свою силу, напряженная дѣятельность мышленія и воображенія замѣняется алгебраическими преобразованіями одного выраженія въ другое, непрерывная цѣпь среднихъ разсужденій обращается въ механическія преобразованія, такъ что результатъ изслѣдованій является, какъ бы полученнымъ изъ хаоса и часто въ такой сложной комбинаціи алгебраическихъ символовъ, что не представляется возможности выяснить его геометрическое значеніе. Вотъ почему Ньютонъ, Маклоренъ, Лейбницъ и другіе геометры свои изслѣдованія по новому методу переводили на синтезъ древнихъ геометровъ, такъ какъ считали новый методъ механическимъ. Но такой недостатокъ былъ устраненъ, по мѣрѣ развитія этого замѣчательнаго метода, которому обязаны своимъ развитіемъ механика, физика и астрономія.

Усовершенствованія координатнаго метода Декарта были сдѣланы введеніемъ понятія *двойственности* и введеніемъ метода проэкцій. Двойственность состоитъ въ томъ, что на каждое уравненіе можно смотрѣть съ двухъ точекъ зрѣнія: какъ на выраженіе перемѣщенія точки на плоскости или въ пространствѣ, или какъ на перемѣщеніе прямой на плоскости или плоскости въ пространствѣ. Такой взглядъ на уравненіе даетъ возможность переходить отъ предложеній относительно точекъ къ предложеніямъ относительно прямой или плоскости въ пространствѣ, и обратно. Такое воззрѣніе на аналитическое уравненіе дало необыкновенную общность методу Декарта. Какъ частный случай двойственности представляется методъ взаимныхъ поляръ, такъ изящно разработанный Понселе. Методъ проэкцій, въ которомъ пераходятъ отъ предложеній относительно точекъ къ прадложеніямъ также относительно точекъ, отъ предложеній относительно пря-

мой и плоскости къ предложеніямъ также относительно прямой и плоскости. Этотъ послѣдній методъ достигъ въ настоящее время такого совершенства, что споритъ съ методомъ Декарта и сдѣлался совершенно независимымъ отъ этого послѣдняго.

Въ методѣ Декарта трудно, иногда, бываетъ усмотрѣть геометрическое значеніе извѣстнаго результата, выраженнаго комбинаціей алгебраическихъ символовъ, а тѣмъ болѣе построить такое выраженіе. Это заставило геометровъ нашего столѣтія обратить вниманіе на чисто геометрическіе пріемы, слѣдствіемъ чего было появленіе сочиненій подъ различными названіями, каковы: „Высшая Геометрія" (Géométrie supérieure, Höhere Geometrie), „Новая Геометрія" (Modern Geometry, Neuere Geometrie), „Геометрія положенія" (Géométrie de position, Geometrie der Lage), и тому подобныя названія. Въ настоящее время наука эта извѣстна подъ названіемъ „Проэктивной Геометріи" въ силу того, что она основана на методѣ проэкцій. Изъ нея алгебраическіе пріемы совершенно устранены. До того просты методы проэктивной геометріи, что Штаудтъ написалъ свое замѣчательное сочиненіе „Geometrie der Lage", предполагая даже незнакомство читателя съ элементарной геометріей. Самыя трудныя задачи и свойства фигуръ на плоскости и въ пространствѣ не ускользаютъ отъ этого метода, который имѣетъ громадное техническое приложеніе: въ перспективѣ, архитектурѣ, механикѣ и вообще во всѣхъ техническихъ отрасляхъ знанія. Предложенія служащія основаніемъ метода проэкцій „ангармонія и гармонія" мы уже встрѣчаемъ въ сочиненіяхъ Аполлонія Пергскаго, Паппа, Дезарга, а полное развитіе—проэктивнаго метода, хотя не чисто геометрическое, дали Шаль, Понселе, Штейнеръ, Мёбіусъ и другіе, но ту чисто геометрическую форму, о которой мы упоминали, этому методу далъ Штаудтъ. Изученіе этого метода рядомъ съ методомъ Декарта даетъ ясное пониманіе весьма сложныхъ алгебраическихъ выраженій. Мы выше сказали, что Штаудтъ написалъ свою „Geometrie der Lage" не предполагал даже знакомства читателя съ „Началами" Евклида, поэтому элементарный курсъ проэктивной геометріи въ начальныхъ техническихъ школахъ принесъ бы несомнѣнную пользу будущимъ практическимъ техникамъ.

Затѣмъ введенъ былъ въ Аналитическую Геометрію способъ сокращеннаго обозначенія уравненій прямой и точки въ нормальныхъ формахъ, который собственно есть ничто иное, какъ неявный переходъ отъ одной системы координатъ къ другой. Съ помощью его часто избѣгаютъ весьма сложныхъ вычисленій и преобразованій.

Наконецъ введеніе трилинейной и тетраэдрической системъ координатъ дало такую общность координатному методу Декарта, что этотъ послѣдній сдѣлался частнымъ случаемъ трилинейнаго и тетраэдрическаго.

Скажу теперь нѣсколько словъ о цѣли и содержаніи настоящаго сочиненія. Основаніемъ его послужили лекціи, читанныя мною въ Императорскомъ университетѣ св. Владиміра, которыя были разработаны по болѣе извѣстнымъ сочиненіямъ по Аналитической Геометріи, существующимъ въ западно-европейской математической литературѣ. Если сравнить курсы Аналитической Геометріи, написанные въ началѣ настоящаго столѣтія, какъ напр. курсъ Бурдона, съ курсами написанными въ послѣдніе годы, то легко видѣть ту громадную разницу, которая существуетъ между ними. Читая курсъ Аналитической Геометріи въ продолженіи болѣе двадцати лѣтъ и слѣдя постоянно за развитіемъ этой части математики я пополнялъ и свои лекціи тѣми методами, которые явились въ этотъ промежутокъ времени. Такимъ образомъ было написано настоящее сочиненіе, содержаніе котораго вкратцѣ привожу.

Прежде всего я предпосылаю историческій очеркъ развитія Аналит. Геом., начиная отъ Віета, т. е. съ XVI вѣка, до настоящаго времени, въ которомъ упоминаются всѣ почти сочиненія вышедшія въ этотъ трехсотлѣтній промежутокъ времени, при чемъ указывается на содержаніе сочиненій и что принадлежитъ каждому изъ авторовъ въ исторіи развитія этой отрасли математическихъ наукъ *). За историческимъ очеркомъ слѣдуетъ изложеніе содержанія самого предмема.

Все сочиненіе состоитъ изъ двухъ частей: въ первой части излагается Аналитическая Геометрія на плоскости, а во второй—въ пространствѣ. Вторая часть изложена кратче, такъ какъ въ сущности это есть повтореніе первой, только съ добавленіемъ третьей координаты; болѣе подробно изложены тѣ части ея, которыя существенно отличаются отъ Анал. Геом. на плоскости. Передаемъ вкратцѣ содержаніе отдѣльныхъ главъ.

Первая часть. Въ гл. I изложенъ методъ координатъ Декарта съ пояснительными, необходимыми впослѣдствіи примѣрами, и на одномъ изъ нихъ дано понятіе о геометрическомъ мѣстѣ. Также дано представленіе о полярныхъ координатахъ, а въ концѣ помѣщены пояснительные примѣры. Въ гл. II излагается обстоятельно представленіе уравненіями геометрическихъ мѣстъ и показывается, какъ представляются уравненіями прямая линія и всѣ коническія сѣченія: эллипсъ, гипербола, парабола и кругъ, какъ частный случай эллипса. Далѣе показаны уравненія нѣсколькихъ кривыхъ тратьей и четвертой степеней, каковы конхоида, циссоида и др., и наконецъ нѣсколько трансцендентныхъ кривыхъ. Въ гл. III изложено преобразованіе координатъ. Въ гл. IV показаны всѣ виды уравненія прямой и даны примѣры для поясненій. Въ гл. V и VI изложена двой-

*) Очеркъ этотъ былъ уже нами напечатанъ въ 1884 году, отдѣльною брошюрой; въ настоящее время мы его немного дополнили.

ственность координатъ; всѣ виды уравненія точки и примѣры. Въ гл. VII показанъ сокращенный способъ и его приложеніе къ прямой и точкѣ. Въ гл. VIII даны задачи на прямую линію и точку—геометрическія мѣста. Въ гл. IX и X изложены ангармоническія свойства рядовъ точекъ и связокъ прямыхъ линій, и вообще все то, что извѣстно въ настоящее время подъ именемъ проэктивной геометріи, но изложено аналитически. Въ гл. XI излагается значеніе и свойства однородныхъ уравненій. Гл. XII посвящена трилинейной системѣ координатъ. Въ гл. XIII дано геометрическое понятіе о инваріантахъ и ихъ значеніи въ геометріи. Въ гл. XIV изложены свойства кривыхъ втораго порядка и ихъ дѣленіе на классы; въ гл. XV изложено тоже, но съ точки зрѣнія двойственности. Въ гл. XVI подробно изложены свойства всѣхъ трехъ родовъ коническихъ сѣченій и приведены примѣры. Въ гл. XVII и XVIII подробно изложены свойства круга и системы круговъ; все это пояснено примѣрами. Въ гл. XIX изложены условія, при которыхъ уравненіе второй степени распадается на два линейные множителя и представляетъ пару прямыхъ линій. Въ гл XX, XXI и XXII показаны условія пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій; ангармоническія ихъ свойства и инваріанты системъ коническихъ сѣченій; послѣдняя изъ этихъ главъ заканчивается построеніемъ коническихъ сѣченій по даннымъ пяти условіямъ. Въ гл. XXIII и XXIV показаны геометрическіе методы взаимныхъ поляръ и проэкцій: въ послѣдней изъ этихъ главъ въ концѣ показаны пересѣченія конуса плоскостью.

Вторая часть. Въ гл. XXV изложенъ методъ координатъ въ пространствѣ, при чемъ пояснено, что представляютъ уравненія съ тремя перемѣнными, съ двумя и съ однимъ; въ этой же главѣ показано рѣшеніе нѣкоторыхъ существенныхъ вопросовъ. Въ гл. XXVI изложены свойства и всѣ виды уравненія плоскости. Въ гл. XXVII показаны свойства прямой, различные виды ея уравненій, и примѣры для различныхъ взаимныхъ положеній прямой и плоскости. Въ гл. XXVIII изложена двойственность координатъ въ пространствѣ и примѣры, какъ для прямой, такъ и для плоскости; показано значеніе уравненія съ тремя перемѣнными съ точки зрѣнія двойственности. Гл. XXIX содержитъ сокращенный способъ и примѣры. Въ гл. XXX изложены: ангармонія, гармонія и инволюція связки плоскостей, а также примѣры. Въ гл. XXXI показано преобразованіе координатъ въ пространствѣ и система тетраэдрическихъ координатъ. Въ гл. XXXII и XXXIII изложены общія свойства поверхностей втораго порядка и второй степени, со стороны двойственности. Въ гл. XXXIV изложены роды поверхностей, ихъ дѣленіе на классы и признаки, по которымъ ихъ различаютъ. Въ гл. XXXVI показаны свойства центральныхъ поверхностей: эллипсоида, гиперболоида однополаго и двуполаго;

при этомъ приведены примѣры. Въ гл. XXXVII излагаются свойства поверхностей неимѣющихъ центра: эллиптическій параболоидъ и гиперболическій параболоидъ. Гл. XXXVIII посвящена шару и системамъ шаровъ. Въ гл. XXXIX изложены общія понятія о фокусахъ поверхностей, поверхности софокусныя, эллиптическія координаты и примѣры. Наконецъ гл. XL, послѣдняя, содержитъ образованіе поверхностей вообще и образованныхъ движеніемъ прямой въ особенности, какъ напр. поверхности цилиндрическія, коническія, коноидальныя, косыя и развертывающіяся.

Таково вкратцѣ содержаніе изданнаго мною сочиненія. Изъ общаго содержанія отдѣльныхъ главъ видно, что оно содержитъ всѣ части университетскаго курса Анал. Геом., но въ дополненномъ видѣ. Книга моя, я надѣюсь, можетъ служить пособіемъ къ изученію Аналитической Геометріи и къ ознакомленію съ современнымъ состояніемъ этого отдѣла геометріи, т. е. въ томъ видѣ, какой она получила благодаря трудамъ наиболѣе извѣстныхъ геометровъ, каковы: Салмонъ, Гессе и Клебшъ. Классическое сочиненіе Салмона „Коническія сѣченія" было мною переведено на русскій языкъ въ 1860 году. Въ настоящее время книга эта библіографическая рѣдкость. Къ тому же на русскомъ языкѣ была издана только Аналитическая Геометрія двухъ измѣреній. Издавая настоящій трудъ я имѣлъ въ виду пополнить этотъ пробѣлъ и надѣюсь, что книга моя принесетъ учащимся такую же пользу, какую принесло русское изданіе „Коническихъ сѣченій" Салмона двадцать лѣтъ тому назадъ. Первоначально трудъ мой былъ дважды изданъ литографически въ 1883 и 1884 годахъ. Сдѣлавъ нѣкоторыя измѣненія и исправленія я рѣшился его напечатать.

При составленіи настоящаго сочиненія я пользовался, главнымъ образомъ, классическими трудами Салмона, сочиненіями Клебша, Гессе и прекраснымъ курсомъ Аналитической Геометріи, составленнымъ профессоромъ Лувенскаго университета Карнуа. Привожу ниже болѣе подробный перечень главныхъ пособій, которыми я пользовался при чтеніи лекцій въ университетѣ и при изданіи настоящаго сочиненія.

Baltzer, Analytische Geometrie. Leipzig, 1882. in-8.

Bourdon, Application de l'Algèbre à la Géométrie comprenant la géométrie analytique à deux et à trois dimensions. Paris, 4 ed. 1837 in-8.

Carnoy, Cours de Géométrie analytique, Vol. I. Géométrie plane; 3 ed. 1880, Paris, in-8.—Vol. II. Géométrie de l'espace; 3 ed. 1881, Paris, in-8.

Chasles, Traité de Géométrie supérieure. Paris, 1852, in-8.

Chasles, Traité des Sections coniques, 1-e partie. Paris, 1865, in-8.

Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. Hrsg. v. Lindemann. Bd. I, Th. 1—2. Leipzig, 1875. Также французское изданіе: Leçons sur la Géométrie. T. I—III, Paris, 1879—80—83, in-8.

Cremona, Elementi di geometria projectiva. Vol I. Roma. 1873. in-8.
Cremona, Introduzione ad una theoria geometrica delle Curve piane. Bologna, 1862, in-4.
De Volson Wood, The elements of Coördinate Geometry in three parts. I. Cartesian Geometry, II. Quaternions, III. Modern Geometry. New edition. New-York. 1882, in-8.
Hesse, Vorlesungen über die Analytische Geometrie der geraden Linie, des Punkts und des Kreises in der Ebene. Leipzig, 1865, in-8. -3 Aufl, rev. von S. Gundelfinger. Leipzig, 1881, in-8.
Hesse, Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raums. Leipzig, 1861, in-8. – 3 Aufl. rev. von S. Gundelfinger. Leipzig, 1876, in-8.
Hesse, Vier Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie. Leipzig, 1866, in-8.
Hesse, Sieben Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig, 1874, in-8.
Reye, Die Geometrie der Lage. Verträge von Dr. Th. Reye. 2 Aufl. Hanover, 1877 – 80, in-8.
Salmon, A treatise on Conic Sections. 3 ed. London, 1855, in-8.
Salmon, A treatise on Conic Sections. 6 ed. London, 1879, in-8.
Salmon, Analytic Geometry of three dimensions. 3 ed. Dublin, 1874, in-8.
Salmon, Treatise on the higher plane curves. 2 ed Dublin, 1878, in-8.
Стрекаловъ, Курсъ аналитической геометріи Т. I. Кривыя перваго порядка и перваго класса. СПБ. 1884, in-8.

Въ заключеніе считаю долгомъ принесть искреннюю благодарность Совѣту Императорскаго университета св. Владиміра за пособіе, оказанное при напечатаніи настоящаго сочиненія

М. Ващенко-Захарченко.

Кіевъ, февраль 1887 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Часть первая.—Аналитическая геометрія двухъ измѣреній.

Часть вторая.—Аналитическая геометрія трехъ измѣреній.

Введеніе.

Историческій очеркъ развитія аналитической геометріи.

—

Первоначальныя основы Аналитической Геометріи были положены знаменитымъ французскимъ математикомъ XVI вѣка *Віетомъ* (1540—1603 г.). Онъ первый сдѣлалъ нововведеніе въ тогдашнюю Алгебру, введя въ нее символы и показавъ, какъ при помощи ихъ могутъ быть производимы вычисленія. Обозначая буквами величины извѣстныя и неизвѣстныя, Віетъ создалъ науку о символахъ и показалъ какъ эти символы подчиняются всѣмъ тѣмъ дѣйствіямъ, которыя производили до него только надъ числами. Первыя основы своего метода Віетъ изложилъ въ 1591 г. въ своемъ „Введеніи къ искусству аналитики“ [1]) и въ послѣдующихъ добавленіяхъ къ этому сочиненію. Необыкновенную важность своего нововведенія ясно сознавалъ уже самъ Віетъ, говоря: „что методъ его даетъ возможность рѣшить самый важный вопросъ, а именно: задачу о рѣшеніи всѣхъ задачъ“ [2]). Показавъ какъ алгебраическимъ путемъ могутъ быть рѣшены различные геометрическіе вопросы, рѣшаемые до него построеніемъ, Віетъ внесъ въ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ новое направленіе, которое послужило къ болѣе тѣсному сближенію Алгебры съ Геометріей.

---

[1]) Francisci Vietae in artem analiticam Isagoge, 1591, Tours, pet. in-fol. Дополненіемъ къ этому сочиненію служило другое, заглавіе котораго: Ad Logisticem speciosam Notae priores. Оно было напечатано только послѣ смерти автора въ собраніи его сочиненій, изданномъ подъ заглавіемъ· Francisci Vietae Opera Mathematica in unum Volumen congesta, ac recognita; Opera atque studio Francisci à Schooten Leydensis. Lugduni Batavorum. 1646. in—4. Первыя два поименованныя сочиненія Віета переведены на французъ. яз. и напечатаны въ Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche. Roma. T. I, pag. 223 276.

[2]) Denique fastuosum problema problematum ars Analitice, triplicem Zetetices Poristices et Exegetices formam tandem induta, iure sibi adrogat, Quod est nullum non problema solvere (In artem analiticam Isagoge cap. VIII, 29).

Замѣчательная попытка Віета получила дальнѣйшее развитіе только благодаря французскому философу *Декарту* (1596—1650 г.), котораго по справедливости считаютъ истиннымъ творцемъ Аналитической Геометріи, хотя весьма вѣроятно, что первоначальную идею своего метода Декартъ почерпнулъ изъ сочиненій Віета. Методъ свой Декартъ изложилъ въ первый разъ въ 1637 г. въ своей „Геометріи", составляющей прибавленіе къ философскому трактату [1]). Особенность метода координатъ созданнаго Декартомъ, заключается въ томъ, что онъ внесъ въ Геометрію, при рѣшеніи вопросовъ различнаго рода характеръ общности, который она до него не имѣла. До Декарта геометры изслѣдовали только частныя свойства нѣкоторыхъ кривыхъ; такое направленіе существовало у всѣхъ древнихъ геометровъ. Методъ внесенный въ Геометрію Декартомъ придалъ ей характеръ, который она до него не имѣла, такъ какъ при помощи одной формулы стало возможно выразить свойства, принадлежащія цѣлымъ классамъ кривыхъ. Благодаря новому направленію, данному Декартомъ, Геометрія быстро подвинулась впередъ и развитіе ея оказало несомнѣнную пользу развитію другихъ отраслей математическихъ наукъ. Особенно много подвинулась впередъ Алгебра, символическіе пріемы которой стали принимать наглядную форму и стали благодаря этому болѣе понятны, вслѣдствіи ихъ осязательности. Однимъ изъ первыхъ приложеній Геометріи къ Алгебрѣ было объясненіе значенія и примѣненіе отрицательныхъ корней уравненій, о которыхъ древніе математики имѣли весьма неотчетливое представленіе и которые ими старательно избѣгались. Начиная съ Декарта развитіе Геометріи и Алгебры идетъ рука объ руку и развитіе одной тѣсно связано съ развитіемъ другой. Методъ Декарта былъ подготовительнымъ путемъ къ блестящему открытію Лейбница и Ньютона—дифференціальному исчисленію.

Методъ координатъ былъ примѣненъ Декартомъ только на плоскости къ Геометріи двухъ измѣреній. Сознавая всю важность и значеніе своего метода Декартъ не ограничился приложеніемъ его къ плоскимъ кривымъ, а показалъ также его приложеніе къ кривымъ двойной кривизнѣ въ своей теоріи кривыхъ двойной кривизны. Для этой цѣли онъ изъ точекъ кривой, лежащей въ пространствѣ, опускалъ перпендикуляры на двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости; проэкціи этихъ перпендикуляровъ образовали двѣ плоскія кривыя, положеніе каждой изъ которыхъ онъ относилъ къ двумъ осямъ координатъ, лежащимъ въ плоскости кривой, изъ которыхъ одна была пересѣченіе двухъ плоскостей. Пріемъ этотъ, какъ видно, давалъ

---

[1]) *Descartes*, Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences; plus la Dioptrique, les Méteores et la Géométrie, Leyde, 1637, in-4.

возможность, при помощи метода координатъ, опредѣлить положеніе кривой въ пространствѣ. Методъ этотъ приводитъ къ системѣ координатъ трехъ измѣреній и къ представленію поверхностей въ видѣ уравненія между тремя перемѣнными. Но прошелъ значительный періодъ времени пока геометры освоились съ методомъ координатъ и первоначально ограничивались только примѣненіемъ его къ плоскимъ кривымъ.

Методъ координатъ Декарта, какъ всякое нововведеніе, былъ встрѣченъ многими изъ современниковъ автора „Геометріи" съ неудовольствіемъ. Къ числу противниковъ новаго метода принадлежалъ также французскій геометръ *Роберваль* (Roberval, 1602—1675) подвергшій „Геометрію" Декарта самой строгой критикѣ; извѣстность Роберваля среди современныхъ ему математиковъ только способствовала распространенію метода координатъ. Есть основанія полагать, что критикуя сочиненія Декарта Роберваль руководствовался не чувствомъ справедливости, а скорѣе дѣйствовалъ подъ вліяніемъ зависти, такъ какъ впослѣдствіи имъ самимъ былъ примѣненъ методъ Декарта въ одномъ изъ своихъ сочиненій [1]). Къ числу сторонниковъ метода Декарта принадлежалъ французскій математикъ *Ферма* (1601—1665), которому нѣкоторые изъ аналитическихъ пріемовъ Декарта были извѣстны еще ранѣе выхода въ свѣтъ „Геометріи", но спеціальный характеръ его изслѣдованій, основанныхъ имъ, большею частью, на созданномъ имъ методѣ „*maximis* и *minimis*" ближе подходитъ къ геометрическимъ изслѣдованіямъ древнихъ геометровъ [2]). Другой сторонникъ новаго метода былъ другъ Декарта французъ *Де-Боне* (De-Beaune, 1601—1652), написавшій комментаріи на „Геометрію" [3]), которые очень цѣнились самимъ Декартомъ. Де-Боне установилъ новыя воззрѣнія въ Аналитической Геометріи кривыхъ линій, онъ первый указалъ на связь существующую между уравненіемъ и свойствами касательной и соотвѣтствующей ей кривой. Комментаріи Де-Боне появились въ печати въ первый разъ при обширномъ комментаріи на „Геометрію" Декарта, сдѣланномъ голландскимъ математикомъ *Ванъ-Шотеномъ* (1581—1661). Въ другомъ изъ своихъ сочиненій озаглавленномъ „Матема-

---

[1]) De resolutione aequationum. Сочиненіе это напечатано было послѣ смерти Роберваля вмѣстѣ съ другими его сочиненіями въ сборникѣ: Divers ouvrages de mathématiques et de physique, par M. M. de l'Académie Royale des Sciences. Paris 1693 in-fol.

[2]) Сочиненіе Ферма „о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ" до насъ не дошло въ подлинникѣ, а сохранилось въ изданіи сочиненій Ферма: Varia opera mathematica D. Petri de Fermat, senatoris Tolosani; Tolosae, 1679, in-fol.

[3]) Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, nunc autem cum notis Fiorimondi de Beaune, incuria Blaesensi consil. regii, in linguam latinam versa opera Franc. a Schooten, Lugd. Batav. 1649, in-4. Есть еще изданія 1659 и 1683 годовъ.

тическія упражненія“ [1]) Ванъ-Шотенъ примѣнилъ методъ координатъ къ рѣшенію многихъ весьма сложныхъ и интересныхъ вопросовъ высшей геометріи. Методъ этотъ онъ съ успѣхомъ примѣнилъ въ III-ей книгѣ этого сочиненія, предметъ которой относится къ возстановленію утеряннаго сочиненія Аполлонія „Плоскія мѣста“. Въ V-й книгѣ того же трактата Шотена мы находимъ первое приложеніе метода координатъ къ кривымъ въ пространствѣ. Это былъ первый шагъ къ Аналитической Геометріи трехъ измѣреній. Изъ числа другихъ послѣдователей метода Декарта упомянемъ еще голландскихъ математиковъ: *Вита* (Witt, 1632—1672), *Слуза* (Sluse, 1623—1685), *Гудда* (Hudde, 1633—1704), *Гюйгенса* (Huyghens, 1629—1695), *Ванъ-Герета* (Van-Heuraet), англичанина *Нейля* (Neil, 1630—1677), усвоившихъ методъ координатъ и примѣнявшихъ его при рѣшеніи различныхъ геометрическихъ вопросовъ. Послѣдніе два геометра, именно Ванъ-Геретъ и Нейль, одни изъ первыхъ занимались вопросомъ о спрямленіи кривыхъ. Нельзя также пройти молчаніемъ довольно обстоятельные комментаріи на „Геометрію“ Декарта, написанные іезуитомъ *Рабуэлемъ* (1663 —1628) [2]).

Первое сочиненіе относящееся къ коническимъ сѣченіямъ, въ которомъ былъ приложенъ методъ Декарта. было написано въ 1665 году англійскимъ математикомъ *Валлисомъ* (1616—1703) [3]). Сочиненіе это не заключаетъ ничего особеннаго, такъ какъ Валлисъ въ своихъ геометрическихъ изслѣдованіяхъ большею частію всегда слѣдовалъ синтетическому методу древнихъ, творенія которыхъ онъ очень цѣнилъ. Несравненно важнѣе приложеніе метода Декарта, которое сдѣлалъ Валлисъ въ своей „Ариѳметикѣ безконечныхъ“ [4]) къ методу недѣлимыхъ италіанскаго математика *Кавалери* (Cavalieri, 1598—1647).

Одновременно съ Декартомъ другіе современные ему геометры, продолжая заниматься изученіемъ сочиненій древнихъ греческихъ геометровъ Аполлонія и Паппа, изслѣдовали геометрическіе вопросы съ иной точки зрѣнія—съ синтетической. Обобщая выводы древнихъ и продолжая далѣе кругъ геометрическихъ изслѣдованій они оказали также не малое вліяніе на послѣдующее развитіе Аналитической Геометріи. Изъ числа такихъ геометровъ первое мѣсто принадлежитъ другу Декарта *Дезаргу* (1593—1662) и ученику послѣдняго извѣстному *Паскалю* (1623—1662). На труды этихъ геометровъ долгое время не было обращено должнаго вниманія, такъ какъ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ синтетическимъ путемъ постепенно

---

[1]) Exercitationes mathematicae, Amsterd., 1657.

[2]) *Rabuel*, Commentaires sur la Geometrie de M. Descartes. Lyon, 1730, in-4.

[3]) *Wallis*, De Sectionibus Conicis, Oxon., 1665, in-4.

[4]) *Wallis*, Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilinearum quadraturam aliaque problemata, Oxon., 1656, in-4.

вытѣснялось новымъ методомъ координатъ Декарта. Только въ началѣ нынѣшняго столѣтія на синтетическій методъ изслѣдованій было обращено снова вниманіе и онъ далъ блестящіе результаты. Сочиненія Дезарга касались многихъ геометрическихъ вопросовъ интересныхъ по своему существу, къ сожалѣнію авторъ ихъ писалъ въ видѣ набросковъ, сообщая читателямъ только основныя положенія и результаты. Главное изъ его сочиненій,—напечатанное въ 1639 г.,—имѣло предметомъ коническія сѣченія[1]; методъ изслѣдованія Дезарга примѣненный въ немъ былъ основанъ на методѣ перспективы. Сочиненіе это дошло до насъ только благодаря копіи снятой съ напечатаннаго экземпляра геометромъ Лагиромъ. Въ сочиненіи этомъ находится много замѣчательныхъ изслѣдованій и воззрѣній автора, такъ напр. Дезаргъ первый высказалъ явно положеніе выраженное Евклидомъ неявно въ своемъ постулатѣ, что если разсматривать прямую, какъ продолженную въ обѣ стороны въ безконечность, то ея противоположные концы сходятся. Въ этомъ же сочиненіи Дезарга изложены основныя начала теоріи инволюціи, которыя впослѣдствіи, благодаря французскому геометру Шалю, стали однимъ изъ основаній новѣйшей Геометріи; также Дезаргу мы обязаны основными положеніями метода сѣкущихъ и метода поляръ и полюсовъ на плоскости и въ пространствѣ. Послѣдній методъ, который нѣкоторые приписывали французскому геометру Лагиру, послужилъ основаніемъ метода взаимныхъ поляръ. Геометрическія изслѣдованія и методъ Дезарга высоко цѣнились Декартомъ, не смотря на то, что методы ихъ были различны; говоря о заслугахъ Дезарга Декартъ въ письмѣ къ Мерсенну говоритъ, „что Дезаргъ первый внесъ въ геометрическія изслѣдованія направленіе и характеръ, который онъ, Декартъ, называетъ метафизикой Геометріи и который никѣмъ не былъ прилагаемъ кромѣ Архимеда“.

Направленіе внесенное въ геометрическія изслѣдованія Дезаргомъ нашло послѣдователя въ лицѣ французскаго философа Паскаля, который также слѣдовалъ синтетическому пути. Методъ этотъ Паскаль примѣнилъ съ рѣдкимъ успѣхомъ въ своемъ сочиненіи „Коническія Сѣченія“ въ шести книгахъ. Къ сожалѣнію сочиненіе это въ настоящее время утеряно, хотя еще въ 1676 году Лейбницъ въ бытность свою въ Парижѣ имѣлъ его въ рукахъ и упоминаетъ о его содержаніи. Указанія на содержаніе этого замѣчательнаго сочиненія сохранились также въ дошедшемъ сочиненіи Паскаля „Опытъ коническихъ сѣченій“, написанномъ въ 1640 году[2]). Въ не-

[1]) Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan, et aux événements des contrariétés d'entre les actions des puissances ou forces Paris, 1639.

[2]) Сочиненіе это было издано только въ 1779 г., подъ заглавіемъ: „Essai pour les coniques“, въ полномъ изданіи сочиненій Паскаля, даннымъ Bossut.

дошедшемъ до насъ трактатѣ Паскаля были положены основы предложеній, касающихся ангармоническихъ отношеній, и дано также дальнѣйшее развитіе теоріи инволюціи Дезарга. Въ „Опытѣ" Паскаля были указаны свойства шестиугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе. Шестиугольникъ этотъ Паскаль называлъ „мистическимъ." Коническія сѣченія Паскаль образовывалъ съ помощью круга, примѣняя начала перспективы, и свойства ихъ выводилъ изъ свойствъ круга.

Другой современникъ Декарта, также одинъ изъ его друзей, французъ *Мидоржъ* (1585—1647) первый написалъ во Франціи сочиненіе по коническимъ сѣченіямъ, вышедшее въ 1631 г. въ двухъ книгахъ; въ 1641 г. оно было авторомъ дополнено и издано въ четырехъ книгахъ [1]). Методъ изслѣдованій Мидоржа слѣдуетъ отнесть къ синтетическому методу древнихъ, который онъ стремился обобщить и расширить.

Послѣдователемъ метода Паскаля былъ также извѣстный знатокъ твореній древнихъ греческихъ геометровъ голландецъ іезуитъ *Гр. де-Сенъ-Венсенъ* (Grégoire de-St.-Vincent, 1584—1667), обогатившій теорію коническихъ сѣченій множествомъ предложеній, найденныхъ имъ [2]).

Въ духѣ древнихъ геометровъ разработывалъ теорію коническихъ сѣченій также французскій математикъ *Лагиръ* (La-Hire, 1640—1718) написавшій нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ главное „Трактатъ коническихъ Сѣченій" напечатанный въ 1685 г. [3]). Хотя Лагиръ былъ основательно знакомъ съ методомъ координатъ Декарта, но онъ предпочиталъ производить свои изслѣдованія методомъ синтетическимъ, впрочемъ въ значительной степени разнящимся отъ пріемовъ древнихъ. Лагиръ инымъ образомъ образовывалъ коническія сѣченія чѣмъ древніе. Онъ принадлежалъ къ числу послѣдователей Дезарга, который поручилъ ему даже окончаніе одного изъ своихъ сочиненій по прикладной математикѣ.

Первый геометръ представившій поверхность въ видѣ уревненія между тремя перемѣнными, на сколько извѣстно, былъ французъ *Паренъ* (1666—1715). Соображенія свои по этому вопросу онъ представилъ въ мемуарѣ,

---

[1]) *Mydorgius*, Prodrom. Catoptric et Dioptricum, Parisiis 1641, in-fol. „Коническія Сѣченія" были введеніемъ къ сочиненію, содержаніе котораго Катоптрика и Діоптрика. Введеніе это должно было заключать восемь книгъ, но послѣднія четыре не были напечатаны.

[2]) *Gregorio a St-Vicentio*, Opus geometricum quadraturae circuli et Sectionum coni, decem libris comprehensum. Vol I—II, Antverp. 1625, in-fol. Въ сочиненіи этомъ авторъ даетъ невѣрное рѣшеніе задачи квадратуры круга. Ошибочность выводовъ первый указалъ Декартъ.

[3]) Sectiones conicae in novem libros distributae, Parisiis, 1685, in-fol.

читанномъ имъ въ 1700 г. въ Парижской Академіи Наукъ. Въ другомъ своемъ сочиненіи Паренъ находитъ уравненіе шара, уравненіе касательной плоскости къ шару, уравненіе нѣкоторыхъ поверхностей третьей степени и кривыхъ двойной кривизны и многое другое[1]). Нововведеніе Парена оказало несомнѣнныя услуги развитію Аналитической Геометріи трехъ измѣреній.

Методъ координатъ въ пространствѣ въ первый разъ обстоятельно былъ изложенъ французскимъ геометромъ *Клеро* (1713—1765), въ 1731 г., въ сочиненіи: „Трактатъ о кривыхъ двойной кривизны" [2]), которое онъ написалъ имѣя всего шестнадцать лѣтъ. Въ этомъ сочиненіи показано примѣненіе координатъ въ пространствѣ къ поверхностямъ и кривымъ двойной кривизны, происходящихъ отъ ихъ пересѣченія. Изъ другихъ математиковъ способствовавшихъ развитію Анал. Геом. трехъ измѣреній укажемъ еще на французскаго геометра аббата *Де-Гуа* (1713—1788) автора сочиненія по теоріи кривыхъ [3]), въ которомъ онъ даетъ пріемы для нахожденія касательныхъ, ассимптотъ и кратныхъ точекъ кривыхъ всевозможныхъ степеней. Онъ первый показалъ, что нѣкоторыя изъ этихъ точекъ могутъ лежать на безконечности. Методъ Декарта нашелъ также примѣненіе въ сочиненіи швейцарскаго геометра *Крамера* (1704—1752), озаглавленномъ: „Введеніе въ анализъ алгебраическихъ кривыхъ" [4]) и въ сочиненіи француза маркиза *Лопиталя* (1661—1704), озаглаеленномъ „Аналитическій трактатъ коническихъ сѣченій" [5]). Въ послѣднихъ двухъ сочиненіяхъ подробно изложена аналитическая теорія кривыхъ линій и поверхностей.

Знаменитый *Леонардъ Эйлеръ* (1707—1783), членъ СПБ. Академіи Наукъ, также изложилъ основанія аналитической теоріи различныхъ геометрическихъ кривыхъ въ своемъ сочиненіи: „Введеніе въ анализъ безконечныхъ", написанномъ въ 1748 г. [6]). Изслѣдованія свои онъ распространилъ на Геометрію трехъ измѣреній и первый изслѣдовалъ уравненія съ двумя и тремя перемѣнными, заключающія уравненія поверхностей втораго порядка. Изслѣдовакія Эйлера занимательны по своей удобопонятности и общности.

---

[1]) *Parent*, Essai et recherches de physique et de mathématiques. Paris, 1713. 3 vol in-12.

[2]) *Clairaut*, Recherches sur les courbes a double courbure. Paris, 1731, in-4.

[3]) *De-Gua*, Usage de l'analyse de Descartes, pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris, 1740, in-12.

[4]) *Cramer*, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Génève. 1750, in-4.

[5]) *L'Hospital*, Traité analytique des sections coniques. Paris, 1720, in-4.

[6]) *L. Euler*, Introductio in Analysin infiniterum. Vol. I—II. Lausanne, 1748, in-8.

Первый изъ геометровъ изслѣдовавшій вопросъ о кривыхъ высшихъ порядковъ во всей его общности былъ великій *Ньютонъ* (1642—1727). Работы его по этому предмету изложены въ сочиненіи: „Перечисленіе кривыхъ третьяго порядка"[1]). Ньютонъ насчитываетъ 72 вида различныхъ кривыхъ третьяго порядка, которыя онъ дѣлитъ на пять классовъ. Онъ показываетъ, что онѣ образованы перспективной проэкціей пяти кубическихъ параболъ, подобно тому какъ всѣ кривыя втораго порядка образованы проэкціями круговъ. Также указаны были Ньютономъ различныя интересныя свойства принадлежащія алгебраическимъ кривымъ, но доказательствъ никакихъ этому онъ не далъ. Въ настоящее время даже трудно сказать, какъ онъ пришелъ къ этимъ выводамъ: путемъ-ли анализа или геометрическимъ? Многіе изъ вопросовъ чистой геометріи рѣшены были Ньютономъ въ первомъ отдѣлѣ его знаменитаго сочиненія „Начала философіи„[2]). Въ этомъ отдѣлѣ изложенъ методъ Ньютона, которымъ онъ пользовался при рѣшеніи различныхъ геометрическихъ вопросовъ, а также показаны многія замѣчательныя свойства коническихъ сѣченій.

Болѣе обстоятельно была изложена теорія кривыхъ, разсмотрѣнныхъ Ньютономъ, англійскими геометрами *Стирлингомъ* (1692—1770) и *Маклореномъ* (1698—1746). Первый далъ доказательства различныхъ свойствъ кривыхъ третьяго порядка перечисленныхъ Ньютономъ и прибавилъ къ нимъ еще четыре вида. Изслѣдованія Стирлинга составляютъ предметъ его сочиненія: „Кривыя третьяго порядка перечисленныя Ньютономъ"[3]). Подобнаго же содержанія суть сочиненія Маклорена[4]), во второмъ изъ которыхъ онъ выводитъ наиболѣе интересныя и важныя свойства алгебраическихъ кривыхъ синтетическимъ путемъ

Попытки классификаціи различныхъ кривыхъ были уже сдѣланы древними геометрами. Они сознавали что всякая кривая есть ничто иное какъ рѣшеніе неопредѣленнаго вопроса Въ такомъ смыслѣ древніе называли кривыя *геометрическими мѣстами*. Хотя они не имѣли понятія объ уравненіяхъ и объ представленіи кривыхъ уравненіями, но они понимали, что геометрическая кривая есть *мѣсто* точекъ соотвѣтствующихъ безчис-

---

[1]) *Isaac Newton*, Enumeratio linearum tertii ordinis. Сочиненіе это есть прибавленіе къ „Оптикѣ" того же автора, напечатанной въ 1704 г.

[2]) *Newton*, Philosophiae naturalis principia mathematica. London, 1687, in-4.

[3]) *Stirling*, Lineae tertii ordinis Newtonianae. Oxon. 1717, in-8.

[4]) *Maclaurin*, Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis, Lond. 1719. in-4.

Maclaurin, De linearum geometricarum proprietatibus generalis tractatus. Lond. 1720, in-4.

ленному множеству рѣшеній, соотвѣтствующихъ предложенному вопросу. Декартъ указалъ на отличительныя свойства двухъ видовъ кривыхъ, именно: геометрическихъ и механическихъ. По его опредѣленію *геометрическія* кривыя суть тѣ, въ которыхъ точки кривой могутъ быть опредѣлены сочетаніемъ двухъ движеній, между которыми существуетъ опредѣленное отношеніе. Таковы конхоида, циссоида и т. д. Къ числу *механическихъ* кривыхъ принадлежатъ: спираль, квадратрикса, циклоида, логариѳмическая кривая и др., отношенія движеній отъ которыхъ онѣ происходятъ неизвѣстны. Это дѣленіе кривыхъ было замѣнено впослѣдстіи другимъ, предложеннымъ *Лейбницомъ* (1646—1716). Онъ всѣ кривыя отнесъ къ числу геометрическихъ, раздѣливъ ихъ на два класса: *кривыя алгебраическія* и *кривыя трансцендентныя.* Первыя суть тѣ въ которыхъ ординаты въ функціи абсциссы выражаются конечнымъ числомъ алгебраическихъ дѣйствій. Вторыя суть тѣ, въ которыхъ эти функціи состоятъ изъ безконечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій, таковы Sin, Cos, Tang, log и т. д. Классификація алгебраическихъ кривыхъ, какъ мы видѣли выше, дана была въ первый разъ Ньютономъ.

Мы перечислили всѣ болѣе извѣстныя сочиненія по Аналитической Геометріи написанныя въ XVII и XVIII столѣтіяхъ и указали на ихъ характеръ. Эти же сочиненія представляютъ постепенное развитіе метода координатъ, созданнаго Декартомъ. Мы уже видѣли какъ Паскаль, Дезаргъ и другіе геометры стремились создать синтетическій методъ, основанный на новыхъ методахъ, который они постепенно вводили въ геометрическія изслѣдованія. Такой синтетическій методъ былъ снова введенъ въ геометрическія изслѣдованія въ началѣ настоящаго столѣтія знаменитымъ французскимъ геометромъ *Монжемъ* (1746—1818), основателемъ политехнической школы, творцемъ „Начертательной Геометріи“ [1]). Предметъ Начерт. Геом. есть рѣшеніе различныхъ вопросовъ, относящихся къ фигурамъ въ пространствѣ путемъ графическимъ—на плоскости. Методъ Монжа много способствовалъ болѣе обобщенному воззрѣнію на фигуры вообще. Такимъ образомъ въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ разсмотрѣніе различныхъ фигуръ и ихъ соотношеній въ пространствѣ являлось однимъ изъ самихъ главныхъ. Подтвержденіемъ этому отчасти могутъ служить классическое сочиненіе Монжа „Приложеніе Анализа къ Геометріи“ [2]), предметъ котораго происхожденіе и свойства поверхностей, а равно и труды многочисленныхъ его учениковъ:

---

1) *Monge*, Géométrie descriptive, Paris, 1794, in-4.

2) *Monge*, Application de l'Analyse à la Géométrie des surfaces du 1-e et 2-e degré. Paris, 1807—1809, in-8.

Дюпена (1784—18..) [1]), *Біо* (1774—1862) [2]), *Бріаншона* (1785—1880) [3]), *Гашета* (1769—1834) [4]), *Понселе* (1788—1867) [5]) и многихъ другихъ.

Понселе въ 1822 г. въ своемъ сочиненіи „Трактатъ о проэктивныхъ свойствахъ фигуръ" далъ методъ проэкцій, въ которомъ отъ частныхъ свойствъ фигуръ восходятъ къ болѣе общимъ. Такія свойства носятъ названіе *проэктивныхъ* свойствъ фигуръ. Перспективная проэкція еще ранѣе была приложена къ геометрическимъ изслѣдованіямъ Дезаргомъ, Ньютономъ и Паскалемъ, о чемъ мы упоминали уже выше, а впослѣдствіи нѣмецкій геометръ *Ламбертъ* (1728—1777) въ своей „Перспективѣ" [6]) приложилъ ее къ рѣшенію нѣкоторыхъ весьма сложныхъ вопросовъ, при помощи преобразованія ихъ въ болѣе простые. Но только Понселе въ проэктивныхъ свойствахъ фигуръ увидѣлъ весьма плодотворный геометрическій методъ и при помощи его развитія далъ новый толчекъ къ возникновенію новѣйшаго синтетическаго метода. Въ сочиненіи Понселе изложена также одна изъ болѣе важныхъ геометрическихъ теорій, именно „Теорія взаимныхъ поляръ", первоначальные слѣды которой нѣкоторые математики усмотрѣли въ сочиненіяхъ Дезарга. Еще ранѣе, именно Лагиру въ 1'85 г., было извѣстно, что въ плоскости коническаго сѣченія всякая точка съ прямою и всякая прямая съ точкою находятся въ извѣстномъ соотношеніи. Такое соотношеніе Понселе примѣнилъ къ преобразованію одной фигуры въ другую, ей взаимную, и изъ него создалъ геометрическій методъ, гдѣ точкѣ въ одной фигурѣ соотвѣтствуетъ прямая въ другой, и обратно. Французскій геометръ *Гергонне* (1771—1859) въ подобномъ соотношеніи двухъ азаимныхъ фигуръ усмотрѣлъ *общее начало*, изъ котораго съ того времени возникла новая точка зрѣнія при геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Начало это извѣстно

---

[1]) *Dupin*, Essai sur la description des lignes et des surfaces du second degré. Помѣщ. въ Journal de l'École Polytechnique, XIV cahier, 1808, p. 45—83.

Dupin, Developpements de Géométrie, 1813, Paris, in-4.

Dupin, Applications de Géomètrie et de Mécanique, Paris. 1822, in-4.

[2]) *Biot*, Essai de Geomètrie analytique, Paris, 1805, in-8.

Biot, Essai analytique des courbes et des surfaces, Paris, 1802, in-8.

[3]) *Brianchon*, Mémoire sur les surfaces courbes du second degré. Помѣщ. въ Journal de l'École Polytechnique, XIII cahier, 1806, p. 297—311.

Brianchon, Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris, 1817, in-8.

[4]) *Hachette*, Éléments de Géometrie à trois dimensions, Paris, 1817, in-8.

Hachette, Application de l'algèbre à la géometrie de trois dimensions, Paris, 1817, in-8.

[5]) *Poncelet*, Traité des propriètés projectives des figures. Paris, 1822, in-8.

Poncelet, Théorie générale des polaires réciproques. См. Journal Crell. T. IV p. 1—71, 1829.

[6]) *Lambert*, Die freie Perspective. Zürich. 1759, in-8.

нынѣ подъ именемъ *двойственности координатъ* (dualité). Названіе это введено было Гергонномъ [1]).

Новая точка зрѣнія введенная Понселе въ изслѣдованіе геометрическихъ вопросовъ получила вскорѣ быстрое развитіе. Незадолго до появленія сочиненія Понселе появилась въ 1803 г. „Геометрія положенія" [2]) французскаго геометра *Карно* (1753—1823), въ которой авторъ изслѣдуетъ свойства фигуръ въ зависимости отъ ихъ положенія. Главное нововведеніе Карно въ его „Геометріи" заключается въ томъ, что онъ далъ геометрическое представленіе количествъ положительныхъ и отрицательныхъ, что способствовало значительно обобщенію геометрическихъ рѣшеній, въ томъ смыслѣ что одного рѣшенія было достаточно, каковы бы ни были положенія различныхъ частей фигуры. До Карно требовалось столько рѣшеній сколько было раличныхъ расположеній частей фигуры.

Дальнѣйшему развитію геометрическихъ изслѣдованій много также содѣйствовала новая геометрическая теорія мнимыхъ количествъ, созданная въ началѣ настоящаго вѣка. Теорія эта дала блестящіе результаты въ своихъ приложеніяхъ къ различнымъ вопросамъ математическаго анализа. Первый [3]) разсматривавшій выраженіе $\sqrt{-1}$ какъ условный символъ, выражающій перпендикулярность, а выраженія вида $\pm a\sqrt{-1}$ какъ представляющія линіи перпендикулярныя къ направленіямъ по которымъ отсчитывались величины дѣйствительныя, положительныя и отрицательныя, былъ французскій математикъ *Арганъ* (1768—1813), написавшій въ 1806 г. сочиненіе „Попытка представить мнимыя величины при геометрическихъ построеніяхъ" [4]). Одновременно съ Аргономъ тѣмъ же вопросомъ занимался аббатъ *Бюэ* [5]) и *Франсе* [6]). Дальнѣйшія обобщенія методъ Аргана получилъ благодаря тру-

---

[1]) Annales de Mathématiques T. XVI, 1825—1826, p, 209.

[2]) *Carnot*, Géométrie de position, Paris, 1803, in-4.
Carnot, Théorie des transversales, Paris, 1806, in-4.

[3]) Первая попытка представить геометрически мнимыя выраженія принадлежитъ прусскому геометру *Кюну* (Kühn, 1690 -1769), автора мемуара: Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Мемуаръ этотъ былъ напечатанъ авторомъ въ 1750 году въ Novi Commentarii Academ. Scient. Imper. Petropolit., T. III.

[4]) *Argand*, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris 1806, in-8. Есть изданіе 1873 г.

[5]) *Buée*, Mémoire sur les quantités imaginaires. Помѣщено въ Philosophical Transaction, 1806.

[6]) *Français*, Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires. Помѣщено въ Annales de Mathématiques, T. IV, p. 222, 228, 364; T. V p. 197; 1813—1815.

дамъ англичанина *Варена*[1]), француза *Мурея*[2]) и наконецъ въ новой геометрической *теоріи эквиполенцій*, созданной профессоромъ падуанскаго университета *Беллавитисомъ* въ 1832 году[3]). Правильное воззрѣніе на геометрическое представленіе мнимыхъ выраженій имѣлъ также извѣстный германскій математикъ *Гауссъ* (Gauss, 1777—1855), предложившій[4]) символъ i для выраженія $\sqrt{-1}$. Особенно удачныя приложенія геометрической теоріи мнимыхъ величинъ при изслѣдованіи различныхъ аналитическихъ вопросовъ сдѣлалъ французскій математикъ *Коши* (1789—1857) въ 1847 г.[5]). Методъ геометрическаго представленія точки на плоскости при помощи мнимыхъ выраженій англійскій геометръ *Гамильтонъ* обобщилъ къ алгебраическому представленію точки въ пространствѣ. Методъ этотъ получилъ названіе: *метода кватерненовъ*[6]). Упомянемъ еще англичанъ *Пикока*, который въ свой „Алгебрѣ" [7]) занимался символомъ $(+)^{p/q}$ и *Грегори* (1813—1844), который въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ предложилъ особенное геометрическое представленіе для мнимыхъ количествъ[8]). Оригинальное геометрическое представленіе мнимыхъ количествъ далъ еще современный

---

[1]) *John Warren*, A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities, Cambridge, 1828, in-8. Дальнѣйшее развитіе своей теоріи авторъ даетъ въ Philosophical Transaction за 1829 г. pag., 241—254, 339—359.

[2]) *Mourey*, La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, Paris, 182., in-8 Есть изданіе 1861 г.

[3]) *Bellavitis*, Metodo delle equipollenze (См. Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto, T. VII, 1837) Sposizione del metodo delle equipollenze (См. Memorie della Società Italiana delle scienz., T. XXV, Modena, 1854). Послѣднее сочиненіе существуетъ во французс. переводѣ: Exposition de la méthode des equipollences par G. Bellavitis, traduit par Laisant, Paris, 1874, in-8.

[4]) О мнимыхъ величинахъ Гауссъ упоминаетъ мимоходомъ, говоря объ составныхъ количествахъ. Онъ говоритъ, что если величины положительныя и отрицательныя отсчитывать по горизонтальной линіи на право и на лѣво, то мнимыя величины слѣдуетъ отсчитывать по направленію перпендикулярному. См. Göttingischen gelehrten Anzeigen, Jahr 1831, St. 61, S. 625 и Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio 2-de, Göttingae, 1832, pag. 16, art. 38 et 39.

[5]) *Cauchy*, Sur les quantités géométriques; См. Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. IV, 1847, Paris, pag. 157—180.

[6]) *Hamilton*, On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra, См. Philosophical Magazine, 1844, 1845.—On Symbolical Geometry. См. The Cambridge and Dublin Mathem. Journal, 1846, Vol. I; 1847 Vol. II. — *Hamilton*, Lectures on quaternions. Dublin, 1853, in-8.

[7]) *Peacock*, Algebra. Cambrid., 1842, in-8.

[8]) *Gregory*, On the elementary principles of the application of algebraical symbols to geometry. Помѣщ. въ Cambridge Mathematical Journal, T. II. 1841.—Дальнѣйшее развитіе своей мысли Грегори приложилъ въ сочиненіи: *Gregory*, Exemples of the Differen. and Integral Calculus. Cambrid., 1841, in-8.

французскій геометръ *Мари* [1]), съ помощью котораго онъ легко объяснилъ періодичность не только интеграловъ простыхъ, но и кратныхъ.

Изъ новаго метода проэкцій Понселе, новаго воззрѣнія на геометрическое значеніе мнимыхъ выраженій, „Геометріи положенія“ Карно возникла новѣйшая синтетическая геометрія. Предметъ ея изслѣдованій касался въ началѣ только общихъ проэктивныхъ свойствъ фигуръ, впослѣдствіи въ нее вошли также изслѣдованія непроэктивныхъ—метрическихъ свойствъ. Послѣ Понселе французскій геометръ *Шаль* (1793—1880) и нѣмецкій геометръ *Штейнеръ* (1796—1863), независимо одинъ отъ другаго, положили основанія новой синтетической геометріи, опредѣливъ отношенія существующія между проэкціей двухъ фигуръ, независимо отъ ихъ перспективнаго положенія. Условія эти легли въ основаніе ихъ теоріи. Труды этихъ двухъ геометровъ составили предметъ многочисленныхъ ихъ сочиненій и мемуаровъ, изъ которыхъ болѣе важны „Высшая Геометрія“ Шаля [2]) и „Геометрическія построенія произведенныя при помощи неподвижнаго круга и прямой линіи“ Штейнера [3]). Въ другомъ сочиненіи „Систематическое развитіе взаимной зависимости геометрическихъ образовъ“ [4]) Штейнеръ излагаетъ свои геометрическія воззрѣнія и подробно разбираетъ нѣкоторые изъ методовъ новѣйшей геометріи, какъ напр. двойственность, проэктивность и др. Около того же времени Геометрію положенія разработывалъ нѣмецкій геометръ *Штаутдъ* (1798—188.) авторъ сочиненія „Геометрія положенія“ [5]), содержащее много интересныхъ изслѣдованій. Весьма много интересныхъ геометрическихъ вопросовъ было рѣшено италіанскимъ геометромъ *Маскерони* (1750—1800), изслѣдовавшимъ цѣлый рядъ задачъ, которыя онъ рѣшилъ въ своей „Геометріи циркуля“ только съ помощью круга [6]).

Новый методъ, внесенный въ изслѣдованія геометрическихъ вопросовъ, далъ самые блестящіе результаты въ рукахъ такихъ геніальныхъ математи-

---

[1]) *Maximilien Marie*, Théorie des fonctions des variables imaginaires. T. I—III. Paris. 1874—76, in-8.

[2]) *Chasles*, Traité de Géométrie Supérieure, Paris, 1852, in-8.

[3]) *Steiner*, Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und einem festen Kreises. Berlin, 1833, in-8.

[4]) *Steiner*, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität und s. w. Berlin, 1832, in-8. Сочиненіе это должно было состоять изъ пяти частей, но вышла въ свѣтъ только первая часть.

[5]) *Staudt*, Geometrie der Lage. Nürnberg. 1847, in-8 Beiträge zur Geometrie der Lage. Heft 1—2 -3, 1856—60. Nürnberg, in-8.

[6]) *Mascheroni*, La geometria del compasso. Pavia, 1797, in-8.

ковъ, какъ Шаль и Штейнеръ. Методъ этотъ способствовалъ много расширенію границъ геометрическихъ изслѣдованій. При этомъ замѣтимъ, что большую часть своихъ теоремъ Штейнеръ далъ безъ всякихъ доказательствъ, а приводитъ лишь ихъ сущность, между этими предложеніями есть весьма сложныя; ихъ доказательствомъ впослѣдствіи занимались многіе геометры. Изъ болѣе выдающихся сочиненій по Геометріи положенія укажемъ на сочиненіе германскаго геометра *Рейя*, вышедшее въ 1868 г. [1]).

Быстрое развитіе синтетической Геометріи оказало также вліяніе на дальнѣйшее развитіе Аналитической Геометріи. Явилась необходимость аналитическаго толкованія новыхъ началъ геометріи и новыхъ воззрѣній. Требовалось методъ доказательствъ, усвоенный, синтетической геометріей, перевесть на аналитическій языкъ. Этому оказалъ важную услугу нѣмецкій геометръ *Плюккеръ* (1801—1868), занимавшійся болѣе глубокимъ и всестороннимъ изслѣдованіемъ аналитическихъ уравненій. Плюккеръ показалъ въ 1828 г. въ своемъ сочиненіи „Аналитически-геометрическія развитія“ [2]), какъ при аналитическомъ изслѣдованіи геометрическихъ задачъ при извѣстномъ сочетаніи уравненій видны линіи фигуръ и взаимное отношеніе между ними. Совершенно справедливо замѣтилъ Плюккеръ, сказавъ: „формы моихъ уравненій суть полныя представленія графическихъ построеній, въ которыхъ нѣтъ ничего посторонняго; это суть идеальныя, аналитическими символами начертанныя фигуры“ [3]). Благодаря Плюккеру Аналитическая Геометрія совершенно измѣнилась и стала на должной степени своего развитія. Болѣе обстоятельно были изслѣдованы Плюккеромъ кривыя 3-го порядка, которыя онъ разсматриваетъ въ зависимости отъ ихъ вида и формы, при чемъ даетъ полное перечисленіе ихъ. Онъ насчитываетъ 219 кривыхъ 3-го порядка. Геометрическія свои воззрѣнія Плюккеръ проводилъ во многихъ сочиненіяхъ, изъ которыхъ болѣе важны слѣдующія: „Аналитическая Геометрія“ [4]), „Теорія алгебраическихъ кривыхъ“ [5]), „Геометрія трехъ измѣреній“ [6]). Кромѣ того Плюккеръ написалъ, подобно Шалю, множество мемуаровъ чисто геометрическаго характера.

---

[1]) *Reye*, Die Geometrie der Lage. Thle 1—2. Hannover. 1866—68, in-8. Переведено также на французскій языкъ подъ заглавіемъ: *Reye*, Géométrie de position. Par 1—2, Paris, 1880—81. in-8.

[2]) *Plücker*, Analytisch-geometrische Entwickelungen. Bd. I—II, Essen. 1828—31, in-4.

[3]) *Plücker*, Ueber Curven 3. Ordnung. J. Crelle Bd. XXXIV, 1847, S. 332. Воззрѣніемъ этимъ, говоритъ Плюккеръ, я обязанъ Монжу.

[4]) *Plücker*, System d. Analytischen Geometrie, Berlin, 1835, in-4.

[5]) *Plücker*, Theorie der algebraischen Curven, Bonn, 1839, in-4.

[6]) *Plücker*, System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf, 1846, in-4.

Исходя изъ своихъ воззрѣній на методъ синтетической геометріи Плюккеръ и другой германскій геометръ *Мебіусъ* (1790—1868)[1], независимо отъ Понселе и Гергонна, пришли къ началу двойственности координатъ, какъ это видно изъ нѣкоторыхъ мѣстъ „Аналитически-геометрическихъ развитій" Плюккера и „Барицентрическаго счисленія" Мёбіуса[2]. Плюккеру также обязаны введеніемъ *тетраэдрическихъ координатъ* и *сокращеннаго способа*, который собственно въ первый разъ былъ предложенъ французскимъ геометромъ *Бобилье* (Bobilier) въ 1827 году[3].

Новымъ синтетическимъ методомъ изслѣдованій впервые воспользовались геометры для изслѣдованія кривыхъ порядка выше втораго; этимъ занимались: Понселе, Штейнеръ и Плюккеръ. Въ теоріи этихъ кривыхъ особенное значеніе имѣли различныя присущія имъ свойства. Къ такимъ свойствамъ принадлежатъ, напримѣръ, такъ называемыя *точки перегиба* кривой, т. е точки въ которыхъ кривыя измѣняютъ направленіе своей кривизны, а также *двойныя касательныя*, т. е. касательныя касающіяся двухъ различныхъ точекъ кривой. Еще Понселе въ этихъ особенностяхъ думалъ найти объясненіе нѣкоторыхъ парадоксовъ, представляемыхъ методомъ взаимныхъ поляръ. Изъ этой теоріи Плюккеръ вывелъ число точекъ перегиба и двойныхъ касательныхъ, соотвѣтствующихъ алгебраической кривой извѣстнаго порядка. Но нахожденіе аналитическимъ путемъ этого числа представляло непреодолимыя трудности, такъ какъ эти особенности зависили отъ различныхъ свойствъ аналитическихъ уравненій, а также отъ одной изъ самыхъ трудныхъ частей Анализа, именно теоріи эллиминаціи. Вслѣдствіи этихъ причинъ аналитическое изслѣдованіе алгебраическихъ кривыхъ высшихъ порядковъ долгое время оставалось неполнымъ, пока не получилъ окончательнаго своего развитія одинъ изъ новѣйшихъ методовъ Анализа, именно теорія опредѣлителей, о которомъ справедливо сказалъ Сильвестръ: „Теорія опредѣлителей есть примѣненіе Алгебры къ Алгебрѣ; это есть методъ дающій возможность предвидѣть и связать результаты аналитическихъ дѣйствій, такимъ же точно образомъ какъ Алгебра освобождаетъ насъ отъ производства обыкновенныхъ дѣйствій Ариѳметики"[4].

---

[1]) *Möbius*, Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Klassen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewandt, von A. F. Möbius, Professor der Astronomie zu Leipzig. Leipzig, 1827, in-8.

[2]) Названіе „Барицентрическое счисленіе", по словамъ Мебіуса, онъ ввелъ потому, что методъ этотъ онъ вывелъ изъ началъ центра тяжести. „Предметъ барицентрическаго счисленія суть точки и численные коэфиціенты ихъ", говоритъ Мебіусъ.

[3]) Annales de Mathématiques; T. XVIII, 1827 1828, pag. 320.

[4]) Philos. Mag. Vol. I. 4 th. Ser. 1851, pag. 295.

Изслѣдованія Плюккера нашли также многихъ послѣдователей, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстны нѣмецкіе геометры *Гессе* (1811—1874) и *Клебшъ* (1831—1872). Главная заслуга Гессе заключается въ томъ, что онъ обобщилъ многое въ Аналитической Геометріи введя въ свои изслѣдованія *опредѣлители*. Занимаясь, на ряду съ геометрическими вопросами, вопросами алгебры Гессе показалъ, какъ при помощи теоріи опредѣлителей можно исключить одно неизвѣстное изъ двухъ уравненій высшихъ степеней. Занимаясь этимъ вопросомъ Гессе далъ нѣсколько важныхъ предложеній, касающихся этого исключенія и приложилъ ихъ къ изслѣдованію кривыхъ 3-го порядка и къ вопросу какъ форму 3-ей степени отъ трехъ перемѣнныхъ привесть къ возможно простой формѣ изъ четырехъ членовъ[1]). Рѣшеніе этого вопроса свелось на опредѣлитель изъ двухъ дифференціальныхъ коэфиціентовъ 3-ей степени, который въ первый разъ былъ введенъ Гессе въ вычисленія. Опредѣлитель этотъ, получившій большое приложеніе въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ различныхъ вопросовъ, получилъ названіе „Гессевскаго опредѣлителя". Одновременно съ изслѣдованіями Гессе, которыя привели его къ открытію опредѣлителя его имени, англійскій геометръ *Келле* (Cayley) въ 1845 г.[2]) положилъ первыя основы *теоріи инваріантовъ*. Теорія эта получила свое названіе отъ вопроса, изслѣдованіемъ котораго она обязана своимъ возникновеніемъ; вопросъ этотъ слѣдующій: „какъ могутъ быть изъ уравненія кривой выведены уравненія другихъ фигуръ, которыя находились бы съ кривой въ такомъ неизмѣнномъ (invariable) соотношеніи, что ихъ проэкціи неизмѣняются". Дальнѣйшее развитіе теорія инваріантовъ получила благодаря изслѣдованіямъ многихъ геометровъ, примѣнившихъ ее въ своихъ сочиненіяхъ; изъ числа ихъ мы укажемъ на англичанъ *Сильвестра*, *Салмона*[3]), и германскихъ геометровъ *Клебша*[4]), *Аронгольдта*

---

[1]) *Hesse*, Ueber die Elimination der Var. aus drei alg. Gleichungen vom 2-ten Grad mit zwei Veränderlichen.—Ueber die Wendepunkte der Curve 3. Ordnung. См. Jour. Crell., Bd. XXVIII, 1844, S. 68, 97.

[2]) Изслѣдованія Келе составляютъ предметъ цѣлаго ряда (десяти) мемуаровъ подъ заглавіемъ „Upon Quantics", напечатанныхъ въ Philosoph. Trans въ періодъ 1856—79 гг.

[3]) *Salmon*, Treatise on analytic Geometry London, 1848. in-8. Послѣдующія изданія озаглавлены: *Salmon*, Treatise on Conic Sections. Сочиненіе это выдержало шесть изданій, изъ коихъ послѣднее (6-е) вышло въ 1879 году. Сочиненіе это пользуется вполнѣ заслуженною извѣстностью и переведено почти на всѣ европейскіе языки. Переводъ на русскій языкъ сдѣланъ нами въ 1860 году и намъ принадлежитъ первымъ честь перевода этого сочиненія на иностранный языкъ. Переводъ нашъ озаглавленъ „Коническія Сѣченія", СПБ. 1860, in-8. Изъ другихъ сочиненій Салмона укажемъ еще Аналитическую Геометрію трехъ измѣреній: *Salmon*, Treatise on the analytic Geometry of three dimensions. Dublin, 1861, in-8, и на его теорію кривыхъ: *Salmon*, Treatise on higher plane curves. Dublin, 1852, in-8. Всѣ эти сочиненія выдержали по нѣсколько изданій и читаются математиками съ пользою и въ настоящее время.

[4]) Изъ сочиненій Клебша наиболѣе извѣстны: *Clebsch*, Vorlesungen über Geometrie.

(Aronholdt), *Гордана* (Gordan) и многихъ другихъ. Далѣе Гессе показалъ, что его опредѣлитель даетъ возможность найти къ каждой кривой другую кривую, связанную съ первой извѣстными условіями. Кривая эта получила впослѣдствіи названіе „кривой Гессе" [1]. Изъ числа чисто геометрическихъ вопросовъ рѣшенныхъ Гессе укажемъ на слѣдующій: даны 9 точекъ, опредѣляющихъ поверхность второго порядка, требуется найти 10-ю точку этой поверхности? Вопросъ этотъ былъ предложенъ Брюссельской Академіей въ 1825 году, по долгое время оставался нерѣшеннымъ, пока не было дано рѣшенія Гессе въ 1842 году [2]. Вопросъ этотъ въ геометріи трехъ измѣреній тоже что задача о нахожденіи 6-й точки коническаго сѣченія по даннымъ пяти его точкамъ. Послѣдняя задача, какъ извѣстно была рѣшена еще Паскалемъ, при помощи его знаменитаго шестиугольника. Рѣшеніе данное Гессе чисто синтетическое. Замѣтимъ здѣсь, что еще ранѣе Гессе, въ 1836 году, Штейнеръ предложилъ два рѣшенія этой задачи.

Многія интересныя свойства кривыхъ высшихъ порядковъ были изслѣдованы съ аналитической точки зрѣнія италіанскимъ математикомъ *Кремоной*, написавшимъ по этому предмету цѣлый рядъ сочиненій [3]. Дальнѣй-

---

Hrsg. v. Lindemann. Bd I—II, Leipzig, 1875—77, in-8. Существуетъ также французское изданіе этого капитальнаго сочиненія. Полное заглавіе его: Leçons sur la géométrie, par Alfred Clebsch, recueillies et complétées par F. Lindemann, traduites par A. Benoist. T. I. —Traité des sections coniques et introduction a la théorie des formes algébriques; T. II.— Courbes algébriques en général et courbes du troisième ordre; T. III. Intégrales abeliennes et connexes. Paris, 1879—80—83, in-8. Лекціи Клебша были изданы уже послѣ его смерти однимъ изъ его близкихъ друзей проф. Линдеманомъ. Въ составъ изданнаго курса Аналитической Геометріи вошли лекціи, читанныя Клебшемъ въ Геттингенскомъ университетѣ въ лѣтніе семестры 1871 и 1872 года и зимній семестръ 1871—72 г. Подробный обзоръ ученой дѣятельности Клебша помѣщенъ въ Mathem. Annal. B. VII, 1874 и Göttinger Nachr. 1872.

[1]) Изъ трудовъ Гессе болѣе извѣстны. *Hesse*, Vorlesungen über die Analytische Geometrie des Raums. Leipzig, 1861, in-8.—*Hesse*, Analytische Geometrie der geraden Linie, des Punkts und des Kreises in der Ebene, Leipzig, 1865, in-8. Кромѣ того онъ написалъ еще: „Vier Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie" (См. Zeitschrift für Mathem. und Physik, Jahrg. XI). „Sieben Vorlesungen aus der Analytischen Geometrie der Kegelschnitte" (См. Zeitsch. f. Math. und Physik, Jahrg XIX и Jahrg. XXI). Кромѣ того онъ написалъ до 50-ти мемуаровъ по Геометріи.

[2]) *Hesse*, Ueber die Construction der Oberfläche 2. Ordnung, von welchen beliebige 9 Punkte gegeben sind. См. Jour. Crell., Bd. XXIV, 1842, S. 36.

[3]) Главныя изъ его сочиненій: *Cremona*, Introduz. ad una theoria geometr. delle curve piane, Bologna, 1862 in-4.—Preliminari di una teoria geom. delle superficie (di 1 e 2 ord.). Bologna, 1867, in-4.

шимъ успѣхамъ Аналитической Геометріи также много способствовало введеніе въ изслѣдованіе *однородныхъ* и *трилинейныхъ* координатъ. На дальнѣйшее развитіе Геометріи также оказало не малое вліяніе примѣненіе при геометрическихъ изслѣдованіяхъ трансцендентныхъ функцій. Такое примѣненіе было сдѣлано съ особеннымъ успѣхомъ Клебшемъ въ 1863 году [1]).

На ряду съ синтетической Геометріей возникла еще новая отрасль Геометріи извѣстная подъ: именами: „мнимой", „воображаемой", „пангеометріи", „геометріи высшихъ измѣреній", „гипергеометріи" и т. п. Первыя основы этой новой отрасли геометрическаго изслѣдованія, были положены нашимъ соотечественникомъ *Николаемъ Ивановичемъ Лобачевскимъ* (1793—1856), занимавшимъ мѣсто профессора въ Казанскомъ университетѣ въ періодъ времени между 1816—1856 гг. Систему свою Лобачевскій изложилъ въ сочиненіи „Воображаемая Геометрія", напечатанномъ въ 1835 г.[2]). Одновременно съ Лобачевскимъ тѣми же вопросами занимались венгерскіе математики *Болеи, отецъ и сынъ* (1775—1856, 1802—1860). Изслѣдованія Болея-отца были напечатаны въ 1829 и 1851 гг., а Болея-сына въ 1833 г.[3]). Въ настоящее время „Мнимая Геометрія" и вообще обобщеніе различныхъ геометрическихъ вопросовъ, касающихся пространствъ болѣе трехъ измѣреній, занимаютъ многихъ геометровъ и составляетъ предметъ многочисленныхъ мемуаровъ и изслѣдованій, въ которыхъ трактуется о пространствахъ многихъ измѣреній. Основное свойство или положеніе въ геометріи Лобачевскаго состоитъ въ томъ, что сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ менѣе двухъ прямыхъ угловъ. Исходя изъ этого начала онъ доказываетъ много занимательныхъ предложеній. Изъ математиковъ настоящаго времени, занимающихся „Мнимой Геометріей", названной въ послѣднее время также „Неевклидовской", въ отличіе отъ геометріи Евклида, т. е. обыкновенной, входящей въ составъ гимназическаго курса, наиболѣе извѣстны

---

[1]) *Clebsch*, Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, См. Jour. Crell., Bd. LXIII, 1863, S. 53.

[2]) Напечатано въ ученыхъ запискахъ Казанскаго Универ. кн. 1, 1835 г., а также въ Journal Crelle, Bd. XVII, 1837. Кромѣ этого сочиненія онъ написалъ нѣсколько другихъ, относящихся къ тому же вопросу, изъ нихъ главное: Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles. Kazan, 1856, in-8. См. также полное собраніе сочиненій по геометріи Н. И. Лобачевскаго. Изданіе Императорскаго Казанскаго университета Т. I—II, Казань, 1883—86, in-4.

[3]) Интересное изслѣдованіе Болея-сына переведено на французскій языкъ Гуэлемъ подъ заглавіемъ: La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'axiome XI d'Euclide ect., par Jean Bolyai, Paris, 1868, in-8.

труды: *Бельтрами* [1]), *Клейна* [2]), *Риманна* (1826 1866) [3]), *Фришауфа* [4]), *Буняковскаго* [5]) и многихъ другихъ [6]). Далѣе геометры обобщили понятіе о пространствѣ трехъ измѣреній и стали разсматривать и изслѣдовать пространства четырехъ, пяти и вообще m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ измѣреній. Конкретное представленіе такихъ пространствъ недоступно нашему пониманію, съ геометрической точки зрѣнія, но съ аналитической вполнѣ возможны и подлежатъ математическимъ изслѣдованіямъ.

Выходя изъ предѣловъ нашего представленія при помощи Геометріи высшихъ измѣреній рѣшаются вопросы повидимому совершенно невозможные, лишенные здраваго смысла, какъ напр. выворачиваніе вполнѣ замкнутаго тѣла, въ родѣ шара, эллипсоида и т. под.; основывая свои разсужденія на аналогіи и исходя изъ свойствъ тѣлъ трехъ измѣреній многіе геометры, теоремы, имѣющія мѣсто въ нашемъ пространствѣ, обобщили и на пространства высшихъ измѣреній. Въ послѣднее время германскіе геометры *Рудель* [7]) и *Дюрежъ* [8]) изслѣдовали нѣкоторыя свойства тѣлъ болѣе трехъ измѣреній. Дюрежъ показалъ, что для тѣлъ въ пространствѣ четырехъ, пяти, шести и т. д. измѣреній, соотвѣтствующимъ нашимъ многогранникамъ также существуетъ теорема Эйлера, выражающая зависимость между сторонами, ребрами и углами многогранника Какъ частный случай изъ общей формулы для тѣла n измѣреній онъ выводитъ формулу Эйлера. Американскій математикъ *Нюкомбъ* [9]) рѣшилъ задачу о выворотѣ бочковидной фи-

---

[1]) *Beltrami*, Saggio di Interpretazione delle Geometria non Euclidea. Napoli, Giornale di Matematiche, Vol. VI, 1868.

[2]) *Klein*, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. См. Mathem. Annalen T. IV, 1871, T. VI, 1873; T. VII, 1874.

[3]) *Riemann*, Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zur Grunde liegen. Habilitationsschrift von 10 Juni 1854 Abhandlungen der Königl. Gesellsch. zu Göttigen, Bd. XIII.

[4]) *Frischauf*, Absolute Geometrie nach I. Bolyai. Leipzig, 1872, in-8. Elemente der Absoluten Geometrie. Leipzig, 1876, in-8.

[5]) *Bouniakoffsky*, Considerations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la Géométrie non-euclidienne См. Mémoires de l'Acad. de St. Petersb., Serie VII, T. XVIII, 1872.

[6]) Основныя начала „Неевклидовской Геометріи“ изложены нами въ сочиненіи „Начала Евклида“, Кіевъ, 1880, in-8. См. стр. 1 80.

[7]) *Rudel*, Vom Körper höheren Dimensionen. Beiträge zu den Elementen einer n—dimensionalen Geometrie. Kaiserslautern, 1882, in—8.

[8]) *Durège*, Ueber Körper von vier Dimensionen. Sitzb. der k. k. Akad. der Wissenschaften von Wien. Bd. LXXXIII, II Abth., Mai-Heft, Jahrg. 1881.

[9]) *Newcomb*, Note on a class of Transformations which Surfaces may undergo in Space of more than three dimensions. См. American Journal of Mathematic., T. I, pag. 1—4, 1878.

туры безъ разрыва или разрѣза частей. Въ послѣднее время извѣстный германскій математикъ *Бальцеръ* въ своей „Аналитической Геометріи“ [1]) также ввелъ нѣкоторыя обобщенія, основанныя на введеніе въ геометрическое изслѣдованіе пространства *m* измѣреній. Но замѣтимъ здѣсь, что выводы Дюрежа основаны только на аналогіи и на обобщеніи извѣстныхъ свойствъ, присущихъ только нашему пространству. Съ аналитической точки зрѣнія такое обобщеніе возможно, но съ геометрической—реальной, такія обобщенія представляютъ несообразность. Въ настоящее время вопросы эти, какъ мы уже замѣтили выше, занимаютъ многихъ геометровъ и представляютъ обширное поле для абстрактнаго мышленія человѣческаго ума.

---

[1]) *R. Baltzer*, Analytische Geometrie. Leipzig, 1882, in-8.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Аналитическая Геометрія двухъ измѣреній.

ГЛАВА I.

Методъ координатъ Декарта.

§ 1. Аналитическая Геометрія есть методъ съ помощью котораго каждая геометрическая задача облекается въ алгебраическую форму, а каждая кривая или поверхность выражается алгебраическимъ уравненіемъ. Такъ какъ геометрическія задачи относятся къ системѣ точекъ въ конечномъ или безконечномъ числѣ, въ этомъ послѣднемъ случаѣ точки образуютъ поверхность или кривую линію, то необходимо имѣть способъ съ помощью котораго возможно бы было выразить точку, на плоскости или въ пространствѣ, числами.

Методъ этотъ принадлежитъ Декарту; приложенный къ геометріи на плоскости онъ носитъ названіе: *Аналитической Геометріи двухъ измѣреній* или просто *плоской*, а приложеный къ геометріи въ пространствѣ носитъ названіе: *Аналитической Геометріи трехъ измѣреній.*

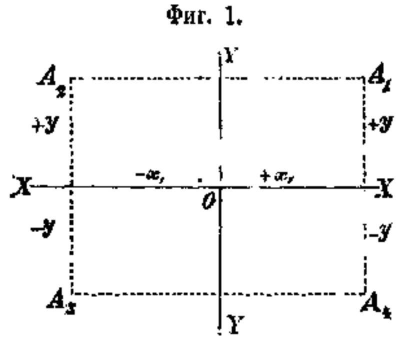
Замѣтимъ при этомъ, что Декартъ свой методъ приложилъ только къ плоской геометріи.

Методъ Декарта рѣзко отличался отъ всѣхъ методовъ до него употреблявшихся; онъ самъ о немъ говоритъ, что съ помощью его можно рѣшить всякую геометрическую задачу, то есть по извѣстнымъ опредѣленнымъ правиламъ можно найти алгебраическое выраженіе, которое соотвѣтствуетъ искомому результату.

§ 2. Въ чемъ-же состоитъ этотъ методъ? Методъ этотъ состоитъ въ томъ, что каждая точка на плоскости опредѣляется двумя числами слѣдующимъ образомъ:

Проводятъ на плоскости двѣ прямыя, для простоты, подъ прямымъ угломъ (фиг. 1), которыя называютъ: *координатными осями*, а точку ихъ пересѣченія—*началомъ координатъ*. Пусть такія прямыя будутъ XX и YY, точка ихъ пересѣченія или начало координатъ O.

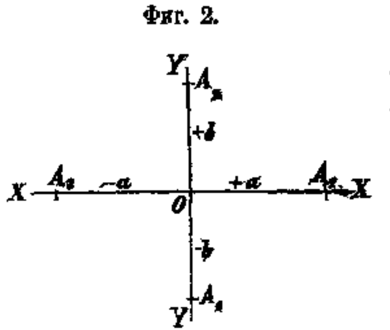
Фиг. 1.



Прямая XX называется *осью абсциссъ*, а прямая YY—*осью ординатъ*. Условимся теперь отсчитывать по оси абсциссъ XX отъ точки O вправо, по принятому масштабу, положительныя числа, которыя всегда будемъ означать $+x$, а влѣво отъ точки O, по той-же прямой, будемъ отсчитывать, по тому-же масштабу, отрицательныя числа $-x$. По оси ординатъ YY, начиная отъ начала O вверхъ, будемъ отсчитывать положительныя числа $+y$, а внизъ отрицательныя $-y$ по тому-же масштабу. Легко видѣть, что съ помощью этого условія, каждой точкѣ на плоскости принадлежатъ два числа, которыя получатся: одно на оси абсциссъ, а другое на оси ординатъ, если изъ взятой точки на плоскости опустимъ перпендикуляры на XX и YY. Таковы точки A_1, A_2, A_3, A_4, которымъ соотвѣтствуютъ числа: $+x$ и $+y$ для A_1, $-x$ и $+y$ для A_2, $-x$ и $-y$ для A_3 и наконецъ $+x$ и $-y$ для A_4. Обратно, каждымъ двумъ даннымъ числамъ, какъ абсцисса и ордината точки, соотвѣтствуютъ точки на плоскости, когда изъ точекъ соотвѣтствующихъ числамъ на ординатѣ и абсциссѣ возставимъ перпендикуляры; пересѣченіе этихъ перпендикуляровъ и будетъ соотвѣтствующая даннымъ числамъ точка на плоскости.

Точки соотвѣтствующія числамъ: $x=0$, $y=0$; $x=+a$, $y=0$; $x=0$, $y=+b$; $x=-a$, $y=0$; $x=0$, $y=-b$ суть (фиг. 2): начало координатъ O и точки A_1, A_2, A_3, A_4.

Фиг. 2.



Вмѣсто того, чтобы писать точки $x=a$, $y=b$ мы будемъ писать просто (a, b). Слѣдовательно значенія $(3, 5)$, $(-3, -5)$ и т. д. будутъ означать точки, коихъ абсциссы суть: $+3, -3, \ldots$, а ординаты $+5, -5, \ldots$

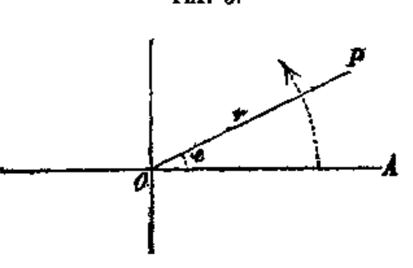
Мы взяли за координатныя оси двѣ перпендикулярныя прямыя, но можно взять и прямыя наклоненныя подъ произвольнымъ угломъ. Въ этомъ случаѣ, вмѣсто перпендикуляровъ, изъ точекъ на осяхъ, должно брать за координаты точки, линіи параллельныя координатнымъ осямъ.

Въ первомъ случаѣ говорятъ: *прямоугольная система координатъ*, а во второмъ—*косоугольная система координатъ*.

Замѣтимъ еще, что мы будемъ всегда обозначать координаты точки, которая можетъ принимать различныя положенія на плоскости, то есть описывать какую нибудь линію, черезъ (x, y), а координаты точекъ данныхъ, фиксированныхъ на плоскости, черезъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) и т. д. Первыя мы будемъ называть *перемѣнными*, а вторыя—*постоянными*.

§ 3. *Полярныя координаты.* Есть еще другой способъ опредѣлять положеніе точки на плоскости, именно: ея разстояніемъ отъ данной точки, принятой за начало, которую называютъ *полюсомъ* и угломъ который это разстояніе составляетъ съ данною прямою, проходящей черезъ полюсъ. Пусть данная точка—полюсъ—будетъ O (фиг. 3), данная прямая OA.

Фиг. 3.



Положеніе точки P опредѣляется разстояніемъ $OP = r$, которое называется *радіусомъ векторомъ*, и угломъ $POA = \varphi$. Радіусу r даютъ опредѣленный знакъ, а уголъ φ измѣняютъ отъ 0^0 до 360^0, чтобы каждой точкѣ на плоскости принадлежала единственная пара координатъ (r, φ). Такая система координатъ называется *полярной*. Условились углы отсчитываемые отъ AO по направленію стрѣлки принимать за положительные, а отсчитываемые отъ AO въ противуположномъ направленіи за отрицательные. Углы отъ AO въ обѣ стороны могутъ возрастать отъ 0 до $+\infty$ или $-\infty$.

§ 4. Рѣшимъ, съ помощью метода координатъ, нѣкоторыя простыя задачи, которыя намъ будутъ необходимы впослѣдствіи.

Фиг. 4.

Задача 1. Найти выраженіе для разстоянія точекъ A_1 и A_2, коихъ координаты, отнесенныя къ прямоугольнымъ осямъ, суть: (x_1, y_1), (x_2, y_2)?

Рѣшеніе. Пусть данныя оси XX и YY (фиг. 4), данныя точки A_1 и A_2, коихъ координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Проведемъ прямую A_1D параллельно абсциссѣ.

Изъ прямоугольнаго треугольника A_1A_2D мы имѣемъ:

$$\overline{A_1A_2}^2 = \overline{A_1D}^2 + \overline{A_2D}^2$$

но:

$$A_1A_2 = r \quad , \quad A_1D = OG - OE \quad , \quad A_2D = A_2G - GD = A_2G - A_1E$$

$$OE = x_1 \quad , \quad OG = x_2 \quad , \quad A_1E = y_1 \quad , \quad A_2G = y_2$$

подставляя, найдемъ:

$$A_1D=(x_2-x_1)\quad,\quad A_2D=(y_2-y_1)$$

откуда:

$$r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \tag{1}$$

Извлекая корень квадратный, найдемъ:

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Если въ уравненіи (1) отбросимъ у x_1 и y_1 значки, то есть сдѣлаемъ ихъ неопредѣленными, то уравненіе (1) приметъ слѣдующій видъ:

$$r^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$$

изъ котораго видно, что точка, координаты которой (x, y), лежитъ на окружности круга, коего радіусъ r, а слѣдовательно уравненіе выражаетъ окружность.

Если точка A_2 будетъ лежать въ началѣ координатъ, то $x_2=0$ и $y_2=0$. Слѣдовательно уравненіе (1) приметъ видъ:

$$r^2=x_1^2+y_1^2 \quad \text{или} \quad r=\sqrt{x_1^2+y_1^2} \tag{2}$$

и выражаетъ разстояніе точки (x_1, y_1), находящейся на окружности круга радіуса r, отъ начала координатъ, въ которомъ лежитъ центръ круга.

Если оси будутъ косоугольныя и уголъ между ними будетъ ω, то легко видѣть, что:

$$r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega \tag{3}$$

откуда:

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\omega}$$

Въ предъидущихъ выраженіяхъ радикалу нужно дать положительный знакъ, такъ какъ дѣло идетъ объ абсолютной величинѣ разстоянія. Если въ уравненіи (3) отбросимъ у x_1 и y_1 значки, то получимъ уравненіе круга, отнесеннаго къ косоугольной системѣ координатъ.

Фиг. 5.

Задача 2. Даны двѣ точки на плоскости: $(x_1 . y_1)$ и (x_2, y_2), найти на прямой, соединяющей эти двѣ точки, координаты точки, которая дѣлитъ разстояніе между данными точками въ данномъ отношеніи $\frac{m}{n}$?

Рѣшеніе. Пусть данныя точки будутъ A_1 и A_2 (фиг. 5), ихъ коор-

динаты (x_1, y_1), (x_2, y_2); искомая точка пусть будетъ A, ея координаты (x, y).

Проводя черезъ точки A и A_1 линіи AB и A_1D параллельныя къ оси OX, черезъ точку A, прямую AF параллельную оси OY, мы найдемъ:

$$\frac{A_1A}{AA_2}=\frac{A_1C}{CD}=\frac{m}{n}$$

но:

$$A_1C=EF=OF-OE=x-x_1$$

и

$$CD=FG=OG-OF=x_2-x$$

подставляя эти выраженія въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}$$

откуда имѣемъ:

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{n+m}$$

Такъ какъ между x и y нѣтъ разницы относительно координатныхъ осей, то можно прямо написать и выраженіе для y, оно будетъ:

$$y=\frac{ny_1+my_2}{n+m}$$

Сокращая предъидущія выраженія для x и y на n и означая отношеніе $\frac{m}{n}$ черезъ λ, найдемъ:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\quad,\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \tag{4}$$

Если искомая точка должна дѣлить внѣшнее разстояніе между данными точками въ томъ же отношеніи $\frac{m}{n}=\lambda$, то процессъ подобный предъидущему приведетъ къ формуламъ:

$$x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}\quad,\quad y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda} \tag{5}$$

Изъ этихъ двухъ выраженій для x и y видимъ, что для точекъ, лежащихъ между точками A_1 и A_2, отношеніе $\frac{m}{n}$ или λ есть величина положитель-

ная, а для точекъ лежащихъ внѣ A_1 и A_2, это отношеніе есть величина отрицательная.

Замѣтимъ, что уравненія (4) и (5) имѣютъ мѣсто и при косоугольной системѣ координатъ, такъ какъ подобіе треугольниковъ A_1AC и A_1A_2D независитъ отъ наклоненія осей.

Давая въ формулахъ (4) величинѣ λ всѣ возможныя значенія, мы получимъ координаты всѣхъ точекъ, лежащихъ на прямой, проходящей черезъ точки A_1 и A_2, коихъ координаты суть: (x_1, y_1), (x_2, y_2). Изъ всѣхъ значеній λ отъ $-\infty$ до $+\infty$ единственное $\lambda = -1$ дѣлаетъ координаты x и y равными безконечности, а это показываетъ, что прямая имѣетъ одну только точку лежащую на безконечности Между тѣмъ по формѣ прямой казалось-бы, что на прямой есть двѣ безконечно удаленныя точки—одна въ одномъ направленіи, а другая въ противуположномъ [1].

Пр. 1. Найти разстояніе между точками: (—3, 4) и (5, —6)?

Отв. $2\sqrt{41}$.

Пр. 2. Найти длину сторонъ треугольника, коего вершины суть: (2, 3); (4, —5); (—3, —6)?

Отв. $\sqrt{68}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{106}$.

Пр. 3. Найти координаты точки, дѣлящей пополамъ разстояніе между точками: (x_1, y_1), (x_2, y_2)?

Отв. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Пр. 4. Найти координаты срединъ сторонъ треугольника, коего вершины суть: (2, 3); (4, —5); (—3, —6)?

Отв. $(3, -1)$; $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Пр. 5. Найти координаты точки, лежащей на одной трети разстоянія между точками (2, 3), (4, —5) ближе къ первой?

Отв. $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

Пр. 6. Координаты вершинъ треугольника суть: (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3), найти координаты точки, лежащей на одной трети прямой, соединяющей вершину треугольника съ срединой противуположной стороны, считая треть отъ этой стороны?

Отв. $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

---

[1]) Это заключеніе можно вывесть изъ опредѣленія прямой: что прямая есть такая линія, которая вполнѣ опредѣляется двумя точками. Такъ какъ принимается что двѣ параллельныя прямыя линіи пересѣкаются на безконечности, то, имѣя на безконечности двѣ общія точки, онѣ бы совмѣстились.

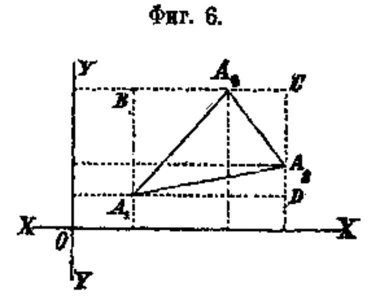
Такъ какъ въ эти выраженія координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) входятъ одинаково, то изъ этого заключаемъ, что три такія прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 7. Какая нибудь изъ сторонъ треугольника раздѣлена въ отношеніи $m:n$, а линія, соединяющая эту точку съ противулежащей вершиной, раздѣлена въ отношеніи $(m+n):l$, найти координаты этой послѣдней точки?

Отв. $x = \frac{lx_1 + mx_2 + nx_3}{l+m+n}$, $y = \frac{ly_1 + my_2 + ny_3}{l+m+n}$.

§ 5. *Задача.* По даннымъ координатамъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) вершинъ треугольника, найти его площадь?

Фиг. 6.



Рѣшеніе. Пусть координатныя оси будутъ XX и YY (фиг. 6), начало O и треугольникъ $A_1 A_2 A_3$.

Площадь прямоугольника $A_1 BCD$, очевидно, равна произведенію: $(x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$; если отъ этой площади отнимемъ площади трехъ треугольниковъ $A_1 BA_2$, $A_2 CA_3$, $A_1 DA_3$, коихъ площади суть:

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \quad , \quad \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) \quad , \quad \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)$$

то получимъ искомую площадь:

$$\Delta = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 - y_3) -$$

$$- \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1)$$

откуда имѣемъ:

$$2\Delta = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

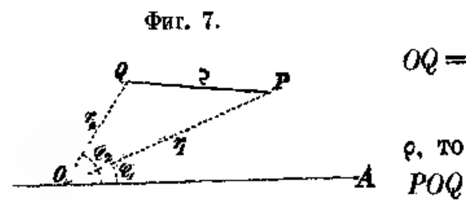
Выраженіе, которое можно изобразить въ видѣ опредѣлителя:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta = 0$, то это будетъ условіе, что три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежатъ на одной прямой линіи.

§ 6. *Задача.* Найти разстояніе между двумя точками, коихъ полярныя координаты суть: (r_1, φ_1), (r_2, φ_2)?

Фиг. 7.



Рѣшеніе. Пусть (фиг. 7) $OP = r_1$, $OQ = r_2$ и углы $AOP = \varphi_1$, а $AOQ = \varphi_2$.

Если разстояніе PQ означимъ черезъ ρ, то легко видѣть, замѣтивъ, что уголъ $POQ = \varphi_2 - \varphi_1$, что:

$$\rho^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

ГЛАВА II.

Алгебраическое представленіе геометрическихъ мѣстъ.

§ 7. Какая бы нибыла выбрана система координатъ всегда необходимо имѣть двѣ величины для опредѣленія положенія точки на плоскости, то есть необходимо имѣть два условія или уравненія. Если-же будетъ дана одна только изъ этихъ величинъ или одно условіе, то существуетъ безконечное число точекъ на плоскости, которыхъ положеніе будетъ удовлетворять данному условію. Совокупность такихъ точекъ представляетъ *кривую линію* или *геометрическое мѣсто.*

Для поясненія сказаннаго возьмемъ нѣсколько примѣровъ:

Пр. 1. Пусть будетъ дано одно условіе $x = a$. Координата y остается неопредѣленною.

Если черезъ точку, лежащую на оси X на разстояніи a отъ начала координатъ, проведемъ прямую параллельную оси Y, то всѣ точки этой прямой будутъ удовлетворять уравненію:

$$x = a$$

такъ какъ всѣ онѣ находятся на разстояніи a отъ оси Y. Слѣдовательно проведенная прямая есть геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на разстояніи a отъ оси Y, коего алгебраическое представленіе есть уравненіе $x = a$. Очевидно, что уравненіе $y = b$, представляетъ прямую параллельную оси X, проведенную на разстояніи b отъ оси X.

Совокупность этихъ уравненій даетъ точку, коей координаты суть (a, b). Слѣдовательно въ Декартовой системѣ координатъ положеніе точки

на плоскости опредѣляется пересѣченіемъ двухъ простѣйшихъ геометрическихъ мѣстъ.

Легко видѣть, что въ отдѣльности, каждое изъ уравненій:

$$x=0 \quad , \quad y=0$$

представляетъ первое ось Y, а второе ось X, а въ совокупности—начало координатъ.

Пр. 2. Возьмемъ направленіе φ за постоянное, а разстояніе r оставимъ неопредѣленнымъ, очевидно, что всѣ точки лежащія на прямой, проходящей черезъ начало и составляющей уголъ φ съ осью X будутъ удовлетворять этому условію, т. е. координаты всѣхъ точекъ этой прямой будутъ удовлетворять уравненіе:

$$y=x\,\mathrm{tg}(\varphi)$$

слѣдовательно это уравненіе будетъ алгебраическое представленіе этой прямой.

Напротивъ, если оставимъ r постояннымъ, а уголъ φ будемъ измѣнять или оставимъ неопредѣленнымъ, то точки, коихъ координаты будутъ удовлетворять этимъ условіямъ, будутъ находится на окружности круга, коего центръ находится въ полюсѣ, а радіусъ равенъ постоянной величинѣ r. Слѣдовательно уравненіе:

$$x^2+y^2=r^2$$

будетъ алгебраическое представленіе окружности круга, коего радіусъ есть r, т. е. всѣ точки, коихъ координаты удовлетворяютъ предъидущему уравненію, будутъ лежать на этой окружности.

§ 8. Идея геометрическаго мѣста, о которомъ предъидущіе примѣры даютъ первое понятіе, есть основная въ Аналитической Геометріи, предметъ которой и составляетъ изслѣдованіе свойствъ такихъ мѣстъ или кривыхъ линій.

Одно условіе или уравненіе между координатами (x, y) или (r, φ):

$$F(x,y)=0 \quad \text{или} \quad \Phi(r,\varphi)=0$$

представляетъ кривую или геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ, прямоугольныя или полярныя, удовлетворяютъ предъидущимъ уравненіямъ. Эти уравненія выражаютъ геометрическое свойство, общее всѣмъ точкамъ кривой. Чтобы построить такую кривую надобно рѣшить предъидущія уравненія относительно y или x. Изъ перваго будемъ имѣть:

$$y=f(x) \qquad (1)$$

Давая произвольныя значенія x, начиная, напримѣръ, съ 0, 1, 2,....., —1, —2, —3,..... мы изъ уравненія (1) будемъ получать величины для y, соотвѣтственно одно или нѣсколько, смотря по характеру уравненія. Напримѣръ абсциссѣ OA (фиг. 8) будутъ соотвѣтствовать три ординаты AC, AD и AB, изъ коихъ послѣдняя отрицательная.

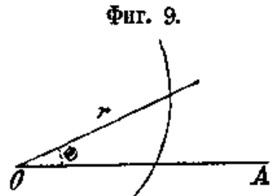
Фиг. 8.

Тоже самое можно сказать и объ уравненіи $\Phi(r, \varphi)$, которое рѣшивъ, получимъ:

$$r = \psi(\varphi)$$

Давая всѣ возможныя значенія углу φ (фиг. 9) получимъ соотвѣтственныя значенія для r.

Фиг. 9.



Такимъ образомъ кривая будетъ построена, хотя въ общихъ чертахъ.

Обратно, если будетъ дано геометрическое свойство кривой, общее для всѣхъ ея точекъ, то выразивъ это свойство уравненіемъ между координатами, произвольно выбранными на плоскости, найдемъ уравненіе, которое и будетъ алгебраическое представленіе кривой, опредѣленной даннымъ свойствомъ. Кругъ, напримѣръ, опредѣляется общимъ свойствомъ всѣхъ его точекъ: что онѣ находятся въ равномъ разстояніи отъ центра, или что хорда есть средне-пропорціональная величина между цѣлымъ діаметромъ и прилежащимъ отрѣзкомъ. Первое свойство даетъ уравненіе круга:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{2}$$

если начало координатъ находится въ центрѣ его, а второе даетъ уравненіе:

$$x^2 + y^2 = 2rx \tag{3}$$

если начало координатъ помѣстить на окружности, діаметръ проведенный черезъ начало взять за ось абсциссъ, а касательную къ окружности, черезъ начало,—за ось ординатъ.

Изъ этого мы видимъ, что извѣстное свойство, принадлежащее всѣмъ точкамъ кривой, даетъ ея уравненіе или-же алгебраическое представленіе; обратно, каждое алгебраическое уравненіе между координатами x, y или r, φ выражаетъ геометрическое свойство кривой, принадлежащее всѣмъ ея точкамъ. Все здѣсь сказанное вкратцѣ будетъ выяснено ниже.

§ 9. Мы ограничимся изученіемъ *алгебраическихъ* кривыхъ, т. е. такихъ, которыя выражаются алгебраическими уравненіями и преимущест-

венно кривыми выражаемыми уравненіями первой и второй степеней; эти кривыя извѣстны въ анализѣ подъ именемъ *коническихъ сѣченій.*

Всѣ кривыя, которыя не могутъ быть выражены алгебраическими уравненіями, называются *трансцендентными*, таковы:

$$y=\sin x \quad , \quad y=e^{x} \quad , \quad y=\operatorname{tg} x \quad \text{и т. д.}$$

Какъ ни любопытны свойства трансцендентныхъ кривыхъ, но ихъ свойство, при настоящемъ состояніи анализа, не могутъ быть обстоятельно изслѣдованы и относятся къ анализу трансцендентныхъ функцій.

§ 10. Алгебраическія кривыя раздѣляются по порядкамъ; порядкомъ кривой называютъ степень x или y или того и другаго вмѣстѣ въ уравненіи. Чтобы опредѣлить порядокъ кривой надобно привести ея уравненіе въ такую форму, въ которой оно заключаетъ только цѣлыя и положительныя степени перемѣнныхъ x и y. Напримѣръ уравненіе круга:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

будучи приведено къ формѣ:

$$r^2=x^2+y^2$$

показываетъ, что окружность есть кривая втораго порядка. Уравненіе

$$y=x\operatorname{tg}\varphi$$

показываетъ, что прямая линія перваго порядка.

§ 11. Пояснимъ все выше сказанное примѣрами и выберемъ тѣ изъ нихъ, которые будутъ составлять главный предметъ изслѣдованій настоящаго курса—*коническія сѣченія*; покажемъ самыя замѣчательныя ихъ свойства, а затѣмъ выведемъ уравненія, найболѣе выдающихся, по своимъ свойствамъ, или историческому значенію, кривыхъ выше втораго порядка.

§ 12. *Прямая линія.* Мы выше видѣли, что какая нибудь линія, проходящая черезъ двѣ данныя точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), дѣлится, какою нибудь, точкою, лежащей на ней, въ нѣкоторомъ отношеніи λ и что координаты такой точки выражаются черезъ λ, x_1, x_2, y_1, y_2 слѣдующими уравненіями:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

давая всѣ возможныя значенія λ, точка (x, y) будетъ скользить по прямой, проходящей черезъ точки (x_1, y_1), (x_2, y_2). Слѣдовательно если, между предъидущими уравненіями исключимъ λ, то получимъ уравненіе между координатами точки, скользящей по прямой. Это уравненіе и будетъ алгебраи-

ческое представленіе прямой, положеніе которой вполнѣ опредѣляется точками (x_1, y_1), (x_2, y_2). Уравненіе это будетъ:

$$\frac{x-x_1}{x-x_2} = \frac{y-y_1}{y-y_2} \qquad (4)$$

или:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \qquad (5)$$

Легко видѣть (фиг. 10), что:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \operatorname{tg}\varphi$$

если φ есть уголъ, который данная прямая составляетъ съ осью абсциссъ. Слѣдовательно уравненіе (5) можно написать въ слѣдующихъ формахъ:

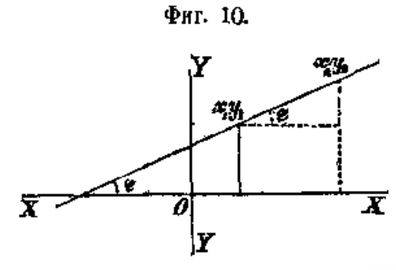
$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \operatorname{tg}\varphi \qquad (6)$$

или:

$$(y-y_1)\cos\varphi - (x-x_1)\sin\varphi = 0 \qquad (7)$$

Нѣкоторые авторы выводятъ уравненіе прямой изъ нѣкоторыхъ ея геометрическихъ свойствъ; мы находимъ, что лучше выводить уравненіе прямой изъ ея геометрическаго опредѣленія: что прямою мы называемъ ту линію, которая вполнѣ опредѣляется двумя данными точками.

Фиг. 10.



Клебшъ, напримѣръ, выводитъ уравненіе прямой изъ выраженія для площади треугольника, коего вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) даны (§ 5):

$$2\triangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Если третяя точка (x_3, y_3) будетъ скользить по прямой, соединяющей точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), то площадь такого треугольника будетъ всегда равна нулю. Слѣдовательно, обозначая координаты скользящей точки черезъ x, y найдемъ уравненіе прямой въ формѣ опредѣлителя:

$$2\triangle = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Это уравненіе тождественно съ уравненіемъ (5), такъ какъ оно есть алгебраическое представленіе опредѣленія прямой линіи двумя точками.

Гессе опредѣляетъ прямую линію, какъ геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ точекъ.

§ 13. *Эллипсъ.* Даны двѣ точки, найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ сумма разстояній отъ данныхъ точекъ была бы величина постоянная?

Координатныя оси могутъ быть взяты произвольно на плоскости, но задача упрощается, если онѣ будутъ выбраны симметрично, относительно данныхъ точекъ.

Для этого соединимъ данныя двѣ точки прямою (фиг. 11), раздѣлимъ это разстояніе пополамъ и означимъ его черезъ $2c$, изъ точки дѣленія возставимъ перпендикуляръ и возьмемъ эти двѣ прямыя за координатныя оси: линію, соединяющую данныя точки 1, 2, за ось абсциссъ X, а перпендикуляръ, возставленный изъ середины ея, за ось ординатъ Y. Означимъ постоянную сумму разстояній черезъ $2a$.

Фиг. 11.

По условію задачи сумма разстояній r_1 и r_2, какой нибудь, точки (x, y) на кривой, отъ данныхъ точекъ 1 и 2 равна $2a$, т. е. мы имѣемъ:

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{8}$$

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ $2MA$ и $1MA$ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} r^2_1 &= y^2 + (x+c)^2 \\ r^2_2 &= y^2 + (x-c)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

вычитая, найдемъ:

$$r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a} \tag{10}$$

имѣя сумму и разность двухъ количествъ r_1 и r_2, найдемъ каждое изъ нихъ:

$$r_1 = a + \frac{cx}{a} \quad , \quad r_2 = a - \frac{cx}{a}$$

Подставляя выраженіе для r_1 въ первое изъ уравненій (9), найдемъ:

$$\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = y^2 + (x+c)^2$$

откуда, полагая $a^2 - c^2 = b^2$, а такое положеніе мы въ правѣ сдѣлать, такъ какъ изъ $\triangle(12M)$ мы имѣемъ $2a > 2c$ и $a > c$, слѣдовательно $a^2 - c^2$ есть величина положительная. Послѣ всѣхъ приведеній, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что x не можетъ быть больше a, а y не можетъ быть больше b, слѣдовательно вся кривая заключена въ прямоугольникѣ, котораго стороны суть $2a$ и $2b$.

Такъ какъ x всегда меньше a, то можно положить:

$$x = a\cos\varphi \quad , \quad y = b\sin\varphi \tag{12}$$

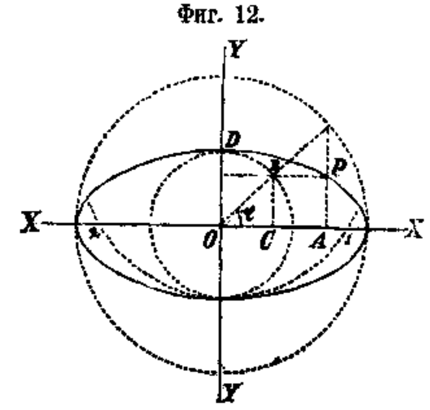
эти величины будучи подставлены въ уравненіе (11) удовлетворяютъ ему, такъ какъ это подстановленіе даетъ:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

Давая въ уравненіяхъ (12) углу φ всѣ значенія отъ 0 до 2π получимъ координаты всѣхъ точекъ кривой.

Способъ выражать координаты точекъ кривой съ помощью третьяго перемѣннаго—*параметра*, тождественъ съ уравненіемъ кривой, которое получится, исключая этотъ параметръ, какъ мы уже сдѣлали относительно прямой, гдѣ для полученія уравненія прямой исключили перемѣнный параметръ λ.

Фиг. 12.



Изъ выраженій (12) легко видѣть форму эллипса и построить сколько угодно его точекъ. Для этого около начала координатъ (фиг. 12), какъ центра, опишемъ два круга одинъ радіусомъ a, а другой радіусомъ b.

Черезъ начало проведемъ, какую нибудь, прямую, составляющую уголъ φ съ осью абсциссъ. Легко видѣть, что:

$$OA = x = a\cos\varphi \quad , \quad Bc = AP = y = b\sin\varphi$$

Слѣдовательно точка P находится на эллипсѣ. Если $\varphi = 0$, то $x = a$, т. е. эллипсъ встрѣчаетъ ось X на разстояніи a отъ начала координатъ, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $y = b$, т. е. эллипсъ встрѣчаетъ ось Y на разстояніи

b отъ начала координатъ. Легко видѣть, что эллипсъ встрѣчаетъ ось X еще на разстояніи $-a$, а ось Y на разстояніи $-b$ отъ начала координатъ и слѣдовательно состоитъ изъ четырехъ тождественныхъ четвертей. Если $a > b$, то a называютъ *большою*, а b *малою* осью эллипса. Данныя точки 1, 2 на оси X, лежащія на разстояніяхъ $+c$ и $-c$ отъ начала, называютъ *фокусами* эллипса; ихъ легко построить, зная, что:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Въ самомъ дѣлѣ, если изъ точки D (фиг. 12), какъ изъ центра радіусомъ a, опишемъ кругъ, то кругъ этотъ пересѣчетъ ось X, очевидно, въ точкахъ 1 и 2, т. е. въ фокусахъ. Разстояніе c называютъ *эксцентриситетомъ*. Если $c = 0$, то $a = b$ и эллипсъ обращается въ кругъ:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

слѣдовательно кругъ есть частный случай эллипса.

§ 14. *Гипербола.* Даны двѣ точки, найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разность разстояній отъ данныхъ точекъ есть величина постоянная?

Если означимъ разстояніе данныхъ точекъ черезъ $2c$, а разность разстояній, какой нибудь, точки на кривой отъ данныхъ точекъ черезъ $2a$ и помѣстимъ координаты, какъ въ эллипсѣ, то замѣчая, что:

$$r_1 - r_2 = 2a$$

мы легко найдемъ, какъ выше, для эллипса, уравненіе искомой кривой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

если положимъ

$$c^2 = a^2 + b^2$$

a и b называются осями кривой, какъ въ эллипсѣ.

Изъ уравненія (13) мы видимъ, что x не можетъ быть меньше a, а y можетъ возрастать неопредѣленно. Легко видѣть, что между параллельными оси Y, проведенными на разстояніи $+a$ и $-a$ отъ начала координатъ, нѣтъ ни одной точки, принадлежащей кривой; въ остальной части плоскости x и y не имѣютъ предѣловъ; онѣ могутъ возрастать до безконечности, слѣдовательно гипербола есть кривая, простирающая свои вѣтви въ безконечность.

Фиг. 13.

Чтобы ближе видѣть форму кривой, проведемъ прямую черезъ начало координатъ подъ угломъ φ къ оси X (фиг. 13) и розыщемъ точки кривой, лежащія на этой прямой.

Означимъ черезъ r разстояніе такой точки отъ начала координатъ и положимъ:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе кривой (13), найдемъ:

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}} \tag{14}$$

Слѣдовательно на каждомъ радіусѣ находятся двѣ точки кривой, такъ какъ r опредѣляется изъ уравненія второй степени. Если, начиная съ нуля, мы будемъ увеличивать уголъ φ, то членъ $\frac{\cos^2\varphi}{a^2}$ уменьшается, а $\frac{\sin^2\varphi}{b^2}$ увеличивается, т. е. r возрастаетъ непрерывно, начиная съ a, и при:

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} = \frac{\sin^2\varphi}{b^2} \tag{15}$$

дѣлается безконечностью; для величинъ угла φ большихъ, знаменатель въ уравненіи (14) дѣлается отрицательнымъ, а r мнимымъ. Если означимъ черезъ α уголъ удовлетворяющій уравненію (15) и дающій направленіе безконечно-удаленной точки на кривой, то будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{b}{a}$$

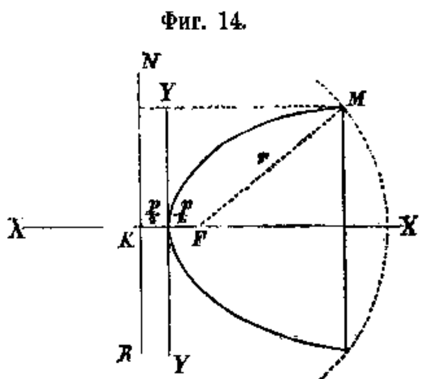
Слѣдовательно есть два направленія, симметрично расположенныхъ относительно координатныхъ осей, къ которымъ кривая приближается неопредѣленно, но никогда ихъ не встрѣчаетъ. Эти двѣ прямыя называются *ассимптотами* кривой.

Данныя двѣ точки, какъ и въ эллипсѣ, называются *фокусами* и связь ихъ съ осями дается уравненіемъ:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

съ помощью котораго ихъ легко построить.

Фиг. 14.



§ 15. *Парабола.* Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ данной точки и данной прямой?

Пусть данная прямая будетъ NR (фиг. 14), данная точка F. Изъ точки F опускаемъ перпендикуляръ на данную прямую и возьмемъ его за ось абсциссъ. Разстояніе $FK = p$ дѣлимъ пополамъ, изъ точки дѣленія возставимъ

перпендикуляръ YY къ оси абсциссъ и возьмемъ его за ось ординатъ, пусть M будетъ точка на кривой, тогда будемъ имѣть:

$$y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

откуда, раскрывая скобки и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$y^2=2px$$

Это опять кривая втораго порядка—*парабола*, коей уравненіе не заключаетъ второй степени величины x.

Форма уравненія показываетъ, что кривая проходитъ черезъ начало координатъ и вся лежитъ съ положительной стороны оси X, т. е. x не можетъ быть отрицательной величиной, такъ какъ, въ этомъ случаѣ y дѣлается мнимымъ. Легко также видѣть, что вѣтвь параболы безконечна и осью X дѣлится на двѣ совершенно тождественныя части: одна съ положительными ординатами $+y$, а другая съ отрицательными $-y$.

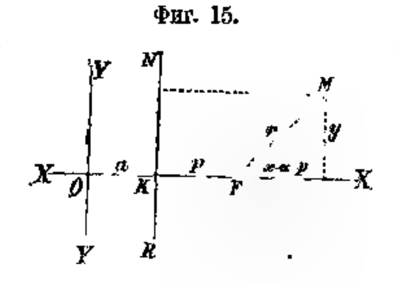
Законъ образованія параболы даетъ легкій способъ построить сколько угодно ея точекъ. Для этого около данной точки F (фиг. 14), какъ центра, описываютъ кругъ, произвольнымъ радіусомъ r; на разстояніи r отъ данной прямой (директрисы) по оси X возставляютъ къ этой послѣдней перпендикуляръ, который встрѣчаетъ описанный кругъ въ двухъ точкахъ, принадлежащихъ параболѣ: одна съ положительной ординатой, другая съ отрицательной.

§ 16. Уравненія эллипса, гиперболы и параболы могутъ быть выведены еще изъ слѣдующей задачи:

Найти геометрическое мѣсто точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ данной прямой и отъ данной точки было-бы постоянное?

Возьмемъ перпендикуляръ FK, опущенный изъ данной точки на данную прямую NR, за ось X (фиг. 15), означимъ черезъ p разстояніе данной точки отъ данной прямой, возьмемъ на оси X произвольную точку O, на разстояніи α отъ данной прямой NR, за начало координатъ, и пусть наконецъ λ будетъ данное отношеніе.

Фиг. 15.



Легко видѣть, что уравненіе искомаго геометрическаго мѣста будетъ:

$$r^2=y^2+(x-\alpha-p)^2=\lambda^2(x-\alpha)^2$$

или:

$$y^2+(x-\alpha-p)^2-\lambda^2(x-\alpha)^2=0$$

откуда имѣемъ:

$$(\lambda^2-1)x^2-2\{(\lambda^2-1)\alpha-p\}x+\lambda^2\alpha^2-(p+\alpha)^2+y^2=0 \tag{16}$$

такъ какъ α есть величина произвольная, то можно положить для упрощенія уравненія:

$$\alpha=\frac{p}{\lambda^2-1}$$

вслѣдствіи чего предъидущее уравненіе сдѣлается:

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2p^2}{(1-\lambda^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{\lambda^2p^2}{1-\lambda^2}}=1$$

Очевидно, что это уравненіе будетъ эллипсъ, если $\lambda<1$, и гипербола, если $\lambda>1$. Изъ этого слѣдуетъ, что если даны точка и прямая и если другая точка скользитъ по плоскости такъ, что отношеніе разстоянія ея отъ данной точки къ разстоянію отъ данной прямой, есть величина постоянная, то точка опишетъ эллипсъ, если она постоянно будетъ ближе къ данной точкѣ, и опишетъ гиперболу, если она постоянно ближе къ данной прямой.

Мы здѣсь имѣемъ нѣкоторую точку и прямую, которыя тѣсно связаны съ двумя кривыми, эллипсомъ и гиперболой. Простое вычисленіе покажетъ, что данная точка есть одинъ изъ фокусовъ, съ которыми мы уже познакомились выше. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $\lambda<1$—это эллипсъ. Квадраты осей эллипса будутъ:

$$a^2=\frac{\lambda^2p^2}{(1-\lambda^2)^2}\quad,\quad b^2=\frac{\lambda^2p^2}{1-\lambda^2}$$

откуда:

$$c^2=a^2-b^2=\frac{\lambda^4p^2}{(1-\lambda^2)^2}\qquad\text{или}\qquad c=\frac{\lambda^2p}{1-\lambda^2}$$

Но растояніе данной точки отъ начала есть:

$$p+\alpha=\frac{\lambda^2p}{1-\lambda^2}=c$$

а это есть разстояніе фокуса отъ начала, слѣдовательно эти двѣ точки тождественны.

Есть еще другая прямая, которая играетъ туже роль относительно другаго фокуса, что требуетъ симметрія кривой относительно оси Y. Эти двѣ прямыя называются *директрисами* эллипса. Выраженіе разстоянія

директрисы отъ центра эллипса, или начала координатъ, даетъ способъ построить эту прямую. Въ самомъ дѣлѣ:

$$cp = b^2$$

слѣдовательно разстояніе:

$$f = c + p$$

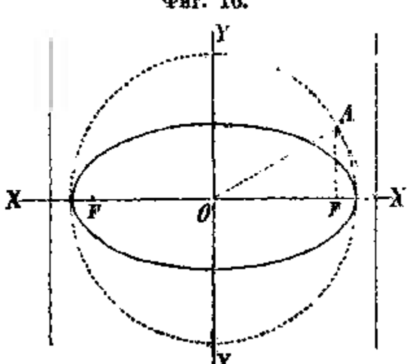
даетъ:

$$f = c + p = \frac{b^2 + c^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

т. е. *большая полуось есть средне-пропорціональная между разстояніемъ директрисы отъ начала и эксцентриситетомъ эллипса.*

Съ помощью этого свойства легко построить директрису, слѣдующимъ образомъ. Изъ центра эллипса O радіусомъ a описываютъ кругъ (фиг. 16), изъ фокуса F возставляютъ перпендикуляръ къ оси X и продолжаютъ его до пересѣченія съ окружностью; точку пересѣченія A соединяютъ съ центромъ и изъ той-же точки A возставляютъ перпендикуляръ къ проведенному радіусу; пересѣченіе этого перпендикуляра съ осью X даетъ точку, изъ которой возставленный къ оси X перпендикуляръ и будетъ искомой директриссой.

Фиг. 16.



Вторая директриса будетъ параллельна первой, на такомъ же разстояніи отъ центра съ другой стороны оси X. Слѣдовательно эллипсъ весь лежитъ между директрисами.

§ 17. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда $\lambda = 1$, т. е. когда скользящая точка находится всегда въ равномъ разстояніи отъ данной точки (фокуса) и отъ данной прямой (директрисы). Въ этомъ случаѣ уравненіе (16) § 16 сдѣлается:

$$y^2 - 2px + p(p + 2\alpha) = 0$$

Если положимъ $\alpha = -\frac{p}{2}$, то будемъ имѣть:

$$y^2 = 2px$$

а это, какъ мы выше видѣли, есть уравненіе параболы.

Изъ предъидущаго видимъ, что уравненія: эллипса, гиперболы, параболы и круга, какъ частный случай эллипса, всѣ втораго порядка; ниже увидимъ, что самое общее уравненіе между координатами x и y втораго

порядка будетъ алгебраически представлять одну изъ этихъ трехъ замѣчательныхъ кривыхъ, названныхъ древними *тріадой Менэхма*, которому приписываютъ ихъ открытіе. Формы уравненій, полученныя нами для этихъ кривыхъ, самыя простыя, поэтому онѣ называются *каноническими*.

§ 18. Уже въ V-омъ в. до Р. Х. греческихъ геометровъ занимали три задачи: квадратура круга, трисекція угла и удвоеніе куба или Делійская задача, которыя они старались рѣшить съ помощью линейки и круга; послѣдняя задача была сведена Гиппократомъ Хіоскимъ на разысканіе двухъ средне-пропорціональныхъ отрѣзковъ прямой линіи между двумя данными отрѣзками, т. е. если a и b суть данные отрѣзки, то требуется найти другіе два x и y такіе, чтобы:

$$a:x = x:y \quad , \quad x:y = y:b$$

или

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

или еще:

$$x^2 = ay \quad , \quad y^2 = bx$$

Если изъ перваго уравненія опредѣлить y и вставить во второе, то найдемъ:

$$x^3 = a^2 b$$

полагая $b = 2a$, будемъ имѣть:

$$x^3 = 2a^3$$

рѣшить это уравненіе значитъ найти сторону x такого куба, который былъ-бы вдвое больше куба, построеннаго на данномъ отрѣзкѣ a.

Три задачи: отысканіе двухъ средне-пропорціональныхъ, трисекція угла и удвоеніе куба занимали многихъ греческихъ геометровъ. Начиная съ Платона вопросы эти не переставали интересовать древнихъ геометровъ, которые придавали имъ особенное значеніе и важность.

Древніе геометры стремились рѣшить эти задачи съ помощью прямой линіи (линейки) и круга (циркуля), но только въ послѣднее время, въ 1837 году, была доказана Ванцелемъ (Wanzel) невозможность такого рѣшенія.

Нѣкоторыми геометрами даны были рѣшенія при помощи коническихъ сѣченій, другими были изобрѣтены особыя кривыя, изъ числа которыхъ найболѣе извѣстны: конхоида Никомеда, циссоида Діоклеса, одна изъ кривыхъ двойной кривизны, предложенная Архитомъ и другія. Также были изобрѣтены, нѣкоторыми геометрами, приборы для рѣшенія этихъ задачъ, т. е. инструменты для черченія различныхъ кривыхъ, рѣшающихъ вопросъ.

Изъ такихъ приборовъ извѣстенъ *мессолабъ* (messolab), предложенный Эратосѳеномъ для рѣшенія задачи объ удвоеніи куба. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ изъ этихъ кривыхъ.

§ 19. *Конхоида Никомеда.* Конхоида (черепахообразная) была изобрѣтена Никомедомъ для трисекціи угла Вотъ ея образованіе. Дана прямая HH (фиг. 17) и внѣ ея точка O, данъ отрѣзокъ прямой линіи b. Данная точка O называется *полюсомъ*, прямая HH *директрисой*, а отрѣзокъ b *параметромъ*. Изъ точки O опустимъ перпендикуляръ OY на HH и проведемъ прямую XOX параллельно HH. Возьмемъ полюсъ O за начало координатъ, а XX за абсциссу и OY за ординату.

Фиг. 17.

Проведемъ черезъ точку O, какую нибудь, прямую OA, которая пересѣчетъ HH въ точкѣ A, отъ точки A', на прямой OA, отложимъ въ обѣ стороны отрѣзки AA и $A'A''$ равные b. Геометрическое мѣсто, такимъ образомъ, полученныхъ точекъ, проводя черезъ O прямыя во всѣхъ направленіяхъ, есть *конхоида.* Пусть координаты точки A будутъ x и y, пусть разстояніе $x=a$. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ODA и $A'BA$ имѣемъ:

$$\frac{AD}{OD}=\frac{AB}{A'B} \quad \text{или} \quad \frac{y}{x}=\frac{y-a}{A'B}$$

но:

$$\overline{A'B}^2=\overline{A'A}^2-\overline{AB}^2 \quad \text{или} \quad \overline{A'B}^2=b^2-(y-a)^2$$

откуда будемъ имѣть слѣдующее:

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{(y-a)^2}{b^2-(y-a)^2}$$

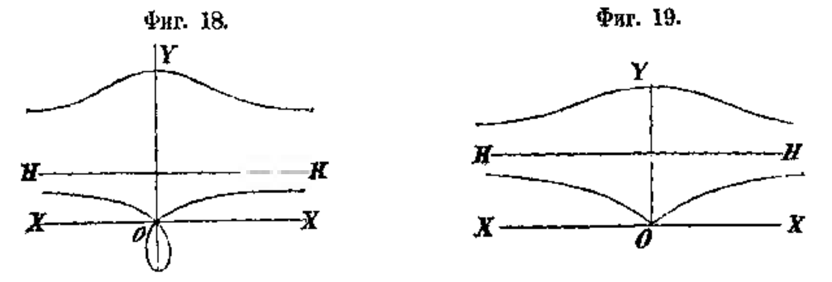
или:

$$(x^2+y^2)(y-a)^2=b^2y^2$$

При построеніи конхоиды можетъ быть три случая:

1. Случай, $b>a$. Въ этомъ случаѣ конхоида имѣетъ форму (фиг. 18).

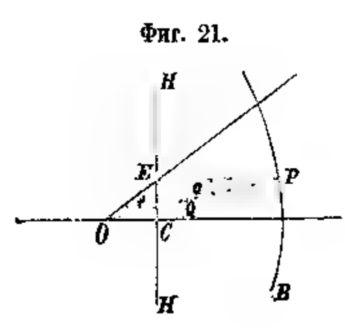
Фиг. 18. Фиг. 19.



2. Случай, $b=a$. Въ этомъ случаѣ форма конхоиды будетъ (фиг. 19).

3. Случай, $b < a$. Форма конхоиды будетъ (фиг. 20).

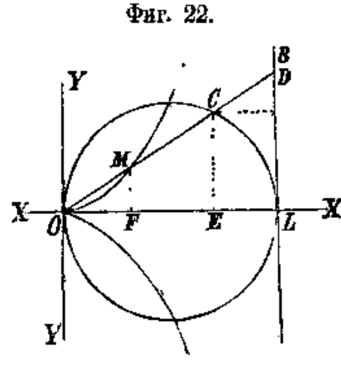
Фиг. 20.



Вѣтви конхоиды на безконечности встрѣчаютъ директрису HH, поэтому она есть асимптота вѣтвей конхоиды.

§ 20. *Трисекція угла.* Пусть EOC будетъ данный уголъ, который требуется раздѣлить на три равныя части. Возьмемъ за директрису конхоиды перпендикуляръ EC къ OC въ какой нибудь точкѣ C (фиг. 21). Построимъ конхоиду, которой бы полюсъ былъ O, а параметръ $b = 2OE$. Проведемъ EP параллельно OC до встрѣчи съ конхоидой въ точкѣ P, соединяя O съ P и положивъ $\angle EOP = \varphi$ мы будемъ имѣть:

Фиг. 21.



$$\angle POC = \frac{1}{3} \angle EOC$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $\angle \theta = \angle EPO = \angle POC$, то $EP = b\cos\theta = 2OE\cos\theta$, а треугольникъ EOP даетъ:

$$\frac{EP}{EO} = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \frac{b\cos\theta}{\frac{1}{2}b} = 2\cos\theta$$

откуда:

$$\sin\varphi = 2\sin\theta.\cos\theta = \sin 2\theta$$

Слѣдовательно $\varphi = 2\theta$. Если $\varphi = 2\theta$, то:

$$\theta = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{3}\angle EOC$$

Фиг. 22.

§ 21. *Циссоида* (клинообразная). Данъ кругъ, коего радіусъ r. Изъ концовъ діаметра OL (фиг. 22) проведены касательныя OY и LB, діаметръ OL принимаютъ за ось X, касательную OY за ось Y. Черезъ начало O проводятъ безчисленное множество прямыхъ, въ родѣ OD, каждая изъ этихъ прямыхъ пересѣкаетъ окружность и касательную LB въ точкахъ, какъ C и D. На каждой изъ такихъ прямыхъ откладываютъ отрѣзокъ $OM = CD$; геометрическое мѣсто точекъ M и будетъ кривая, носящая названіе *циссоиды Діоклеса.*

Такъ какъ точка M на кривой, то $OF = EL = x$, а $FM = y$. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ OMF и OCE имѣемъ:

$$MF : OF = CE : OE$$

но:

$$CE^2 = OE \,.\, EL = x(2r - x)$$

слѣдовательно:

$$y^2 : x^2 = (2r - x)x : (2r - x)^2$$

откуда:

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что циссоида есть кривая третьяго порядка, состоящая изъ двухъ тождественныхъ вѣтвей: одна съ положительными ординатами, другая съ отрицательными. Обѣ эти вѣтви неопредѣленно приближаются къ касательной LB и сливаются съ нею на безконечности, когда $x = 2r$, слѣдовательно касательная LB есть ихъ общая асимптота. Кривая вся лежитъ съ положительной стороны оси X и вся заключена между касательными OY и LB, а для $x > 2r$ и для $-x$ ординаты дѣлаются мнимыми.

§ 22. Найти два средне-пропорціональныхъ отрѣзка, между двумя данными отрѣзками a и b?

Опишемъ кругъ AHB, коего радіусъ есть a. Построимъ циссоиду AHD (фиг. 23):

Изъ центра C возставимъ перпендикуляръ $EC = b$, соединимъ E съ B, EB встрѣтитъ циссоиду въ точкѣ G, проведемъ AG, которая встрѣтитъ CE въ точкѣ F, отрѣзокъ CF и будетъ искомый въ пропорціяхъ: $a : u = u : z = z : b$.

Фиг. 23.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{a}{x} = \frac{CF}{y} \quad \text{и} \quad \frac{2a - x}{a} = \frac{y}{b}$$

Откуда, замѣчая что:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

найдемъ:

$$CF^3 = a^2b = u^3$$

§ 23. *Фоліумъ Декарта.* Эта кривая дается уравненіемъ:

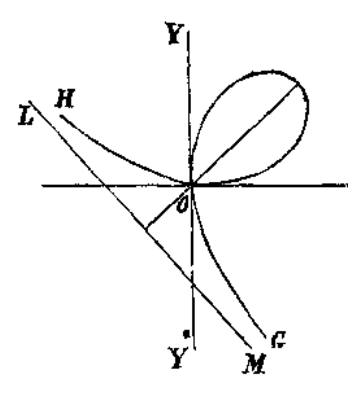
$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

Такъ какъ оно симметрично относительно x и y, то и ея фигура расположена также симметрично.

Легко видѣть, что выраженія:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad \text{и} \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Фиг. 24.

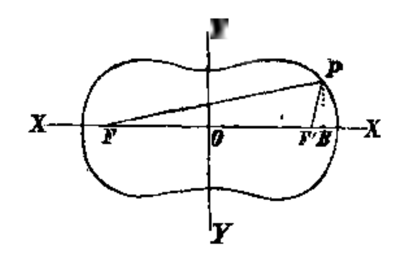


удовлетворяютъ уравненію кривой, какое бы значеніе не имѣло перемѣнное t, поэтому, давая различныя числовыя значенія t, мы будемъ имѣть координаты точекъ кривой, которая имѣетъ форму, показанную на фигурѣ (фиг. 24). Вѣтви ея OH и OG имѣютъ асимптотой прямую LM.

§ 24. *Оваль Кассини.* Найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ произведеніе разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ было бы величина постоянная?

Пусть данныя точки будутъ F и F', разстояніе между ними $FF'=2c$ (фиг. 25), произведеніе разстояній каждой точки геометрическаго мѣста отъ точекъ F и F' пусть будетъ m^2.

Фиг. 25.



Раздѣлимъ, въ точкѣ O, разстояніе FF' пополамъ, возьмемъ FF' за абсциссу, а OY, перпендикулярную FF', за ординату.

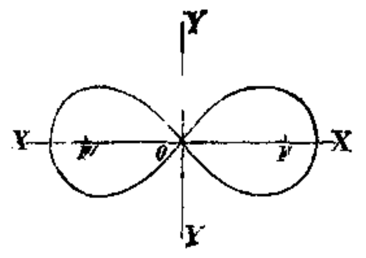
Если точка P находится на геометрическомъ мѣстѣ, то:

$$F'P \,.\, FP = m^2$$

Такъ какъ OB и PB суть координаты x и y, точки P, то мы имѣемъ:

$$\{y^2 + (x+c)^2\}\{y^2 + (x-c)^2\} = m^4$$

Фиг. 26.



или:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = m^4$$

Овалъ будетъ имѣть форму (фиг. 25) если $m > c$.

Если же $m = c$, то мы будемъ имѣть *лемнискату Бернулли*, коей уравненіе есть:

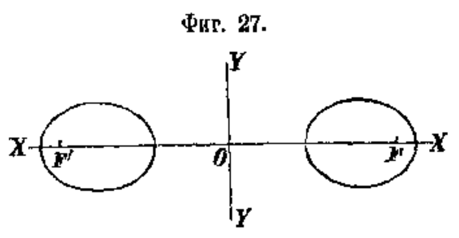
$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$$

Форма лемнискаты будетъ (фиг. 26).

Если-же $m < c$, то оvалъ Кассини состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ оваловъ (фиг. 27).

§ 25. *Трансцендентныя кривыя.* Всѣ до сихъ поръ разсмотрѣнныя кривыя называются *алгебраическими*, такъ какъ всѣ онѣ выражаются алгебраическими уравненіями различныхъ степеней. Коническія сѣченія суть кривыя 2-ой степени, конхоида—4-ой, циссоида—3-ей и т. д. За алгебраическими кривыми слѣдуютъ *трансцендентныя*, т. е. такія кривыя, въ уравненія которыхъ входятъ трансцендентныя функціи: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\log x$, e^x и т. д.

Фиг. 27.



§ 26. *Синусоида.* Уравненіе этой кривой есть:

$$y = \sin x$$

Чтобы видѣть ея форму дадимъ x всѣ значенія, начиная съ 0, и опредѣлимъ y:

$$x=0,\dots\ x=\frac{\pi}{6},\dots\ x=\frac{\pi}{4},\dots\ x=\frac{\pi}{2},\dots\ x=\frac{5\pi}{6},\dots\ x=\pi,\dots\ x=\frac{7\pi}{6},\dots\ x=\frac{3\pi}{2},\dots\ x=2\pi,\dots$$

$$y=0,\dots\ y=\frac{1}{2},\dots\ y=\frac{1}{\sqrt{2}},\dots\ y=1,\dots\ y=\frac{1}{2},\dots\ y=0,\dots\ y=-\frac{1}{2},\dots\ y=-1,\dots\ y=0,\dots$$

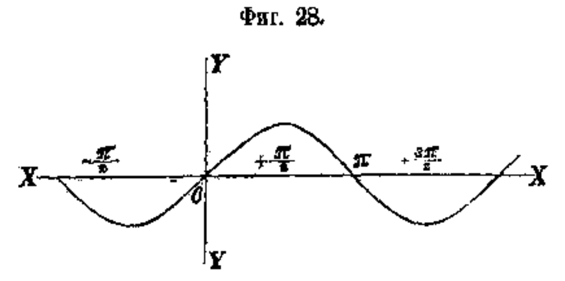
Эта кривая имѣетъ слѣдующую форму (фиг. 28).

Въ болѣе общей формѣ уравненіе синусоиды будетъ:

$$y = a\sin(bx)$$

гдѣ a и b произвольныя количества.

Фиг. 28.



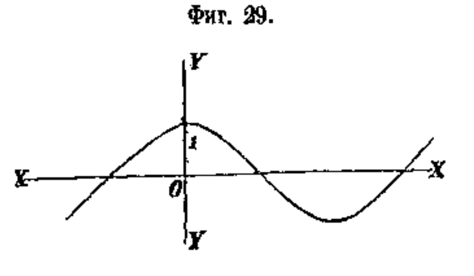
§ 27. *Косинусоида.* Эта кривая выражается уравненіемъ:

$$y = \cos x$$

Если изслѣдуемъ ея форму, какъ это мы сдѣлали для синусоиды, то увидимъ, что она имѣетъ слѣдующій видъ (фиг. 29).

Видъ ея показываетъ, что кривая пересѣкаетъ ось ординатъ на разстояніи равномъ единицѣ отъ начала координатъ O.

Фиг. 29.



§ 28. *Кривая тангенсовъ.* Кривая эта выражается уравненіемъ:

$$y = \operatorname{tg} x$$

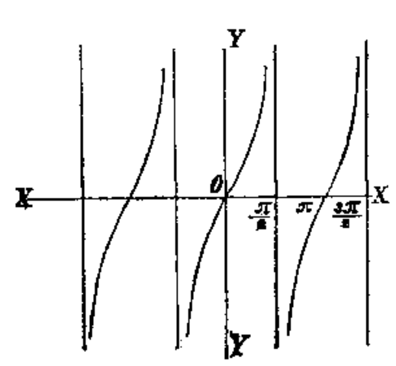
Если изслѣдуемъ ея форму, какъ сдѣлали это для двухъ предъидущихъ кривыхъ, то найдемъ, что

$$x = 0, \ldots \quad x = \frac{\pi}{6}, \ldots \quad x = \frac{\pi}{4}, \ldots \quad x = \frac{\pi}{2}, \ldots \quad x = \pi, \ldots \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$y = 0, \ldots \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}}, \ldots \quad y = 1, \ldots \quad y = \infty, \ldots \quad y = 0, \ldots \quad y = -\infty$$

Кривая имѣетъ форму (фиг. 30).

Фиг. 30.



§ 29. *Логарифмическая кривая.* Кривая эта выражается уравненіемъ:

$$x = \log(y)$$

которое можно написать въ формѣ:

$$y = e^x$$

если log есть неперовскій.

$$x = -\infty, \ldots \quad x = 0, \ldots \quad x = \infty$$

$$y = 0, \ldots \quad y = 1, \ldots \quad y = \infty$$

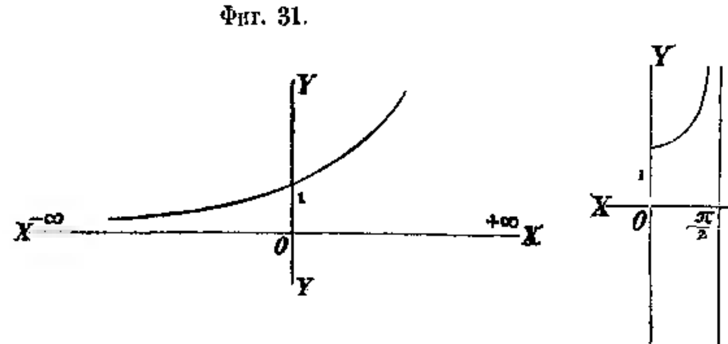
форма кривой будетъ (фиг. 31).

§ 30. *Кривая секансовъ.* Кривая эта выражается уравненіемъ:

$$y = \sec x$$

и имѣетъ форму (фиг. 32).

Фиг. 31. Фиг. 32.



§ 31. *Квадратрикса Дейнострата.* Если ордината DP (фиг. 33) равномѣрно движется по діаметру AB круга O, начиная отъ точки B къ A, и въ тоже время радіусъ OB вращается также равномѣрно около центра,

то точка пересѣченія ординаты и радіуса, образуетъ геометрическое мѣсто, которое и называется *квадратриксой*.

Фиг. 33.

Если радіусъ круга есть r, а $\angle BOP = \varphi$, то очевидно, изъ условія движенія, мы будемъ имѣть: $r - x = a\varphi$. Если при $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $a = \frac{2r}{\pi}$, откуда $\varphi = \frac{r-x}{2r} . \pi$.

Но мы имѣемъ:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$$

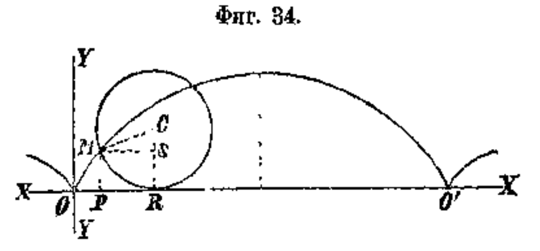
откуда:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{r-x}{2r} . \pi\right)$$

Это и есть уравненіе квадратриксы. Эта кривая была изобрѣтена Дейностратомъ для отысканія квадратуры круга, откуда ея названіе. Если $x = 0$, то ордината OE будетъ равна $\frac{2r}{\pi}$, это можно показать съ помощью нѣкоторыхъ преобразованій уравненія, слѣдовательно надобно только построить точку E, чтобы найти π. Но построеніе точки E представляетъ такія-же трудности, какъ и построеніе π. Съ помощью квадратриксы можно также раздѣлить уголъ на три равныя части, для этого надобно раздѣлить на три равныя части отрѣзокъ DB, тогда ординаты этихъ точекъ встрѣтятъ квадратриксу въ точкахъ, которыя соединивъ съ центромъ, раздѣлимъ уголъ φ на три равныя части.

§ 32. *Циклоида*. Циклоида есть кривая, описанная точкою окружности круга, который катится, не скользя, по прямой линіи. Пусть OX будетъ прямая, по которой катится кругъ, коего радіусъ есть r (фиг. 34). Пусть r будетъ точка касанія круга и прямой OX, пусть M будетъ точка, описывающая кривую. Мы полагаемъ, что въ началѣ движенія точка M совпадаетъ съ точкою касанія O, прямой и окружности.

Фиг. 34.



Возьмемъ за ось X прямую OX, O за начало координатъ, OY перпендикулярную OX за ось Y. Въ томъ положеніи, какое имѣетъ кругъ на фигурѣ, координаты точки M будутъ:

$$x = OP = OR - PR \quad , \quad y = CR - CS \tag{17}$$

Означимъ черезъ φ уголъ, который радіусъ CM составляетъ съ начальнымъ своимъ положеніемъ CR. По свойству движенія мы имѣемъ:

$$OR = \text{дугѣ } MR = r\varphi$$

Но:

$$RP = MS = r\sin\varphi \quad , \quad SC = r\cos\varphi$$

подставляя въ (17), найдемъ:

$$x = r(\varphi - \sin\varphi) \quad , \quad y = r(1 - \cos\varphi) \tag{18}$$

Откуда найдемъ:

$$\cos\varphi = \frac{r-y}{r} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}$$

Слѣдовательно:

$$\varphi = \text{arc}\sin\frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}$$

подставляя это выраженіе φ въ первое изъ выраженій (18), найдемъ:

$$x = r.\text{arc}\cos\frac{r-y}{r} \mp \sqrt{2ry-y^2}$$

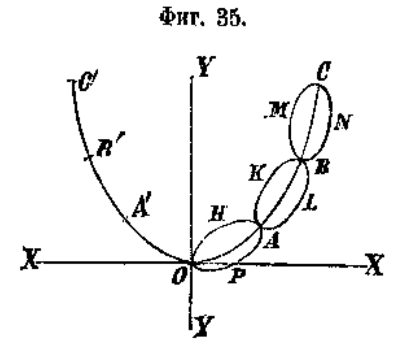
Таково уравненіе одной изъ самыхъ замѣчательныхъ кривыхъ по своимъ геометрическимъ и механическимъ свойствамъ. Она состоитъ изъ безконечнаго числа тождественныхъ частей, изъ коихъ только одна дана на чертежѣ.

§ 33. Вотъ еще замѣчательная кривая, выражаемая уравненіемъ:

$$y = ax^2 \pm \sin x\sqrt{x}$$

Чтобы построить эту кривую, построимъ сначала параболу $y = ax^2$.

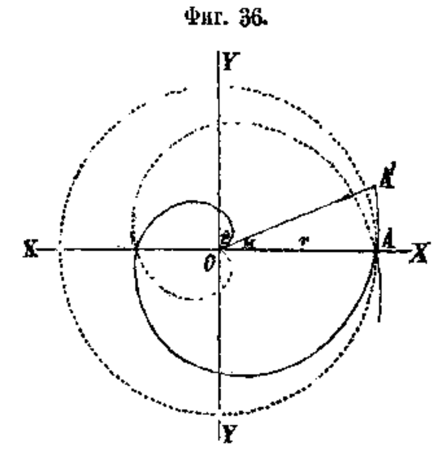
Фиг. 35.



Пусть она будетъ $C'OC$ (фиг. 35). Если будемъ прибавлять и отнимать отъ ординатъ параболы, величину $\sin x\sqrt{x}$, то съ положительной стороны получимъ овалы: PH, KL и MN..., а съ отрицательной отдѣльныя точки A', B', C', ..., на вѣтвяхъ параболы, такъ какъ для отрицательныхъ величинъ x выраженіе $\sin x\sqrt{x}$ будетъ мнимое, а дѣйствительное, равное нулю, только въ точкахъ A', B', C'... Длина оваловъ и разстоянія точекъ A', B', C'..., считая по оси X, будутъ всѣ равны π.

§ 34. *Спираль Архимеда.* Прямая OA вращается равномѣрно около точки O (фиг. 36), точка M, начиная съ O, скользитъ равномѣрно по прямой OA и притомъ такъ, что когда прямая сдѣлаетъ полный оборотъ, точка M проскользитъ на прямой разстояніе r всегда одно и тоже для всѣхъ полныхъ оборотовъ.

Фиг. 36.



При такихъ движеніяхъ, съ прямою и по прямой, точка M опишетъ кривую, состоящую изъ безконечнаго числа оборотовъ около точки O. Кривая эта извѣстна подъ именемъ *спирали Архимеда.*

Возьмемъ полярныя координаты: точку O за полюсъ, а постоянная прямая пусть будетъ первоначальное направленіе прямой OA.

Пусть OA' будетъ такое положеніе радіуса вектора OA, при которомъ уголъ φ будетъ шестнадцатая часть окружности. По условію точка M пройдетъ шестнадцатую часть r, слѣдовательно:

$$\frac{OM}{OA'}=\frac{AA_1}{2\pi} \quad \text{или} \quad \frac{\rho}{r}=\frac{\varphi}{2\pi}$$

откуда:

$$\rho=\frac{r}{2\pi}\cdot\varphi$$

полагая $\frac{r}{2\pi}=a$, искомое уравненіе спирали будетъ:

$$\rho=a\varphi \tag{19}$$

Уголъ φ можетъ возрастать неопредѣленно, какъ въ положительномъ, такъ и въ отрицательномъ направленіи, въ обоихъ случаяхъ получатся двѣ вѣтви тождественныя, но съ противуположными оборотами.

Если изъ точки O возставимъ перпендикуляръ и возьмемъ его за ось Y, а OA за ось X, то будемъ имѣть:

$$\rho^2=x^2+y^2 \quad , \quad \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi \quad , \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Откуда уравненіе спирали въ декартовыхъ координатахъ будетъ:

$$x^2+y^2=a^2\operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}$$

или:

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\left(\frac{y^2+x^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (20)$$

уравненіе трансцендентное, между тѣмъ съ перваго раза кажется, что въ полярныхъ координатахъ (19) оно алгебраическое. Чтобы выяснить это противорѣчіе, надобно вспомнить, что ρ и φ величины разнородныя.

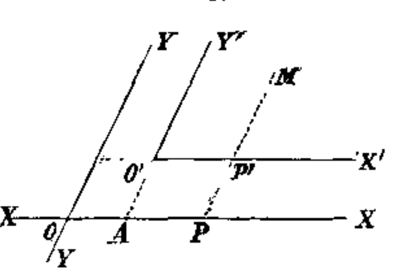
§ 35. Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы показать, какъ съ помощью метода Декарта, всякую кривую, которой свойство, общее всѣмъ ея точкамъ, извѣстно, служащее для ея опредѣленія, выразить алгебраическимъ уравненіемъ, и обратно, каждое алгебраическое уравненіе представить геометрически. Такимъ образомъ, всѣ геометрическія изслѣдованія обращаются въ алгебраическія комбинаціи и преобразованія, геометрическія конкретныя представленія обобщаются въ отвлеченныхъ алгебраическихъ символахъ и часто, переставая существовать конкретно для глаза, идеализируются въ алгебраическихъ символахъ и ихъ законахъ. Такія обобщенія, или такая идеализація, ведутъ ко многимъ теоремамъ, которыя безъ этого были-бы для насъ всегда скрыты, существуя только въ отвлеченной комбинаціи алгебраическихъ символовъ.

ГЛАВА III.

Преобразованіе координатъ.

§ 36. Часто встрѣчается необходимость опредѣлить положеніе точки на плоскости относительно другаго начала или другихъ координатныхъ осей. Такой переходъ отъ однѣхъ координатныхъ осей къ другимъ называется *преобразованіемъ координатъ*. Въ переходѣ отъ однѣхъ осей къ другимъ встрѣчается нѣсколько случаевъ:

Фиг. 37.



Случай 1. Перенесеніе начала. Пусть OX и OY (фиг. 37) будутъ старыя оси, $O'X'$ и $O'Y'$ новыя, параллельныя старымъ.

Черезъ x и y мы будемъ обозначать координаты точки M относительно старыхъ осей, а черезъ x' и y' координаты той-же точки относительно новыхъ осей. Пусть координаты новаго начала, относительно старыхъ осей, будутъ $OA=a$ и $AO'=b$. Координаты точки M, отнесенной къ старымъ осямъ,

будутъ $x = OP$, $y = PM$; отнесенной къ новымъ, будутъ $x' = O'P'$, $y' = P'M$. Но:

$$OP = OA + AP = OA + O'P'$$

$$MP = PP' + MP' = O'A + MP'$$

или:

$$x = a + x' \quad , \quad y = b + y' \tag{1}$$

Это формулы, съ помощью которыхъ перемѣняется начало, а направленіе осей остается тоже; a и b суть величины данныя.

Пр. 1. Что сдѣлается съ уравненіями:

$$y + 4x - 7 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$$

если начало координатъ перенесемъ въ точку (2, −1)?

Отв. $y' + 4x' = 0$, $x'^2 + y'^2 - 6$.

Пр. 2. Что сдѣлается съ уравненіемъ:

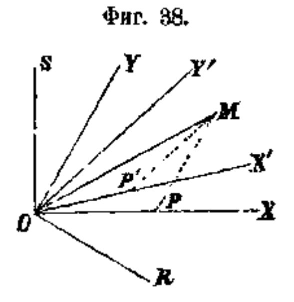
$$x^2 + y^2 - \frac{2mn}{m-n} x = 0$$

если новое начало находится на оси OX, на разстояніи $\frac{mn}{m-n}$ отъ стараго начала?

Отв. $x'^2 + y'^2 + \left(\frac{mn}{m-n}\right)^2 = 0$.

Случай 2. Перемѣна направленія осей. Пусть OX и OY будутъ старыя оси, а OX' и OY'—новыя, имѣющія общее начало со старыми осями. Пусть α и β будутъ углы, которые новыя оси OX' и OY' составляютъ съ осью OX (фиг. 38), эти углы опредѣляютъ положеніе новыхъ осей. Какъ прежде мы будемъ обозначать черезъ x, y координаты точки M относительно старыхъ осей, а черезъ x', y' координаты той-же точки относительно новыхъ осей. Пусть наконецъ θ будетъ уголъ между старыми осями OX и OY.

Фиг. 38.



Слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\theta = YOX \quad , \quad \alpha = X'OX \quad , \quad \beta = Y'OX$$

$$x = OP \quad , \quad y = MP \quad , \quad x' = OP' \quad , \quad y' = MP'$$

Чтобы выразить x и y черезъ x' и y', проведемъ OR перпендикулярно OY и OS перпендикулярно OX и проэктируемъ полигонъ $OP'MPO$ на OR. Въ силу теоремы, что алгебраическая сумма проэкцій сторонъ замкнутаго полигона, на какую нибудь прямую, равна нулю, мы будемъ имѣть слѣдующее уравненіе, пробѣгая полигонъ въ направленіи $OP'MPO$:

$$OP' . \cos P'OR + P'M . \cos ROY' + MP . \cos ROY - PO . \cos ROP = 0$$

или:

$$x'\cos ROP' + y'\cos ROY' - x\cos ROX = 0$$

проэкція стороны MP на OR равна нулю, такъ какъ уголъ ROY есть прямой. Но мы имѣемъ:

$$XOR = YOR - YOX = \frac{\pi}{2} - \theta$$

и также:

$$X'OR = X'OX + XOR = \alpha + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - (\theta - \alpha)$$

$$Y'OR = Y'OX + XOR = \beta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - (\theta - \beta)$$

подставляя, найдемъ:

$$x'\sin(\theta - \alpha) + y'\sin(\theta - \beta) - x\sin\theta = 0 \qquad (2)$$

Если тотъ же полигонъ проэктируемъ на OS, то найдемъ:

$$OP' . \cos X'OS + P'M . \cos Y'OS - MP . \cos YOS - PO . \cos XOS = 0$$

но:

$$X'OS = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad , \quad Y'OS = \frac{\pi}{2} - \beta \quad , \quad YOS = \frac{\pi}{2} - \theta$$

а сторона OP перпендикулярна OS, слѣдовательно ея проэкція равна нулю; подставляя найдемъ:

$$x'\sin\alpha + y'\sin\beta - y\sin\theta = 0 \qquad (3)$$

Уравненія (2) и (3) даютъ искомыя величины для x и y:

$$x = \frac{x'\sin(\theta - \alpha) + y'\sin(\theta - \beta)}{\sin\theta} \quad , \quad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta} \qquad (4)$$

Эти формулы служатъ для перехода отъ одной системы косоугольныхъ осей, къ другой косоугольной, имѣющей тоже начало; онѣ рѣдко употребляются во всей ихъ общности.

Мы разберемъ тѣ частные случаи, которые часто встрѣчаются.

1. Перейти отъ системы прямоугольныхъ осей къ системѣ косоугольныхъ? Въ этомъ случаѣ $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta = 1$, слѣдовательно формулы (4) сдѣлаются:

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta \qquad (5)$$

2. Перейти отъ системы прямоугольнои къ другой прямоугольной? Въ этомъ случаѣ $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\sin\theta=1$ и $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\cos\beta=-\sin\alpha$ и $\sin\beta=\cos\alpha$. Въ силу этого формулы (4) сдѣлаются:

$$x=x\cos\alpha-y'\sin\alpha$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \qquad (6)$$

Это самыя употребительныя формулы.

3. Перейти отъ системы косоугольной къ системѣ прямоугольной? Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha \quad , \quad \sin(\theta-\alpha)=-\cos(\theta-\alpha) \quad \text{и} \quad \sin\beta=\cos\alpha$$

въ силу чего формулы (4) сдѣлаются:

$$x=\frac{x'\sin(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta}$$
$$y=\frac{x'\sin\alpha+y'\cos\alpha}{\sin\theta} \qquad (7)$$

Случай 3. Общее преобразованіе. Оно состоитъ въ перенесеніи начала и въ измѣненіи направленія осей.

Этого можно достигнуть съ помощью двухъ предъидущихъ преобразованій. Если координаты новаго начала O' будутъ (a, b), а оси проведенныя черезъ это начало, параллельно старымъ, будутъ $O'X''$ и $O'Y''$, то мы будемъ имѣть:

$$x=a+x'' \quad , \quad y=b+y''$$

Остается перейти отъ системы $O'X''$, OY'' къ системѣ $O'Y'$, $O'X'$, сохраняя начало O'. Для этого надобно преобразовать x'' и y'' по формуламъ (4), что даетъ:

$$x=a+\frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}$$
$$y=b+\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\theta} \qquad (8)$$

Всѣ предъидущія формулы, служащія для перехода отъ одной системы къ другой, первой степени относительно x' и y', имѣютъ форму:

$$x=a+px'+qy' \quad , \quad y=b+rx'+sy'$$

Подстановленіе этихъ выраженій въ уравненіе n-ой степени вмѣсто x и y ведетъ къ уравненію той-же степени относительно новыхъ координатъ x' и y'. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что степень не можетъ повысится, возвышая полиномъ въ n-ую степень и не дастъ членовъ въ x и y' выше n-ой степени; степень и не понизится, ибо возвращаясь обратно, она бы повысилась.

Пр. 1. Показать, что уравненіе:

$$x^2+y^2=r^2$$

будетъ такой-же формы для всѣхъ прямоугольныхъ осей, имѣющихъ тоже начало?

Пр. 2. Что сдѣлается съ уравненіемъ:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2=r^2$$

если начало координатъ перенесемъ въ точку (a, b)?

Отв. $x'^2+y'^2=r^2$.

Пр. 3. Что сдѣлается съ уравненіемъ:

$$y^2-x^2=6$$

въ прямоугольныхъ осяхъ, если за новыя оси возьмемъ равнодѣлящія углы между старыми осями?

Отв. $x'y'=3$.

Пр. 4. Написать формулы, служащія къ переходу отъ одной системы прямоугольныхъ осей къ другой косоугольной, сохраняя начало и ось X?

Отв. $x=x'+y'\cos\beta \quad , \quad y=y'\sin\beta$.

Пр. 5. Дано уравненіе въ прямоугольныхъ осяхъ:

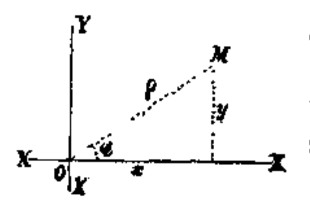
$$2x^2-3xy+2y^2=1$$

какую форму оно будетъ имѣть, если оставить ось X, а за ось Y взять равнодѣлящую уголъ между старыми осями?

Отв. $4x'^2+y'^2+x'y'\sqrt{2}=2$.

§ 37. *Переходъ отъ декартовыхъ координатъ къ полярнымъ и обратно.* Предъидущія формулы даютъ возможность перейти отъ одной системы декартовыхъ координатъ къ другой, но часто необходимо бываетъ отъ декартовыхъ координатъ перейти къ полярнымъ и обратно. Если мы имѣемъ прямоугольную систему координатъ и желаемъ преобразовать уравненіе кривой въ декартовыхъ координатахъ, въ полярныя, коихъ полюсъ находится въ началѣ, а направленіе дается осью X, то будемъ имѣть слѣдующую зависимость:

Фиг. 39.



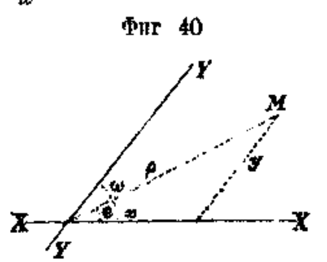
$$x=\rho\cos\varphi \quad , \quad y=\rho\sin\varphi \quad , \quad \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi$$

гдѣ ρ есть разстояніе точки (x, y) отъ начала координатъ O, а φ уголъ, который ρ составляетъ съ осью абсциссъ (фиг. 39); подставляя вмѣсто

x и y ихъ выраженія черезъ ρ и φ въ данное уравненіе, мы получимъ уравненіе кривой въ полярныхъ координатахъ. Если, обратно, требуется перейти отъ уравненія въ полярныхъ координатахъ къ декартовымъ прямоугольнымъ, то предъидущія уравненія даютъ:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Фиг 40



Подставляя эти выраженія въ полярное уравненіе, найдемъ уравненіе въ координатахъ Декарта.

Если оси X и Y (фиг. 40) не прямоугольны, а составляютъ уголъ ω, то мы будемъ имѣть слѣдующія пропорціи:

$$y:\rho = \sin\varphi:\sin\omega \quad , \quad x:\rho = \sin(\omega-\varphi):\sin\omega$$

откуда:

$$y = \frac{\rho\sin\varphi}{\sin\omega} \quad , \quad x = \frac{\rho\sin(\omega-\varphi)}{\sin\omega}$$

Эти формулы и служатъ для перехода отъ косоугольныхъ декартовыхъ координатъ къ полярнымъ, если начало координатъ есть полюсъ.

Пр. 1. Преобразовать слѣдующія уравненія въ прямоугольныхъ координатахъ, въ полярныя:

$$x^2+y^2=5ax \quad , \quad x^2-y^2=a^2$$

Отв. $r=5a\cos\varphi$, $r^2\cos2\varphi=a^2$.

Пр. 2. Преобразовать слѣдующія уравненія въ полярныхъ координатахъ, въ прямоугольныя:

$$r^2\sin2\varphi=2a^2 \quad , \quad r^2=a^2\cos2\varphi \quad , \quad r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\varphi=a^{\frac{1}{2}}$$

Отв. $xy=a^2$, $(a^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=(2a-x)^2$

ГЛАВА IV.

Прямая линія.

§ 38. Въ главѣ II § 12 мы вывели уравненіе прямой, основываясь на ея опредѣленіи; въ настоящей главѣ мы дадимъ этому уравненію различныя формы и изслѣдуемъ всѣ свойства прямой, какъ въ отдѣльности, такъ и въ связи съ системою прямыхъ на той-же плоскости.

Въ § 12 мы нашли, что уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), произвольно выбранныя на плоскости, есть:

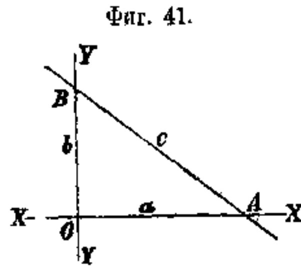
$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \text{или} \quad y-y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \qquad (1)$$

или еще:

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Замѣтимъ, что форма этого уравненія не зависитъ отъ наклоненія координатныхъ осей между собою.

Фиг. 41.



Одна изъ самыхъ замѣчательныхъ формъ уравненія прямой получится, если возьмемъ точки, опредѣляющія прямую, одну на пересѣченіи прямой съ осью X (фиг. 41), другую на пересѣченіи съ осью Y, слѣдовательно надобно положить:

$$x_1 = a \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad y_2 = b$$

гдѣ a и b *отрѣзки*, которые прямая дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ. Подставляя эти величины въ уравненіе (1), найдемъ:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2}$$

Если положимъ:

$$a = -\frac{1}{\xi} \quad , \quad b = -\frac{1}{\eta} \tag{3}$$

то предъидущее уравненіе сдѣлается:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \tag{4}$$

Это одна изъ самыхъ замѣчательныхъ формъ уравненія прямой. Она также не зависитъ отъ наклоненія осей.

Отрѣзки a и b опредѣляютъ положеніе прямой или-же ξ и η, связанныя съ a и b уравненіями (3). Величины ξ и η называются *координатами* прямой, фиксирующія ея положеніе на плоскости, такъ точно, какъ координаты точки фиксируютъ ея положеніе.

Въ уравненіи (4) x и y называются *бѣгущими* или *скользящими* координатами, онѣ остаются неопредѣленными и должны удовлетворять только уравненію (4). Когда x и y удовлетворяютъ уравненію (4), точка, коей координаты суть x, y, скользитъ по прямой, фиксированной координатами ξ, η.

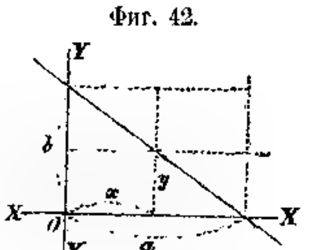
Форма уравненія (4) замѣчательна въ томъ отношеніи, что она симметрична, относительно координатъ ξ, η прямой, и координатъ x, y точки. Ниже увидимъ важное значеніе этой симметріи.

При изученіи Аналитической геометріи необходимо выяснить геометрическое значеніе каждаго алгебраическаго выраженія или уравненія, безъ этого аналитическія формулы навсегда остаются только отвлеченными комбинаціями алгебраическихъ символовъ, которые теряютъ, такимъ образомъ,

конкретное представленіе. Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе (2), которое выражаетъ только то, что прямая проходитъ черезъ точки $(a, 0)$, $(0, b)$; но если мы его напишемъ въ формѣ:

$$bx + ay = ab$$

Фиг. 42.



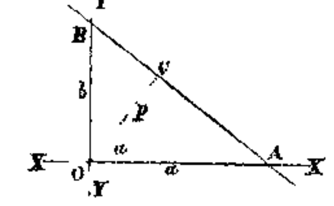
то видимъ, что площадь прямоугольника ab (фиг 42), построеннаго на отрѣзкахъ a и b всегда равна суммѣ площадей прямоугольниковъ bx и ay, гдѣ бы точка (x, y) ни была взята на діагонали прямоугольника, т. е. на прямой (2) [1]).

§ 39. Если уравненіе (2) помножимъ на перпендикуляръ p, опущенный изъ начала координатъ на прямую AB (фиг. 43), то получимъ:

$$\frac{p}{a}x + \frac{p}{b}y = p$$

Но $\frac{p}{a}$ есть cos угла, который перпендикуляръ p составляетъ съ осью X, а $\frac{p}{b}$ есть sin того-же угла, слѣдовательно, означая черезъ α этотъ уголъ, найдемъ:

Фиг. 43.



$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (5)$$

Это уравненіе прямой, которой положеніе фиксируется координатами α и p. Эта форма называется *нормальной*—ниже увидимъ почему. Замѣтимъ, что:

$$OA = a = -\frac{1}{\xi}\ , \quad OB = b = -\frac{1}{\eta}\ , \quad OC = p\ , \quad \angle AOC = \alpha$$

§ 40. Мы видѣли въ § 12, (6), что уравненію прямой, проходящей черезъ точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), можно дать слѣдующую форму:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \operatorname{tg}\varphi$$

или:

$$y - y_1 = (x - x_1)\operatorname{tg}\varphi \qquad (6)$$

Это есть уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку (x_1, y_1) и составляющей уголъ φ съ осью X. Точку (x_1, y_1) можно выбрать гдѣ угодно

[1]) См. *Ващенко-Захарченко*, Элементарная геометрія. Кіевъ, 1883, in-8, стр. 73, § 139.

на прямой. Возьмемъ точку пересѣченія прямой съ осью Y, координаты этой точки будутъ $(0, b)$; b есть отрѣзокъ, который прямая дѣлаетъ на оси Y. Полагая въ уравненіи (6) $x_1=0$, $y_1=b$, найдемъ:

$$y = x\operatorname{tg}\varphi + b$$

или полагая $\operatorname{tg}\varphi = a$, уравненіе сдѣлается:

$$y = ax + b \tag{7}$$

Значеніе коэфиціента въ этомъ уравненіи объяснено выше. Уравненіе (6) можно написать еще въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{y-y_1}{\sin\varphi} = \frac{x-x_1}{\cos\varphi} \tag{8}$$

или, полагая:

$$\frac{y-y_1}{\sin\varphi} = \frac{x-x_1}{\cos\varphi} = r \tag{9}$$

найдемъ:

$$y = y_1 + r.\sin\varphi \quad , \quad x = x_1 + r.\cos\varphi \tag{10}$$

гдѣ r есть разстояніе скользящей точки отъ данной точки (x_1, y_1). Если прямая проходитъ черезъ начало координатъ, то въ уравненіе (7) отрѣзокъ $b=0$, слѣдовательно:

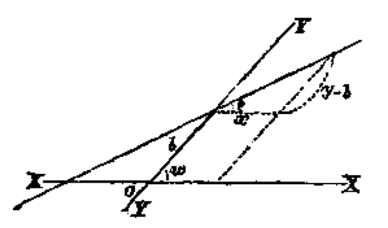
$$y = ax \tag{11}$$

будетъ уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ и составляющей съ осью X уголъ, коего тангенсъ равенъ числу a.

Если въ уравненіи:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

Фиг. 44.



помѣстимъ точку (x_2, y_2) въ начало координатъ, т. е. положимъ $x_2=0$, $y_2=0$, то уравненіе сдѣлается:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{или} \quad y = \frac{y_1}{x_1}x \tag{12}$$

Если оси будутъ косоугольныя и уголъ между ними будетъ ω (фиг. 44), то значеніе коэфиціента a въ уравненіи:

$$y = ax + b \tag{13}$$

найдемъ, написавъ уравненіе (13) въ формѣ:

$$y-b=ax \quad \text{или} \quad \frac{y-b}{x}=a$$

или:

$$\frac{y-b}{x}=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}$$

откуда:

$$a=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)} \tag{14}$$

§ 41. Мы исчерпали всѣ формы, которыя уравненіе прямой можетъ получать, выбирая извѣстнымъ образомъ величины (координаты), опредѣляющія положеніе прямой. Всѣ эти уравненія первой степени относительно x, y, откуда представляется самъ собою вопросъ: всякое-ли уравненіе первой степени, въ x и y, представляетъ прямую линію?

Мы сейчасъ покажемъ, что это такъ. Въ самомъ дѣлѣ, самая общая форма уравненія первой степени относительно x, y будетъ:

$$Ax+By+C=0 \tag{15}$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \tag{16}$$

но это ничто иное, какъ уравненіе прямой въ формѣ (2) § 38, гдѣ:

$$a=-\frac{C}{A} \quad , \quad b=-\frac{C}{B}$$

откуда заключаемъ, что *каждое уравненіе первой степени относительно x и y представляетъ прямую линію.*

§ 42. Мы видѣли въ предъидущемъ параграфѣ, какъ прямая, данная въ самой общей формѣ:

$$Ax+By+C=0 \tag{17}$$

приводится къ формѣ:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

но чаще всего требуется уравненію (17) дать нормальную форму:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{18}$$

для этого помножимъ уравненіе (18) на неопредѣленный множитель λ, тогда получимъ:

$$\lambda x\cos\alpha + \lambda y\sin\alpha - \lambda p = 0$$

Если это уравненіе тождественно съ (17), то мы должны имѣть:

$$\lambda\cos\alpha = A \quad , \quad \lambda\sin\alpha = B \quad , \quad -\lambda p = C \tag{19}$$

откуда, возвышая въ квадратъ первыя два уравненія и складывая, найдемъ:

$$\lambda^2 = A^2 + B^2$$

или:

$$\lambda = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

Подставляя въ уравненія (19), получимъ:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \tag{20}$$

Перпендикуляръ p, опущенный изъ начала координатъ, на прямую, мы будемъ всегда принимать за величину положительную, поэтому въ выраженіи:

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \tag{21}$$

радикалу нужно давать такой знакъ, чтобы вторая часть была положительная. Этимъ условіемъ опредѣляется знакъ радикала. Если C будетъ количество положительное, то радикалу нужно дать знакъ $-$, а если C будетъ количество отрицательное, то радикалу надобно дать знакъ $+$. Опредѣливъ, такимъ образомъ, знакъ радикала, мы будемъ имѣть $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Слѣдовательно если уравненіе (17) раздѣлимъ на $\sqrt{A^2+B^2}$, то оно приметъ нормальную форму:

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \tag{22}$$

Замѣтимъ еще, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выражаются только коэфиціентами A и B и не зависятъ отъ C.

§ 43. Если въ уравненіи прямой:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{23}$$

измѣнимъ a и b на na и nb, то получимъ уравненіе:

$$\frac{x}{na}+\frac{y}{nb}=1 \tag{24}$$

или:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=n$$

прямой, очевидно, параллельной прямой (23).

Если въ уравненіи:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \tag{25}$$

измѣнимъ p на p_1, то прямая перенесется параллельно самой себѣ, такъ какъ ея наклоненіе, при такомъ замѣщеніи, неизмѣняется. Слѣдовательно прямая:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p_1$$

параллельна прямой (25).

Такъ какъ наклоненіе прямой, данной общимъ уравненіемъ:

$$Ax+By+C=0$$

выражается только коэфиціентами A и B, то съ измѣненіемъ C прямая переносится параллельно самой себѣ.

Наконецъ въ уравненіи:

$$y=ax+b$$

оставляя a, угловой коэфиціентъ, безъ перемѣны, а измѣняя только b, мы будемъ переносить прямую параллельно самой себѣ.

§ 44. *Задача.* Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку (x_1, y_1)?

Рѣшеніе. Возьмемъ уравненіе прямой въ самой общей формѣ:

$$Ax+By+C=0 \tag{26}$$

Если эта прямая должна проходить черезъ точку (x_1, y_1), то координаты x_1 и y_1 должны удовлетворять предъидущему уравненію, т. е. мы должны имѣть:

$$Ax_1+By_1+C=0$$

откуда:

$$C=-Ax_1-By_1$$

вставляя въ уравненіе (26), найдемъ:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \tag{27}$$

Это и есть уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1).

Легко видѣть, что если уравненіе прямой будетъ дано въ формахъ:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \tag{28}$$

$$y=ax+b$$

то уравненія прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1), будутъ:

$$\frac{x-x_1}{a}+\frac{y-y_1}{b}=0$$

$$(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\sin\alpha=0 \tag{29}$$

$$y-y_1=a(x-x_1)$$

Если въ уравненіяхъ (29) будемъ измѣнять коэфиціенты a, b, уголъ α и угловой коэфиціентъ a, то прямая выраженная этими уравненіями, будетъ вращатся около точки (x_1, y_1), принимая всѣ возможныя направленія.

§ 45. *Задача.* Дано уравненіе прямой въ нормальной формѣ:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \tag{30}$$

и точка (x_1, y_1) внѣ этой прямой; найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки (x_1, y_1) на данную прямую?

Рѣшеніе. Черезъ данную точку (x_1, y_1) проведемъ прямую параллельно прямой (30), уравненіе ея будетъ (§ 43):

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p_1 \tag{31}$$

если p_1 будетъ разстояніе, проведенной прямой отъ начала координатъ. Если означимъ черезъ δ искомый перпендикуляръ, то легко видѣть, что:

$$\delta=p_1-p$$

Но точка (x_1, y_1) находится на прямой (31), слѣдовательно:

$$p_1=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha$$

откуда:

$$\delta = p_1 - p = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p \qquad (32)$$

Откуда видимъ, что если прямая дана въ нормальной формѣ и точка внѣ ея, то результатъ подстановленія координатъ x_1 и y_1 въ данное уравненіе, дастъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x_1, y_1) на прямую.

Если данная точка лежитъ съ той стороны прямой, съ которой лежитъ и начало координатъ, то длину перпендикуляра принимаютъ за величину положительную, въ противномъ случаѣ за величину отрицательную. Слѣдовательно мы должны писать:

$$\delta = +(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p) \qquad (33)$$

въ первомъ случаѣ, и:

$$\delta = -(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p) \qquad (34)$$

во второмъ.

Если уравненіе прямой будетъ въ общей формѣ:

$$Ax + By + C = 0$$

то надобно его привесть въ нормальную форму, какъ это было уже показано (§ 42, 22):

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

подставляя координаты x_1 и y_1 въ это уравненіе, найдемъ:

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \delta \qquad (35)$$

знакъ радикала надобно такъ выбрать, чтобы перпендикуляръ δ имѣлъ величину положительную или отрицательную, смотря по положенію точки относительно прямой, какъ сказано выше.

Пр. 1. Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на прямую:

$$3x + 4y + 20 = 0$$

Отв. $\delta = 4$.

Пр. 2. Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (2, 3) на прямую:

$$2x + y - 4 = 0$$

Отв. $\frac{-3}{\sqrt{5}}$, точка находится съ противуположной стороны начала координатъ.

Пр. 3. Найти длину перпендикуляра изъ начала на прямую:

$$a(x-a) + b(y-b) = 0$$

Отв. $\sqrt{a^2 + b^2}$

§ 46. *Задача.* Найти координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (36)$$

Рѣшеніе. Координаты точки пересѣченія должны удовлетворять обоимъ уравненіямъ, слѣдовательно должно изъ этихъ уравненій опредѣлить x и y:

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \qquad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \qquad (37)$$

или:

$$\frac{x}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y}{A_2C_1 - A_1C_2} = \frac{1}{A_1B_2 - A_2B_1} \qquad (38)$$

Выраженія (37) и будутъ координаты точки пересѣченія прямыхъ. Если въ уравненіяхъ (36) коэфиціенты находятся въ такой зависимости, что знаменатель у x и y:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \qquad (39)$$

то $x = \infty$ и $y = \infty$, если при этомъ числители остаются величинами конечными; слѣдовательно въ этомъ случаѣ прямыя (36) встрѣчаются на безконечности, т. е. онѣ параллельны.

Условіе параллельности (39) можно написать въ формѣ:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (40)$$

т. е. коэфиціенты у x и y въ уравненіяхъ (36) пропорціональны.

Пр. Прямыя:

$$3x + 5y + 1 = 0 \qquad 6x + 10y + 7 = 0$$

параллельны, такъ какъ:

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10}$$

Если при условіи (39) случилось бы, что и одинъ изъ числителей, напримѣръ:

$$B_1C_2 - B_2C_1 = 0$$

то и другой числитель, какъ извѣстно, будетъ также равенъ нулю и координаты примутъ неопредѣленную форму:

$$x = \frac{0}{0} \quad , \quad y = \frac{0}{0}$$

слѣдовательно двѣ данныя прямыя тождественны.

Задача. Найти координаты точки пересѣченія прямой, проходящей черезъ точки (x_1, y_1). (x_2, y_2), съ прямою, данною уравненіемъ:

$$Ax + By + C = 0 \tag{41}$$

Очевидно, это предъидущая задача въ другой формѣ.

Рѣшеніе. Прямая, данная предъидущимъ уравненіемъ, встрѣчая прямую, соединяющую точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), дѣлитъ разстояніе между этими точками въ нѣкоторомъ отношеніи (внутренне или внѣшне); если это неизвѣстное отношеніе означимъ черезъ λ, то координаты искомой точки пересѣченія будутъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

эти координаты должны удовлетворять уравненію (41), слѣдовательно имѣемъ:

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0$$

откуда:

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} \tag{42}$$

Если это выраженіе напишемъ въ формѣ:

$$\lambda = -\frac{\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}}{\dfrac{Ax_2 + By_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \tag{43}$$

то легко видѣть, что числитель и знаменатель этой дроби суть перпендикуляры, опущенные изъ точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) на прямую (41). Знакъ — передъ дробью произошелъ отъ того, что если искомая точка пересѣченія находится между точками (x_1, y_1), (x_2, y_2), то упомянутые перпендикуляры имѣютъ противные знаки, вслѣдствіи чего λ будетъ величина положительная, какъ и слѣдуетъ, для точекъ, лежащихъ между точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2).

§ 47. Съ помощью выраженія для λ (42) можно легко доказать слѣдующее свойство треугольника:

Фиг. 45.

Если прямая линія (фиг. 45) пересѣкаетъ стороны BC, CA, AB треугольника ABC въ точкахъ N, L, M, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{BL.CM.AN}{CL.AM.BN} = -1 \tag{44}$$

Пусть координаты вершинъ треугольника ABC будутъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), то мы будемъ имѣть (42):

$$\frac{BL}{CL} = -\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_3 + By_3 + C}$$

также:

$$\frac{CM}{AM} = -\frac{Ax_3 + By_3 + C}{Ax_1 + By_1 + C}$$

и наконецъ:

$$\frac{AN}{BN} = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$$

перемножая эти выраженія, найдемъ зависимость (44).

Если въ предъидущей задачѣ, уравненіе (41) прямой будетъ дано въ формѣ:

$$(y_3 - y_4)x - (x_3 - x_4)y + x_3y_4 - x_4y_3 = 0$$

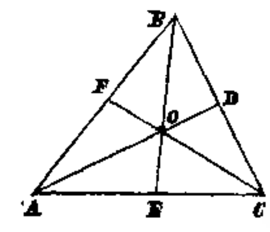
проходящей черезъ данныя двѣ точки (x_3, y_3), (x_4, y_4), то λ будетъ:

$$\lambda = -\frac{(y_3 - y_4)x_1 - (x_3 - x_4)y_1 + x_3y_4 - x_4y_3}{(y_3 - y_4)x_3 - (x_3 - x_4)y_2 + x_3y_4 - x_4y_3} \tag{45}$$

§ 48. На основаніи этого послѣдняго выраженія для λ, можно показать еще слѣдующее свойство треугольника:

Если, какую-нибудь, точку O (фиг. 46), взятую на плоскости, соединимъ прямыми линіями съ вершинами треугольника ABC (фиг. 46), то эти прямыя встрѣчаютъ противуположныя стороны BC, CA и AB въ точкахъ D, E, F, дѣлящія стороны на отрѣзки, которые удовлетворяютъ всегда слѣдующему условію:

Фиг. 46.



$$\frac{BD.CE.AF}{CD.AE.BF} = +1 \tag{46}$$

Если координаты взятой точки будутъ (x_4, y_4), а вершинъ треугольника (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), то мы будемъ имѣть (45):

$$\frac{BD}{CD} = \frac{x_1(y_2 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)}{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)}$$

$$\frac{CE}{AE} = \frac{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}{x_1(y_2 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_2)}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{x_1(y_4 - y_3) + x_4(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_4)}{x_2(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_2 - y_3)}$$

перемножая эти выраженія, найдемъ зависимость (46).

§ 49. *Задача.* Даны уравненія двухъ прямыхъ:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

найти уголъ между ними?

Рѣшеніе. Уголъ между двумя прямыми линіями равенъ углу между перпендикулярами, опущенными изъ начала координатъ на прямыя. Если означимъ черезъ α_1 и α_2 углы, которые перпендикуляры, опущенные изъ начала на прямыя, составляютъ съ осью X, то будемъ имѣть (§ 42, 20):

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad \sin\alpha_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Изъ этихъ выреженій мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \\ \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \end{aligned} \tag{48}$$

откуда:

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \tag{49}$$

Если данныя прямыя параллельны, то $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ и мы будемъ имѣть:

$$A_2 B_1 - A_1 B_2 = 0$$

Если прямыя перпендикулярны, то $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, слѣдовательно мы имѣемъ $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, откуда:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \tag{50}$$

Это условіе перпендикулярности прямыхъ (47), т. е. если сумма произведеній коэфиціентовъ у x и y равна нулю, то прямыя перпендикулярны; условіе (50) можно написать еще въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \tag{51}$$

Если уравненія прямыхъ даны въ формѣ:

$$y = a_1x + b_1 \quad , \quad y = a_2x + b_2 \tag{52}$$

то условіе перпендикулярности будетъ:

$$a_1a_2 + 1 = 0 \tag{53}$$

Слѣдовательно, уравненіе прямой перпендикулярной къ прямой:

$$y = a_1x + b_1$$

будетъ:

$$y = -\frac{1}{a_1}x + b_1$$

если обѣ прямыя проходятъ черезъ точку $(0, b_1)$; если онѣ проходятъ черезъ, какую-нибудь точку (x_1, y_1), то ихъ уравненія будутъ въ общей формѣ:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a_1(x - x_1) \\ y - y_1 &= -\frac{1}{a_1}(x - x_1) \end{aligned} \tag{54}$$

Если уравненіе прямой дано въ общей формѣ:

$$A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) = 0 \tag{55}$$

то уравненіе прямой, проходящей черезъ туже точку (x_1, y_1) и перпендикулярной (55) будетъ:

$$B_1(x - x_1) - A_1(y - y_1) = 0 \tag{56}$$

Если прямая дана въ общей формѣ:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{57}$$

то уравненіе прямой перпендикулярной къ ней и проходящей черезъ точку (x_1, y_1) внѣ ея будетъ (56), гдѣ точка (x_1, y_1) не лежитъ на прямой (57).

§ 50. *Задача.* Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ данную точку (x_1, y_1) и составляющей съ данной прямой данный уголъ?

Рѣшеніе. Пусть данная прямая будетъ:

$$y = ax + b \tag{58}$$

данная точка (x_1, y_1), данный уголъ φ.

Если означимъ tg угла, который искомая прямая составляетъ съ осью X, черезъ a_1, то ея уравненіе будетъ (§ 44, 29):

$$y - y_1 = a_1(x - x_1) \tag{59}$$

уголъ между этими прямыми будетъ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a - a_1}{1 + aa_1} \tag{60}$$

откуда tg искомаго угла a_1 будетъ:

$$a_1 = \frac{a - \operatorname{tg}\varphi}{1 + a\operatorname{tg}\varphi} \tag{61}$$

Пр. 1. Найти уравненія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ (2, 1), (3, —2), (—4, —1) треугольника, на противуположныя вершинамъ стороны?

Отв. Уравненія сторонъ (§ 38, 1):

$$x + 7y + 11 = 0 \quad , \quad 3y - x = 1 \quad , \quad 3x + y = 7$$

Уравненія перпендикуляровъ.

$$7x - y = 13 \quad , \quad 3x + y = 7 \quad , \quad 3y - x = 1$$

Пр. 2. Найти уравненія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ срединъ сторонъ того-же треугольника?

Отв. Координаты срединъ будутъ (§ 4, пр. 3):

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \; ; \; (-1, 0) \; ; \; \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

а перпендикуляры:

$$7x - y + 2 = 0 \quad , \quad 3x + y + 3 = 0 \quad , \quad 3y - x + 4 = 0$$

эти перпендикуляры пересѣкаются въ одной точкѣ $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Пр. 3. Найти уравненія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) треугольника на противуположныя стороны?

Отв.

$$(x_3 - x_2)x + (y_3 - y_2)y + (x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1x_3 + y_1y_3) = 0$$

$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y + (x_1x_2 + y_1y_2) - (x_2x_3 + y_2y_3) = 0$$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + (x_2x_3 + y_2y_3) - (x_1x_3 + y_1y_3) = 0$$

эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 4. Найти уравненія перпендикуляровъ, возставленныхъ изъ срединъ сторонъ того-же треугольника?

Отв.

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) + \frac{1}{2}(y_2^2 - y_3^2) = 0$$

$$(x_3 - x_1)x + (y_3 - y_1)y + \frac{1}{2}(x_3^2 - x_1^2) + \frac{1}{2}(y_3^2 - y_1^2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) = 0$$

эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 5. Взявъ за оси основаніе треугольника и перпендикуляръ изъ вершины на основаніе, найти уравненіе двухъ остальныхъ перпендикуляровъ и точку ихъ пересѣченія?

Отв. Координаты вершинъ треугольника въ этомъ предположеніи будутъ $(0, y_1)$, $(x_1, 0)$, $(-x_2, 0)$, а искомыя уравненія:

$$x = 0 \quad ; \quad x_2(x-x_1)+y_1y = 0 \quad ; \quad x_1(x+x_2)-y_1y=0$$

точка пересѣченія будетъ. $\left(0, \frac{x_1x_2}{y_1}\right)$.

§ 51. *Задача.* Найти уравненіе прямой равнодѣлящей уголъ между прямыми:

$$\begin{aligned} x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0 \\ x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0 \end{aligned} \tag{62}$$

Рѣшеніе. Если вспомнимъ, что перпендикуляры, опущенные изъ каждой точки прямой, равнодѣлящей уголъ между прямыми (62) на эти прямыя, равны, то уравненіе равнодѣлящей, очевидно будетъ:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 \tag{63}$$

Такъ какъ скользящая точка (x, y) находится на равнодѣлящей, то обѣ части уравненія (63) и выражаютъ длину перпендикуляровъ на прямыя (62).

Такъ какъ прямыя (62) заключаютъ еще и другой уголъ, дополненіе перваго до двухъ прямыхъ, то очевидно, что уравненіе равнодѣлящей другой уголъ будетъ:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = -(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2) \tag{64}$$

Если уравненія даны въ общей формѣ:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned} \tag{65}$$

то уравненія обѣихъ равнодѣлящихъ углы между этими прямыми, очевидно, будутъ:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{66}$$

Если начало координатъ дано, т. е. показано въ какомъ изъ угловъ между данными прямыми оно находится, то легко, по принятому условію (§ 42) относительно знака перпендикуляровъ, опущенныхъ на прямую, опредѣлить, какой знакъ надобно принять для равнодѣлящей тотъ уголъ, въ которомъ лежитъ начало и какой знакъ для угла дополнительнаго.

Пр. 1. Дать равнодѣлящей между прямыми нормальную форму:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

Отв.

$$x\cos\left\{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\pi}{2}\right\} + y\sin\left\{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{p_1-p_2}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}$$

$$x\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) + y\sin\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{p_1+p_2}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)}$$

Пр. 2. Если начало координатъ лежитъ внутри треугольника, коего стороны суть:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0$$

$$x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$$

$$x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 = 0$$

то равнодѣлящія внутренніе углы треугольника будутъ:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 - (x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2) = 0$$

$$x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 - (x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3) = 0$$

$$x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 - (x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1) = 0$$

показать, что онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ?

Пр. 3. Найти уравненія равнодѣлящихъ углы между прямыми:

$$3x + 4y - 9 = 0 \quad ; \quad 12x + 5y - 3 = 0$$

Отв.

$$7x - 9y + 34 = 0 \quad ; \quad 9x + 7y - 12 = 0$$

§ 52. *Задача.* Найти условіе пересѣченія трехъ прямыхъ въ одной точкѣ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (67)$$

Если эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, то координаты этой точки должны удовлетворять всѣмъ тремъ уравненіямъ, что влечетъ за собой условіе:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (68)$$

§ 53. *Задача.* Найти условіе, что три точки (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) лежатъ на одной прямой?

Рѣшеніе. Пусть уревненіе прямой будетъ:

$$Ax + By + C = 0 \tag{69}$$

такъ какъ всѣ три точки лежатъ на этой прямой, то мы должны имѣть:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + C &= 0 \\ Ax_2 + By_2 + C &= 0 \\ Ax_3 + By_3 + C &= 0 \end{aligned} \tag{70}$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{71}$$

Если это условіе сравнимъ съ выраженіемъ § 5 для площади треугольника, то увидимъ, что оно съ нимъ тождественно. Если три данныя точки лежатъ на одной прямой линіи, то площадь треугольника $\Delta = 0$.

§ 54. *Задача.* Найти площадь треугольника, коего стороны суть:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{72}$$

Рѣшеніе. Съ помощью этихъ уравненій опредѣлимъ координаты вершинъ треугольника; пусть (x_1, y_1) будетъ точка пересѣченія двухъ послѣднихъ прямыхъ; (x_2, y_2)—первой и третьей; (x_3, y_3)—первой и второй. Опредѣливъ эти координаты, надобно вставить ихъ въ опредѣлитель § 5.

Координаты эти будутъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_2b_2} \quad ; \quad y_1 = \frac{c_2a_3 - c_3a_2}{a_2b_3 - a_3b_2} \\ x_2 &= \frac{b_1c_3 - b_3c_1}{a_1b_3 - a_3b_1} \quad ; \quad y_2 = \frac{c_1a_3 - c_3a_1}{a_1b_3 - a_3b_1} \\ x_3 &= \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad ; \quad y_3 = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned} \tag{73}$$

Числители и знаменатели этихъ выраженій суть миноры опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{74}$$

и

$$x_1 = \frac{A_1}{C_1} \quad ; \quad y_1 = \frac{B_1}{C_1}$$

$$x_2 = \frac{A_2}{C_2} \quad ; \quad y_2 = \frac{B_2}{C_2} \tag{75}$$

$$x_3 = \frac{A_3}{C_3} \quad ; \quad y_3 = \frac{B_3}{C_3}$$

Слѣдовательно площадь искомаго треугольника будетъ:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1}, & \frac{B_1}{C_1}, & 1 \\ \frac{A_2}{C_2}, & \frac{B_2}{C_2}, & 1 \\ \frac{A_3}{C_3}, & \frac{B_3}{C_3}, & 1 \end{vmatrix} \tag{76}$$

или:

$$\Delta = \frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 \tag{77}$$

Ниже мы еще встрѣтимся съ этимъ послѣднимъ выраженіемъ для площади треугольника.

§ 55. *Задача.* Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ?

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{78}$$

Рѣшеніе. Если какое-нибудь изъ двухъ предъидущихъ уравненій помножимъ на неопредѣленный множитель λ и сложимъ ихъ, то получимъ уравненіе:

$$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \tag{79}$$

также прямой, которая проходитъ черезъ точку пересѣченія данныхъ прямыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, координаты точки пересѣченія прямыхъ (78), очевидно, обратятъ въ нуль и уравненіе (79), независимо отъ произвольнаго множителя λ. Давая всѣ возможныя значенія λ отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы получимъ безчисленное множество прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія данныхъ (78). Между всѣми этими находятся и данныя (78), именно когда $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$.

Пр. 1. Найти уравненіе прямой, соединяющей начало координатъ съ точкой пересѣченія прямыхъ:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0 \end{aligned} \tag{80}$$

Умножимъ первое на c_2, а второе на c_1 и вычтемъ, получимъ уравненіе:

$$x(a_1c_2-a_2c_1)+(b_1c_2-b_2c_1)y=0 \tag{81}$$

Эта прямая проходитъ черезъ начало координатъ, такъ какъ уравненіе (81) удовлетворяется координатами $x=0$, $y=0$ и по предъидущему она проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (80).

Пр. 2. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0 \end{aligned} \tag{82}$$

и параллельной оси X?

Отв. $(b_1a_2-b_2a_1)y+c_1a_2-c_2a_1=0$

Пр. 3. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2&=0 \end{aligned} \tag{83}$$

и черезъ точку (x_1, y_1)?

Отв. Если прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (83), то ея уравненіе будетъ:

$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0 \tag{84}$$

Но эта прямая, по условію, должна проходить и черезъ точку (x_1, y_1), слѣдовательно:

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1+\lambda(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0 \tag{85}$$

Откуда:

$$\lambda=-\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{a_2x_1+b_2y_1+c_2}$$

вставляя въ уравненіе (84), найдемъ уравненіе искомой прямой:

$$(a_2x_1+b_2y_1+c_2)(a_1x+b_1y+c_1)-(a_1x_1+b_1y_1+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=0 \tag{86}$$

Пр. 4. Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точку $(2, 3)$ и черезъ пересѣченіе прямыхъ:

$$2x+3y+1=0\quad,\quad 3x-4y=5$$

Отв.

$$11(2x+3y+1)+14(3x-4y-5)=0 \quad \text{или} \quad 64x-23y=59$$

Пр. 5. Мы видѣли (§ 44, 29), что:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

есть уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1). Если a разсматривать, какъ неопредѣленный множитель, то это есть уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$y - y_1 = 0 \quad , \quad x - x_1 = 0$$

т. е. черезъ точку, данную координатами $y = y_1$, $x = x_1$.

§ 56. Условіе, данное (§ 52, 68) для пересѣченія трехъ прямыхъ въ одной точкѣ, часто можно замѣнить слѣдующимъ правиломъ:

Три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, если ихъ уравненія, будучи помножены на прилично выбранные множители и алгебраически сложены, тождественно равны нулю, т. е. если:

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) + \nu(a_3x + b_3y + c_3) = 0$$

какія бы нибыли x и y.

Въ самомъ дѣлѣ, координаты точки пересѣченія первыхъ двухъ обращаютъ въ нуль первые два члена предъидущаго тождества, но въ силу тождества тѣже координаты должны обращать въ нуль и третій членъ.

Пр. 1. Три прямыя, соединяющія вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) угловъ треугольника со срединами противулежащихъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Отв. Легко видѣть, что уравненія равнодѣлящихъ суть:

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y + (x_2y_1 - x_1y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) = 0$$

$$(y_3 + y_1 - 2y_2)x - (x_3 + x_1 - 2x_2)y + (x_3y_2 - x_2y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

$$(y_1 + y_2 - 2y_3)x - (x_1 + x_2 - 2x_3)y + (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0$$

Такъ какъ эти три уравненія будучи сложены даютъ тождественно нуль, то онѣ пересѣкаются въ одной точкѣ, коей координаты суть:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Пр. 2. Если уравненія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ треугольника (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) на противулежащія стороны (§ 50, пр. 3), сложимъ, то получимъ въ результатѣ тождество нуль, слѣдовательно они пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 3. Приложить тоже къ примѣру 4, § 50.

Пр. 4. Показать тоже, взявъ за координатныя оси стороны треугольника, коихъ длина есть a и b?

Отв.

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad , \quad \frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 1 \quad , \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

§ 57. ***Мнимая прямая.*** Если въ количественный матеріалъ введемъ и числа составныя, то перемѣнныя или скользящія координаты могутъ получить и составныя формы:

$$x = a_1 + a_2 i \quad , \quad y = b_1 + b_2 i \tag{87}$$

соотвѣтствующая этимъ координатамъ точка есть *мнимая.* Двѣ мнимыя точки называются *сопряженными*, когда онѣ отличаются только знакомъ передъ i, таковы:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + a_2 i \quad , \quad y_1 = b_1 + b_2 i \\ x_2 &= a_1 - a_2 i \quad , \quad y_2 = b_1 - b_2 i \end{aligned} \tag{88}$$

Точка равнодѣлящая разстояніе между сопряженными точками дѣйствительная, такъ какъ ея координаты суть (§ 4, пр. 3):

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad \frac{y_1 + y_2}{2}$$

или:

$$x = a_1 \quad , \quad y = b_1 \tag{89}$$

Прямая, проходящая черезъ двѣ сопряженныя точки, дѣйствительна. Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіи:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{90}$$

подставимъ выраженія для $(x_1 . y_1)$, (x_2, y_2), (88), то найдемъ:

$$\frac{y - b_1 - b_2 i}{x - a_1 - a_2 i} = \frac{b_2 i}{a_2 i} = \frac{b_2}{a_2}$$

или:

$$y - b_1 = \frac{b_2}{a_2}(x - a_1) \tag{91}$$

а это уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (a_1, b_1) и составляющей съ осью X уголъ, коего tg равенъ $\frac{b_2}{a_2}$.

Мы выше видѣли, что точка (a_1, b_1) лежитъ на срединѣ между точками $(a_1 + a_2 i,\ b_1 + b_2 i)$, $(a_1 - a_2 i,\ b_1 - b_2 i)$, слѣдовательно прямая (91) проходитъ черезъ эту точку.

§ 58. Уравненіе прямой:

$$Ax + By + C = 0 \tag{92}$$

гдѣ A, B, C суть количества дѣйствительныя, удовлетворяется дѣйствительными координатами точекъ, лежащихъ на этой прямой, но оно удовлетворяется еще безчисленнымъ множествомъ точекъ мнимыхъ, поэтому можно сказать, что прямая (92) содержитъ еще безчисленное множество мнимыхъ точекъ.

Пусть a_1+a_2i, b_1+b_2i, будутъ координаты мнимой точки, удовлетворяющія уравненію (92), то мы будемъ имѣть:

$$A(a_1+a_2i)+B(b_1+b_2i)+C=0$$

откуда:

$$Aa_1+Bb_1+C=0 \quad , \quad Aa_2+Bb_2=0 \tag{93}$$

числа a_1 и b_1, a_2 и b_2 суть координаты двухъ дѣйствительныхъ точекъ, изъ коихъ одна лежитъ на прямой (92), а другая на прямой:

$$Aa_2+Bb_2=0$$

Съ помощью уравненій (93) можно опредѣлить отношенія $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, которыя входятъ въ уравненіе прямой, проходящей черезъ данную мнимую точку $(a_1+a_2i,\ b_1+b_2i)$.

Уравненія (93) даютъ только одну систему величинъ для этихъ отношеній, слѣдовательно есть только одна прямая, проходящая черезъ данную мнимую точку.

§ 59. Самое общее уравненіе мнимой прямой есть.

$$(A_1+A_2i)x+(B_1+B_2i)y+C_1+C_2i=0 \tag{94}$$

Это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$A_1x+B_1y+C_1+i(A_2x+B_2y+C_2)=0 \tag{95}$$

изъ этой формы видно, что прямая (94) проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (§ 55, 79):

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0\\ A_2x+B_2y+C_2&=0 \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Слѣдовательно, каждая мнимая прамая, проходитъ только черезъ одну дѣйствительную точку на плоскости.

Уравненія двухъ сопряженныхъ прямыхъ суть:

$$\left.\begin{aligned} (A_1+A_2i)x+(B_1+B_2i)y+C_1+C_2i&=0\\ (A_1-A_2i)x+(B_1-B_2i)y+C_1-C_2i&=0 \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Эти уравненія можно написать въ формѣ:

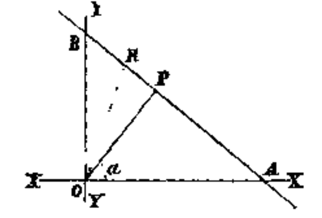
$$
\begin{aligned}
A_1x + B_1y + C_1 + i(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \\
A_1x + B_1y + C_1 - i(A_2x + B_2y + C_2) = 0
\end{aligned}
\tag{98}
$$

Откуда видно, что обѣ эти прямыя проходятъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ (96). Слѣдовательно двѣ сопряженныя прямыя пересѣкаются въ дѣйствительной точкѣ.

Ни мнимыя точки, ни мнимыя прямыя, не могутъ быть построены геометрически, т. е. не могутъ быть видимы для глаза, тѣмъ не менѣе онѣ ведутъ къ аналитическимъ комбинаціямъ, которымъ давая геометрическій смыслъ дѣйствительныхъ значеній, получаютъ весьма замѣчательные выводы и обобщенія.

§ 60. *Уравненіе прямой въ полярныхъ координатахъ.* Пусть AB (фиг. 47) будетъ прямая, отнесенная къ прямоугольнымъ осямъ OX и OY. Изъ начала O проведемъ OP перпендикулярно AB и возьмемъ OP за начало угловъ, а O за полюсъ.

Фиг. 47.



Если R есть, какая-нибудь точка на прямой AB, то $OR = \rho$, $\angle POR = \varphi$. Изъ $\triangle POR$ мы имѣемъ:

$$OR \cos POR = OP$$

откуда:

$$\rho \cos \varphi = p \tag{99}$$

если $OP = p$.

Если бы за начало угловъ была взята ось X, то уравненіе прямой, если $\angle XOR = \varphi$, будетъ:

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p \tag{100}$$

гдѣ α есть уголъ XOP.

Уравненіе (100) можно получить преобразованіемъ уравненія:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

Извѣстно, что (§ 37):

$$x = \rho \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \varphi$$

подставляя, найдемъ:

$$\rho(\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = p$$

откуда:

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p$$

Пр. 1. Преобразовать уравненіе:

$$\rho = 2a \sec\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)$$

въ прямоугольныя координаты?

Пр. 2. Найти полярныя координаты точки пересѣченія прямыхъ:

$$\rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 2a \quad , \quad \rho \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = a$$

и уголъ между ними?

Отв.

$$\rho = 2a \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \text{уголъ есть } \frac{\pi}{3}$$

Пр. 3. Найти полярное уравненіе прямой, проходящей черезъ точки (ρ_1, φ_1), (ρ_2, φ_2)?

Отв. $\rho_1\rho_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \rho\rho_2 \sin(\varphi_2 - \varphi) + \rho\rho_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = 0$

Пр. 4. Найти условіе перпендикулярности двухъ прямыхъ:

$$\rho \cos(\varphi - \varphi_1) = p_1 \quad , \quad \rho \cos(\varphi - \varphi_2) = p_2$$

Отв. $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА V.

Двойственность координатъ.

Прямая и точка.

§ 61. Если обратимъ вниманіе на геометрическое опредѣленіе прямой и точки, то увидимъ, что онѣ въ отвлеченномъ смыслѣ тождественны, то есть по опредѣленію, между прямою линіею и точкою, нѣтъ разницы. Отличаются же онѣ только конкретнымъ геометрическимъ представленіемъ. Изъ этой отвлеченной тождественности вытекаетъ методъ извѣстный въ аналитической геометріи, подъ именемъ *двойственности координатъ.*

Вотъ свойства прямой и точки, дающія начало двойственности.

1. Прямая линія вполнѣ опредѣляется двумя точками.	1. Точка вполнѣ опредѣляется двумя прямыми линіями.
2. Если двѣ точки одной прямой совмѣщаются съ двумя точками другой прямой, то обѣ прямыя совмѣщаются	2. Если двѣ прямыя одной точки совмѣщаются съ двумя прямыми другой точки, то обѣ точки совмѣщаются.
3. Двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ.	3. Двѣ точки могутъ лежать только на одной прямой.

Изъ предъидущаго видимъ, что между прямою и точкою разница заключается въ словахъ: *прямая и точка*, *точка и прямая.*

§ 62. Методъ Декарта состоитъ въ томъ, что положеніе точки на плоскости опредѣляется относительно двухъ прямыхъ, проведенныхъ произвольно на плоскости; прямыя эти называются *координатами*, а точка ихъ пересѣченія называется *началомъ координатъ.*

Въ силу двойственнаго смысла опредѣленія прямой или точки, выраженнаго въ предъидущемъ параграфѣ, можно представить другую координатную систему, въ которой вмѣсто двухъ прямыхъ берутъ *двѣ точки*, которыя и будутъ соотвѣтствовать *абсциссѣ* и *ординатѣ* Декарта, а прямая, соединяющая двѣ взятыя точки будетъ соотвѣтствовать *началу* координатъ. Въ этой системѣ всякая прямая такъ опредѣляется относительно *координатныхъ точекъ* и прямой соединяющей ихъ, какъ точка опредѣляется относительно декартовыхъ координатъ и точки ихъ пересѣченія — *начала.*

Въ силу такого условія, положеніе прямой на плоскости будетъ опредѣлятся двумя числами (координатами) или двумя уравненіями, а точка однимъ уравненіемъ первой степени между координатами прямой. Въ декартовой системѣ точка, коей координаты удовлетворяютъ уравненію первой степени, *скользитъ* по прямой, которой алгебраическое представленіе и есть это уравненіе, а въ настоящей системѣ, прямая, коей координаты удовлетворяютъ уравненію первой степени, *вращается* около точки, коей алгебраическое представленіе и есть это уравненіе. Въ этой системѣ всякое уравненіе, какой бы нибыло степени, между двумя координатами прямой, будетъ опредѣлять безчисленное множество положеній прямой на плоскости, послѣдовательное пересѣченіе которыхъ образуетъ геометрическое мѣсто или кривую, которой движущаяся прямая касается во всѣхъ своихъ положеніяхъ.

Слѣдовательно, разъ геометрическое мѣсто есть непрерывный рядъ точекъ, удовлетворяющихъ извѣстному уравненію, а другой разъ геометрическое мѣсто или кривая есть непрерывный рядъ прямыхъ, удовлетворяющихъ извѣстному условію; напримѣръ: окружность есть геометрическое мѣсто точекъ или прямыхъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ данной точки—центра.

Мы не станемъ развивать эту систему координатъ, такъ какъ въ такомъ пріемѣ мы потеряемъ въ единствѣ координатной идеи, а мысль *двойственности* мы разовьемъ изъ декартовой системы.

Мы видѣли, что въ декартовой системѣ координатъ положеніе точки на плоскости опредѣляется двумя числами, координатами, или что тоже,

двумя уравненіями, а геометрическое мѣсто точекъ, однимъ уравненіемъ.

Геометрическое мѣсто точекъ, лежащихъ на прямой представляется алгебраически однимъ уравненіемъ первой степени между координатами точекъ.

Въ уравненіе прямой входятъ величины во первыхъ, опредѣляющія положеніе прямой относительно координатныхъ осей, а во вторыхъ величины, опредѣляющія положеніе, каждой точки на прямой; первыя изъ этихъ величинъ для одной и той-же прямой *постоянны*, а вторыя должны удовлетворять уравненію прямой, слѣдовательно величины *перемѣнныя* онѣ называются *бѣгущими* или *скользящими* координатами точекъ на прямой.

Величины, входящія въ уравненіе прямой и опредѣляющія ея положеніе суть координаты двухъ данныхъ точекъ. Эти двѣ точки, выбранныя извѣстнымъ образомъ, даютъ различныя формы уравненію прямой. Самое удобное положеніе точекъ для нашей цѣли, есть то, въ которомъ одна изъ точекъ взята на оси X $(a, 0)$, а другая по оси Y $(0, b)$. Уравненіе прямой при такомъ выборѣ точекъ, какъ мы видѣли, принимаетъ форму:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (1)$$

или:

$$\xi x+\eta y+1=0 \qquad (2)$$

полагая:

$$\xi=-\frac{1}{a}\quad,\quad \eta=-\frac{1}{b} \qquad (3)$$

форма уравненія (2), какъ видно, замѣчательна въ томъ отношеніи, что она симметрична относительно x и y и ξ и η. Эта симметрія и слѣдствія, изъ нея вытекающія, и были причиною выбора этой формы уравненія.

Въ уревненіи:

$$\xi x+\eta y+1=0$$

ξ, η суть координаты прямой, опредѣляющія ея положеніе, а x, y координаты точекъ на прямой. Первыя величины—постоянныя, а вторыя величины—перемѣнныя.

§ 63. Возьмемъ на прямой:

$$\xi x+\eta y+1=0 \qquad (4)$$

опредѣленную точку (x_1, y_1). Координаты этой точки должны удовлетворять уравненію (4), слѣдовательно:

$$\xi x_1+\eta y_1+1=0 \qquad (5)$$

Если въ этомъ уравненіи, оставивъ координаты x_1, y_1 постоянными, будемъ измѣнять ξ, η такъ, чтобы онѣ удовлетворяли уравненію (5), то мы получимъ безчисленное множество прямыхъ, которыя всѣ будутъ проходить черезъ точку (x_1, y_1), т. е. будутъ вращатся около точки (x_1, y_1).

Слѣдовательно, если въ уравненіи:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \tag{6}$$

ξ, η будутъ величины постоянныя, а x, y перемѣнныя, то точка, коей координаты удовлетворяютъ предъидущему уравненію, будетъ скользить по прямой, коей положеніе опредѣляется постоянными величинами ξ, η. Если въ томъ же уравненія x, y будутъ величины постоянныя, а ξ, η перемѣнныя, то прямая, коей координаты удовлетворяютъ тому-же уравненію, будетъ вращатся около точки, коей положеніе опредѣляется величинами x, y.

Поэтому уравненіе:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0$$

называютъ уравненіемъ точки (x_1, y_1), около которой вращаются всѣ прямыя, коихъ координаты ξ, η удовлетворяютъ предъидущему уравненію.

Изъ этого вытекаетъ *двойной* взглядъ на уравненіе первой степени:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

Оно есть уравненіе *прямой*, если ξ, η суть величины постоянныя, а x, y перемѣнныя;—оно есть уравненіе *точки*, если ξ, η суть величины перемѣнныя, а x, y постоянныя.

Это начало *двойственности*. Оно вытекаетъ изъ тождественности опредѣленій точки и прямой. Опредѣленіе точки переходитъ въ опредѣленіе прямой, а опредѣленіе прямой переходитъ въ опредѣленіе точки, замѣщеніемъ слова: *точка—прямою*, а *прямая—точкою*.

Смыслъ уравненія (6) можно выразить, говоря: что оно есть совмѣстное представленіе прямой и точки, т. е. представленіе положенія, въ которомъ точка находится на прямой, а прямая проходитъ черезъ точку.

Такъ какъ геометрическія теоремы относятся или къ системѣ точекъ или къ системѣ прямыхъ, или къ тому и другому, то изъ предъидущаго видно, что точка въ геометріи прямой играетъ такую-же роль, какую прямая въ геометріи точки.

Итакъ въ аналитической геометріи есть два основные элемента для изслѣдованія—точка и прямая, обѣ даются и координатами и уравненіемъ,

обѣ въ отвлеченномъ представленіи, т. е. въ алгебраическомъ, тождественны, а различаются только конкретнымъ представленіемъ.

§ 64. Перенесемъ теперь теоремы, по смыслу двойственности, найденныя въ теоріи прямой, на теоремы въ теоріи точки.

1. Уравненіе первой степени относительно координатъ x, y представляетъ прямую линію.

1. Уравненіе первой степени относительно координатъ ξ, η представляетъ точку.

Въ уравненіи:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

постоянные коэфиціенты суть вмѣстѣ и координаты, представляемаго уравненіемъ элемента, т. е., если предъидущее уравненіе представляетъ прямую, то коэфиціенты ξ, η суть ея координаты, а если оно представляетъ точку, то постоянные коэфиціенты x, y суть ея координаты.

2. Если положеніе прямой дано координатами ξ_1, η_1 то ея уравненіе:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

3. Если прямая дана уравненіемъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

то ея координаты суть:

$$\xi_1 \ , \ \eta_1$$

4. Если уравненіе прямой дано въ самой общей формѣ:

$$Ax + By + C = 0$$

то ея координаты суть:

$$\xi = \frac{A}{C} \quad , \quad \eta = \frac{B}{C}$$

2. Если положеніе точки дано координатами x_1, y_1 то ея уравненіе:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

3. Если точка дана уравненіемъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

то ея координаты суть:

$$x_1 \ , \ y_1$$

4. Если уравненіе точки дано въ самой общей формѣ:

$$A\xi + B\eta + C = 0$$

то ея координаты суть:

$$x = \frac{A}{C} \quad , \quad y = \frac{B}{C}$$

Эта взаимность не имѣла-бы мѣста, если мы за координаты прямой взяли-бы отрѣзки, которые она дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ.

5. Уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки:

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_2)$$

есть:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

5. Уравненіе точки находящейся на пересѣченіи двухъ данныхъ прямыхъ:

$$(\xi_1, \eta_1) \ , \ (\xi_2, \eta_2)$$

есть:

$$\frac{\xi - \xi_1}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_1 - \eta_2}$$

Изъ предъидущихъ примѣровъ видимъ, что дѣйствія и результаты изъ нихъ вытекающія, въ обоихъ случаяхъ однѣ и тѣже, только значеніе постоянныхъ и перемѣнныхъ величинъ различно.

§ 65. Но тамъ, гдѣ входятъ отрѣзки и углы такого преобразованія сдѣлать непосредственно нельзя, а можно сдѣлать перенося задачу на прямую, коей координаты входятъ въ задачу. Возьмемъ для примѣра задачу, уже рѣшенную для прямой (§ 45).

Задача. Найти разстояніе точки, данной уравненіемъ:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0 \tag{7}$$

отъ прямой данной координатами (ξ_1, η_1)?

Рѣшеніе. Мы видѣли (§ 64, 2), что уравненіе прямой, данной координатами (ξ_1, η_1) есть:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

а въ нормальной формѣ:

$$\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = 0$$

Но координаты точки, данной уравненіемъ (7) суть (x_1, y_1), слѣдовательно, если искомое разстояніе означимъ черезъ r, то будемъ имѣть:

$$\frac{\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = r \tag{8}$$

Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ координаты ξ_1, η_1 перемѣнными, удовлетворяющими постоянно этому уравненію, то прямая, перемѣщаясь, будетъ находится постоянно на разстояніи r отъ точки, коей уравненіе будетъ слѣдующее:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0$$

а координаты (x_1, y_1).

Слѣдовательно:

$$\frac{x_1\xi + y_1\eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = r$$

или:

$$(x_1\xi + y_1\eta + 1)^2 = r^2(\xi^2 + \eta^2) \tag{9}$$

будетъ уравненіе круга, тогда какъ уравненіе круга въ декартовыхъ координатахъ есть:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

гдѣ x_1, y_1 суть координаты центра.

Изъ этихъ выраженій видимъ, что кругъ, какъ въ одной, такъ и въ другой системѣ координатъ, относительно перемѣнныхъ—втораго порядка и втораго класса.

§ 66. *Задача.* Найти уголъ между двумя прямыми, данными координатами (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2)?

Рѣшеніе. Уравненія прямыхъ, коихъ координатъ (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) будутъ (§ 64, 1):

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0 \quad , \quad \xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0 \tag{10}$$

слѣдовательно уголъ между этими прямыми будетъ (§ 49, 48):

$$\sin\varphi = \frac{\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1}{\sqrt{\xi^2_1 + \eta^2_1}\sqrt{\xi^2_2 + \eta^2_2}} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2}{\sqrt{\xi^2_1 + \eta^2_1}\sqrt{\xi^2_2 + \eta^2_2}} \tag{11}$$

Изъ этихъ выраженій найдемъ условіе параллельности прямыхъ:

$$\sin\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0 \tag{12}$$

а условіе перпендикулярности:

$$\cos\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 = 0 \tag{13}$$

§ 67. Въ § 43 мы видѣли, что если въ уравненіи прямой, оставляя коэфиціенты при x, y (перемѣнныхъ) постоянными. будемъ измѣнять только постоянный членъ, то прямая будетъ переноситься, на плоскости, параллельно самой себѣ. Что сдѣлается съ точкою, если въ ея уравненіи сдѣлаемъ тоже, т. е. оставимъ коэфиціенты при ξ, η неизмѣнными, а будемъ измѣнять постоянный членъ?

Пусть уравненіе точки будетъ дано въ самой общей формѣ:

$$A\xi + B\eta + C = 0 \tag{14}$$

Координаты точки будутъ (§ 64, 4):

$$x = \frac{A}{C} \quad , \quad y = \frac{B}{C}$$

Если постоянное C будемъ измѣнять, то координаты точки, измѣняясь, будутъ удовлетворять уравненіе:

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A} \tag{15}$$

Слѣдовательно точка, данная уравненіемъ, будетъ скользить по прямой (15), проходящей черезъ начало координатъ.

§ 68. *Задача 1.* Даны уравненія двухъ прямыхъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

$$\xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0$$

Найти координаты точки ихъ пересѣченія?

Координаты точки пересѣченія должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ, слѣдовательно нужно опредѣлить x и y изъ данныхъ уравненій.

Задача 1. Даны уравненія двухъ точекъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

$$x_2 \xi + y_2 \eta + 1 = 0$$

Найти координаты прямой, проходящей черезъ эти точки?

Координаты прямой, проходящей черезъ данныя точки должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ, слѣдовательно, нужно опредѣлить ξ и η изъ данныхъ уравненій.

Поставимъ еще въ параллель слѣдующія двѣ задачи относительно прямыхъ и точекъ.

Задача 2. Найти условіе пересѣченія трехъ прямыхъ, данныхъ уравненіями, въ одной точкѣ?

Три прямыя:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

$$\xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0$$

$$\xi_3 x + \eta_3 y + 1 - 0$$

Если эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, то координаты x, y этой точки должны удовлетворять всѣ три предъидущія уравненія, а для этого необходимо условіе между коэфиціентами:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Задача 2. Найти условіе, при которомъ три точки, данныя уравненіями, лежать на одной прямой?

Три точки:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

$$x_2 \xi + y_2 \eta + 1 = 0$$

$$x_3 \xi + y_3 \eta + 1 = 0$$

Если эти три точки лежатъ на одной прямой, то координаты ξ, η этой прямой должны удовлетворять всѣ три предъидущія уравненія, а для этого необходимо условіе между коэфиціентами:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Задача 3. Найти условіе, при которомъ три точки, данныя координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), лежать на одной прямой?

Если три точки:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)$$

лежатъ на одной прямой:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

Задача 3. Найти условіе, при которомъ три прямыя, данныя координатами (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3), пересѣкаются въ одной точкѣ?

Если три прямыя:

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$$

пересѣкаются въ одной точкѣ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

то мы имѣемъ:

$$\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + 1 = 0$$
$$\xi_1 x_2 + \eta_1 y_2 + 1 = 0$$
$$\xi_1 x_3 + \eta_1 y_3 + 1 = 0$$

откуда имѣемъ искомое условіе:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

то мы имѣемъ:

$$x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + 1 = 0$$
$$x_1\xi_2 + y_1\eta_2 + 1 = 0$$
$$x_1\xi_3 + y_1\eta_3 + 1 = 0$$

откуда имѣемъ искомое условіе:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Если сравнимъ эти послѣднія условія съ предъидущими, то увидимъ, что то, которое въ одномъ случаѣ стоитъ въ правомъ столбцѣ, переходитъ, въ другомъ случаѣ, въ лѣвый и обратно.

§ 69. *Задача.* Найти уравненія точекъ пересѣченія трехъ прямыхъ:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \tag{16}$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

Рѣшеніе. Если черезъ ξ и η означимъ координаты, какой-нибудь, прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ данныхъ послѣдними двумя уравненіями (16), то ея уравненіе будетъ:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0 \tag{17}$$

Координаты точки пересѣченія трехъ прямыхъ:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \tag{18}$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

должны удовлетворять этимъ тремъ уравненіямъ, слѣдовательно (§ 52) между коэфиціентами этихъ уравненій должно существовать условіе:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Если ξ, η координаты прямой (17), измѣняясь, будутъ всегда удовлетворять предъидущему уравненію, то прямая (17) будетъ всегда проходить

черезъ пересѣченія послѣднихъ двухъ прямыхъ (16): слѣдовательно (19) будетъ уравненіе этой точки. Если изъ коэфиціентовъ уравненія (16) составимъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = R \tag{20}$$

то легко видѣть, что коэфиціенты при ξ и η въ уравненіи суть миноры опредѣлителя R, соотвѣтствующіе элементамъ a_1, b_1, c_1. Если эти миноры означимъ черезъ A_1, B_1, C_1, то опредѣлитель (19), или уравненіе искомой точки, можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1 = 0 \tag{21}$$

Изъ сказаннаго легко видѣть, что:

$$\begin{aligned} A_2\xi + B_2\eta + C_2 = 0 \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3 = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

будутъ уравненія точекъ пересѣченія прямыхъ (16): первой и третьей, первой и второй. A_2, B_2, C_2, A_3, B_3 и C_3 суть миноры опредѣлителя R (20), соотвѣтствующіе a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 и c_3.

§ 70. *Задача.* Найти уравненія трехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точки:

$$\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0 \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0 \\ a_3\xi + b_3\eta + c_3 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Рѣшеніе. Разсужденіе подобное предыдущему, даетъ намъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

гдѣ A, B, C суть миноры опредѣлителя R (§ 69).

Легко видѣть, что если бы были даны уравненія (21), (22) или

(17) въ минорахъ, то подобный пріемъ, какой изложенъ выше, приведетъ къ уравненіямъ (23) и уравненіямъ (18). Замѣтимъ при этомъ, что:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 \tag{25}$$

§ 71. Задачу § 54 можно рѣшить теперь гораздо проще. Если стороны искомаго треугольника даны уравненіями:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

то уравненія его вершинъ будутъ (§ 69, 21, 22):

$$\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + C_1 &= 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2 &= 0 \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3 &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

Слѣдовательно координаты вершинъ будутъ:

$$\left(\frac{A_1}{C_1}, \frac{B_1}{C_1}\right), \left(\frac{A_2}{C_2}, \frac{B_2}{C_2}\right), \left(\frac{A_3}{C_3}, \frac{B_3}{C_3}\right) \tag{28}$$

откуда площадь треугольника, коего вершины суть (27), будетъ:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1}, & \frac{B_1}{C_1}, & 1 \\ \frac{A_2}{C_2}, & \frac{B_2}{C_2}, & 1 \\ \frac{A_3}{C_3}, & \frac{B_3}{C_3}, & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2C_1C_2C_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

§ 72. Найти площадь треугольника, коего вершины даны уравненіями:

$$\begin{aligned} x_1\xi + y_1\eta + 1 &= 0 \\ x_2\xi + y_2\eta + 1 &= 0 \\ x_3\xi + y_3\eta + 1 &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Если эти уравненія представляютъ вершины треугольника, то координаты

этихъ вершинъ будутъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Слѣдовательно треугольникъ будетъ (§ 5):

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Если уравненія вершинъ даны въ самой общей формѣ:

$$a_1\xi + b_1\eta + c_1 = 0$$

$$a_2\xi + b_2\eta + c_2 = 0$$

$$a_3\xi + b_3\eta + c_3 = 0$$

то координаты этихъ вершинъ будутъ:

$$\left(\frac{a_1}{c_1}, \frac{b_1}{c_1}\right), \left(\frac{a_2}{c_2}, \frac{b_2}{c_2}\right), \left(\frac{a_3}{c_3}, \frac{b_3}{c_3}\right)$$

слѣдовательно площадь треугольника будетъ:

$$\Delta = \frac{1}{2c_1c_2c_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ГЛАВА VI.

Прямая и точка.

§ 73. Въ уравненіи прямой:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0 \tag{1}$$

неподвижный элементъ есть сама прямая, данная координатами (ξ_1, η_1), а подвижный элементъ есть скользящая точка; координаты x, y этой точки должны удовлетворять уравненіе (1). Слѣдовательно элементъ постоянный въ уравненіи (1) есть (ξ_1, η_1), а перемѣнный x, y.

Въ уравненіи точки:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0 \tag{2}$$

неподвижный элементъ есть точка, данная координатами (x_1, y_1), а под-

вижный элементъ есть прямая, постоянно, проходящая черезъ точку (x_1, y_1) и коей координаты ξ, η должны удовлетворять уравненію (2).

Слѣдовательно уравненія:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

$$x_1 \xi + y_1 \eta + 1 = 0$$

представляютъ неподвижные элементы, первое прямую, а второе точку.

Изъ двухъ неподвижныхъ элементовъ, принадлежащихъ одной системѣ, можно построить одинъ неподвижный элементъ, принадлежащій другой системѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$\begin{aligned} \xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0 \\ \xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

будутъ уравненія двухъ прямыхъ. Если одно изъ этихъ уравненій, напр. второе, помножимъ на неопредѣленный *параметръ* λ и сложимъ съ первымъ, то получимъ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ (3) (§ 55):

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 + \lambda(\xi_2 x + \eta_2 y + 1) = 0 \qquad (4)$$

или:

$$\frac{\xi_1 + \lambda\xi_2}{1 + \lambda} x + \frac{\eta_1 + \lambda\eta_2}{1 + \lambda} y + 1 = 0 \qquad (5)$$

координаты этой прямой суть:

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda\xi_2}{1 + \lambda} \quad , \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda\eta_2}{1 + \lambda} \qquad (6)$$

Съ измѣненіемъ *параметра* λ, прямая, выраженная уравненіемъ (6), вращается около точки пересѣченія прямыхъ (3), имѣя всегда своими координатами выраженія (6). Это будетъ подвижный элементъ, принадлежащій второй системѣ. Если между выраженіями (6) исключимъ *параметръ* λ, то найдемъ уравненіе:

$$\begin{vmatrix} \xi - \xi_1 & , & \eta - \eta_1 \\ \xi_1 - \xi_2 & , & \eta_1 - \eta_2 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

Это уравненіе точки или неподвижный элементъ второй системы.

§ 74. Если все то, что мы сказали въ предыдущемъ параграфѣ относительно двухъ прямыхъ, перенесемъ на двѣ точки, коихъ уравненія суть:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0 \quad , \quad x_2\xi + y_2\eta + 1 = 0 \tag{8}$$

то найдемъ, что:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 + \lambda(x_2\xi + y_2\eta + 1) = 0 \tag{9}$$

или:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\xi + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\eta + 1 = 0 \tag{10}$$

есть уравненіе точки, лежащей на прямой соединяющей точки (8). Координаты этой точки суть:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \tag{11}$$

Измѣняя параметръ λ, точка (9, 10) будетъ двигаться по прямой, имѣя всегда своими координатами выраженія (11).

Уравненія (9) или (10) будутъ представлять неподвижный элементъ второй системы, а выраженія (11) подвижный элементъ первой системы.

Если между уравненіями (11) исключимъ параметръ λ, то найдемъ уравненіе прямой, проходящей черезъ точки (x_1, y_1), (x_2, y_2).

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 0$$

или:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

какъ это уже видѣли выше.

Уравненія.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

даютъ самое общее представленіе прямой, какъ основаніе ряда точекъ.

Уравненія:

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda \xi_2}{1 + \lambda}, \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda}$$

даютъ самое общее представленіе точки, какъ центръ связки прямыхъ.

Итакъ, разъ прямая или точка дается однимъ уравненіемъ, другой разъ онѣ даются, каждая, двумя уравненіями, съ перемѣннымъ параметромъ, исключеніе котораго ведетъ къ уравненію прямой или точки.

§ 75. Разсмотримъ теперь геометрическое значеніе перемѣннаго параметра λ, какъ въ уравненіи прямой, такъ и въ уравненіи точки.

Въ § 4 мы видѣли, что въ выраженіяхъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \tag{12}$$

$\lambda = \frac{m}{n}$, если $\frac{m}{n}$ есть отношеніе, въ которомъ точка (x, y) дѣлитъ разстояніе между точками (x_1, y_1), (x_2, y_2). Если означимъ черезъ s и r разстоянія точки (x, y) отъ точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2), то $\frac{m}{n} = \frac{r}{s} = \lambda$. Слѣдовательно въ уравненіи:

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 + \lambda(x_2\xi + y_2\eta + 1) = 0 \tag{13}$$

λ есть отношеніе разстояній точки, *выраженной предъидущимъ уравненіемъ* отъ точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) черезъ которыя эта прямая проходитъ.

Если уравненіе точки будетъ дано въ самой общей формѣ:

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1 + \mu(A_2\xi + B_2\eta + C_2) = 0 \tag{14}$$

то, очевидно, что отношеніе λ, въ которомъ точка (14) дѣлитъ разстояніе между точками:

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1 = 0 \qquad A_2\xi + B_2\eta + C_2 = 0$$

будетъ:

$$\lambda = \frac{C_2}{C_1}\mu \tag{15}$$

§ 76. Уравненіе:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 + \lambda(\xi_2 x + \eta_2 y + 1) = 0 \tag{16}$$

представляетъ прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0 \qquad \xi_2 x + \eta_2 y + 1 = 0 \tag{17}$$

Эти уравненія, написанныя въ нормальной формѣ, будутъ:

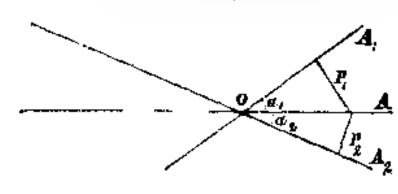
$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}\left(\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_2^2}}\right) = 0$$

$$\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}\left(\frac{\xi_2 x + \eta_2 y + 1}{\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}}\right) = 0 \tag{18}$$

Выраженія, заключенныя въ скобкахъ, для точекъ лежащихъ внѣ прямыхъ, будутъ имѣть числовое значеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ на прямыя. Если для такихъ точекъ означимъ перпендикуляры черезъ p_1, на первую прямую, а черезъ p_2 на вторую, то будемъ имѣть:

$$\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = p_1 \quad , \quad \frac{\xi_2 x + \eta_2 y + 1}{\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} = p_2$$

Фиг. 48.



Пусть прямыя (17) будутъ OA_1 и OA_2 (фиг. 48), то прямая (16) будетъ OA; пусть углы $AOA_1 = \alpha_1$, $AOA_2 = \alpha_2$.

Такъ какъ въ уравненіи (16), точки лежащія на этой прямой относительно прямыхъ (17) будутъ внѣ, то это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \cdot p_1 + \lambda \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \cdot p_2 = 0 \tag{19}$$

откуда:

$$\lambda = -\frac{p_1 \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{p_2 \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \tag{20}$$

Но очевидно:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \tag{21}$$

слѣдовательно:

$$\lambda = -\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \tag{22}$$

Если уравненія (17) будутъ даны въ нормальной формѣ, то есть:

$$x \cos \beta_1 + y \sin \beta_1 - q_1 = 0 \quad , \quad x \cos \beta_2 + y \sin \beta_2 - q_2 = 0$$

то въ уравненіи:

$$x\cos\beta_1+y\sin\beta_1-q_1+\lambda(x\cos\beta_2+y\sin\beta_2-q_2)=0 \tag{23}$$

коэфиціентъ:

$$\lambda=-\frac{p_1}{p_2}=-\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \tag{24}$$

Наконецъ, если уравненія прямыхъ (17) даны въ самой общей формѣ:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{25}$$

то въ уравненіи:

$$A_1x+B_1y+C_1+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0 \tag{26}$$

коэфиціентъ μ, очевидно, будетъ:

$$\mu=\lambda\frac{C_1}{C_2} \tag{27}$$

Изъ всего сказаннаго выше видимъ, что если уравненія двухъ прямыхъ, или двухъ точекъ, даны въ нормальной формѣ:

$$\begin{gathered} x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1=0 \quad , \quad x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0 \\ \frac{x_1\xi+y_1\eta+1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=0 \quad , \quad \frac{x_2\xi+y_2\eta+1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=0 \end{gathered} \tag{28}$$

то въ уравненіи прямой, проходящей черезъ точку ихъ пересѣченія, или въ уравненіи точки, лежащей на прямой, соединяющей эти точки:

$$\begin{gathered} x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1+\lambda(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2)=0 \\ \frac{x_1\xi+y_1\eta+1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}+\lambda\left(\frac{x_2\xi+y_2\eta+1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right)=0 \end{gathered} \tag{29}$$

коэфиціентъ λ, въ первомъ случаѣ, будетъ представлять отношеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ каждой точки прямой (29) на прямыя (28), а во второмъ λ будетъ отношеніе разстояній точки (29) отъ точекъ (28) или отношеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ (28) на всѣ прямыя, проходящія черезъ точку (29).

ГЛАВА VII.

Сокращенный способъ.

Прямая.

§ 77. Если въ уравненіи прямой или точки, написанныхъ въ нормальной формѣ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{1}$$

$$\frac{x\xi + y\eta + 1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0 \tag{2}$$

вставимъ координаты точки, лежащей внѣ прямой или координаты прямой не проходящей черезъ точку, то мы видѣли въ § 45, что числовыя значенія, полученныя отъ такого подстановленія, будутъ выражать длину перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ данной координатами точки на прямую, данную уравненіемъ, или изъ данной уравненіемъ точки на прямую, данную координатами. Слѣдовательно, если означимъ черезъ x_1, y_1 координаты точки внѣ прямой (1), то.

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p = A$$

будетъ длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x_1, y_1) на прямую (1). Если ξ_1, η_1 будутъ координаты прямой внѣ точки (2), то:

$$\frac{x\xi_1 + y\eta_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = A$$

будетъ длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (2) на прямую (ξ_1, η_1).

Если точка (x_1, y_1) находится на прямой (1) или прямая (ξ_1, η_1) проходитъ черезъ точку (2), то длина перпендикуляра A равна нулю. На основаніе такого свойства, прямую (1) и точку (2) обозначаютъ просто одной буквой A, подъ которой разумѣютъ или уравненіе (1) или уравненіе (2). Слѣдовательно уравненіе:

$$A = 0$$

будетъ показывать, что длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на прямую, равна нулю, т. е. точка лежитъ на прямой (1) или прямая проходитъ черезъ точку (2). Такой способъ въ аналитической геометріи называется *сокращеннымъ*; съ помощью его многія предложенія доказываются проще и задачи рѣшаются легче.

§ 78. Условимся разъ навсегда обозначать символами $A_1, A_2, A_3, \ldots$, прямыя:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0 \quad , \quad x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0 ,$$

$$x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 = 0 , \ldots\ldots$$

или точки:

$$\frac{x_1\xi + y_1\eta + 1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0 \quad , \quad \frac{x_2\xi + y_2\eta + 1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0 \quad , \quad \frac{x_3\xi + y_3\eta + 1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0 , \ldots\ldots$$

такъ, что индексы при углахъ α, и при координатахъ x, y соотвѣтствуютъ индексамъ при A. Такъ, напримѣръ, A_n будетъ представлять или прямую:

$$x\cos\alpha_n + y\sin\alpha_n - p_n = 0 \tag{3}$$

или точку:

$$\frac{x_n\xi + y_n\eta + 1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0 \tag{4}$$

смотря потому изображаетъ-ли A_n, сокращенно, прямую или точку. Слѣдовательно подъ уравненіемъ $A_n = 0$ мы будемъ всегда подразумѣвать уравненія (3) или (4).

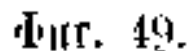
§ 79. Если:

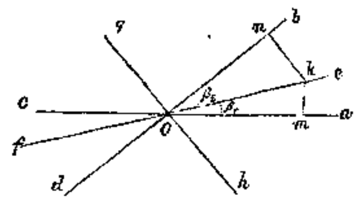
$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \tag{5}$$

будутъ уравненія двухъ прямыхъ въ сокращенной формѣ, то уравненіе:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \tag{6}$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэфиціентъ, будетъ уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ (5).


Фиг. 49.



Давая λ всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ мы получимъ всѣ прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія прямыхъ (5).

Чтобы опредѣлить геометрическое значеніе λ возьмемъ двѣ прямыя ac и bd (фиг. 49), пусть первая будетъ $A_1 = 0$, а вторая $A_2 = 0$.

Пусть ef будетъ прямая:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0$$

Для всѣхъ точекъ на прямой ef, A_1 и A_2 будутъ числовыя значенія перпендикуляровъ, опущенныхъ на прямыя:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

Возьмемъ на ef, какую-нибудь, опредѣленную точку k; пусть перпендикуляры km и kn, на ac и bd, будутъ a_1 и a_2, то мы будемъ имѣть:

$$a_1 + \lambda a_2 = 0$$

откуда:

$$\lambda = -\frac{a_1}{a_2}$$

слѣдовательно уравненіе (6) сдѣлается:

$$A_1 - \frac{a_1}{a_2} A_2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \tag{7}$$

Если начало координатъ въ томъ же углу, въ которомъ лежитъ и прямая ef, т. е. въ $\angle aob$, то перпендикуляры, опущенные изъ точекъ ef, на ac и bd, будутъ или оба положительные или оба отрицательные, смотря потому, будутъ-ли они опущены изъ точекъ прямой ef, лежащихъ въ углѣ aob или лежащихъ въ углѣ cod, въ обѣихъ случаяхъ λ будетъ величина отрицательная. Если-же прямая (6) лежитъ въ углѣ boc, то перпендикуляры a_1 и a_2 будутъ имѣть форму:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \tag{8}$$

Если β_1 и β_2 будутъ углы, которые прямая ef составляетъ съ ac и bd, то, очевидно, мы имѣемъ:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

слѣдовательно уравненія прямыхъ ef и gh можно написать въ формѣ:

$$\frac{A_1}{\sin\beta_1} - \frac{A_2}{\sin\beta_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{\sin\beta_1} + \frac{A_2}{\sin\beta_2} = 0 \tag{9}$$

§ 80. Если прямыя ef и gh будутъ равнодѣлящія углы aob и boc, $a_1 = a_2$ или $\beta_1 = \beta_2$, слѣдовательно уравненія равнодѣлящихъ углы между прямыми $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ будутъ:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 = 0 \tag{10}$$

Очевидно, что уравненія:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0$$

будутъ уравненія прямыхъ, дѣлящихъ углы между прямыми ac и bd въ одномъ и томъ-же отношеніи.

§ 81. Мы видѣли въ § 56, что если уравненія трехъ прямыхъ, помноженныя на прилично выбранные коэфиціенты, даютъ въ суммѣ тождество, то такія прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \tag{11}$$

будутъ уравненія трехъ прямыхъ, которыя, пересѣкаясь, образуютъ треугольникъ. Назовемъ углы этого треугольника, противулежащіе сторонамъ (11) черезъ β_1, β_2, β_3. Если прямыя, проходящія черезъ вершины треугольника (11) будутъ имѣть форму:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_2} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{12}$$

то, очевидно, такія прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, такъ какъ ихъ сумма даетъ тождество. Легко также видѣть, что прямыя:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{13}$$

также, проходящія черезъ вершины треугольника (11), пересѣкаются въ одной точкѣ, такъ какъ сумма перваго и послѣдняго уравненія безъ втораго даетъ тождество.

Если въ уравненіяхъ (12) сдѣлаемъ:

$$a_1 = a_2 = a_3$$

то онѣ сдѣлаются:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0 \quad , \quad A_3 - A_1 = 0 \tag{14}$$

Если начало координатъ находится внутри треугольника (11), то уравненія (14) будутъ уравненія равнодѣлящихъ внутренніе углы треугольника (11), слѣдовательно эти равнодѣлящія пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если въ уравненіяхъ (13) сдѣлаемъ:

$$a_1 = a_2 = a_3$$

то онѣ сдѣлаются:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0 \quad , \quad A_3 - A_1 = 0$$

Первыя два уравненія будутъ равнодѣлящія внѣшніе углы треугольника, а послѣднее будетъ равнодѣлящая внутренній уголъ, слѣдовательно, двѣ равнодѣлящія два внѣшніе угла и равнодѣлящая одинъ внутренній уголъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Задача 1. Найти уравненія трехъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ треугольника (11) на противулежащія стороны, и показать, что эти перпендикуляры пересѣкаются въ одной точкѣ?

Рѣшеніе. Если стороны треугольника будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

то легко видѣть, что синусы угловъ, которые перпендикуляры составляютъ со сторонами треугольника, равны косинусамъ угловъ треугольника, слѣдовательно уравненія этихъ перпендикуляровъ будутъ:

$$\frac{A_1}{\cos\beta_2} - \frac{A_2}{\cos\beta_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{\cos\beta_3} - \frac{A_3}{\cos\beta_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{\cos\beta_1} - \frac{A_1}{\cos\beta_3} = 0$$

формы которыхъ показываютъ, что они пересѣкаются въ одной точкѣ.

Задача 2. Написать уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ вершины треугольника и черезъ средины противулежащихъ сторонъ?

Рѣшеніе. Пусть (фиг. 50) стороны треугольника будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

Фиг. 50.

Если точка D будетъ средина AB, то CD будетъ одна изъ искомыхъ прямыхъ. Если перпендикуляры DE и DF на AC и BC назовемъ черезъ a_1 и a_2, то уравненіе прямой DC будетъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0$$

но очевидно:

$$a_1 = AD\sin\beta_2 \quad , \quad a_2 = DB\sin\beta_1$$

откуда, замѣчая, что.

$$AD = DB$$

найдемъ:

$$A_1\sin\beta_1 - A_2\sin\beta_2 = 0 \quad , \quad A_2\sin\beta_2 - A_3\sin\beta_3 = 0 \quad , \quad A_3\sin\beta_3 - A_1\sin\beta_1 = 0$$

форма этихъ уравненій показываетъ, что искомыя прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ. Послѣднія два уравненія получаются такимъ же образомъ, какъ и первое.

Пр. 1. Показать, что если въ треугольникѣ изъ конца основанія возставимъ перпендикуляръ, то его уравненіе будетъ:

$$A_1 + A_2\cos\beta_3 = 0$$

Пр. 2. Если перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ одного треугольника

на стороны другаго, пересѣкаются въ одной точкѣ, то перпендикуляры опущенные изъ вершинъ втораго треугольника на стороны перваго, также пересѣкутся въ одной точкѣ?

Рѣшеніе. Пусть стороны треугольниковъ будутъ:

$$A_1 = 0 \;\;,\;\; A_2 = 0 \;\;,\;\; A_3 = 0 \;\;;\;\; A'_1 = 0 \;\;,\;\; A'_2 = 0 \;\;,\;\; A'_3 = 0$$

Означимъ черезъ $(A_1\,A_2)$, вообще, уголъ между прямыми $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$, то уравненіе перпендикуляра

изъ вершины $(A_1\,A_2)$ на A'_3

будетъ (§ 81, зад. 1):

$$A_1 \cos(A_2\,A'_3) - A_2 \cos(A_1\,A'_3) = 0$$

изъ вершины $(A_2\,A_3)$ на A'_1

будетъ:

$$A_2 \cos(A_3\,A'_1) - A_3 \cos(A_2\,A'_1) = 0$$

изъ вершины $(A_1\,A_3)$ на A'_2

будетъ:

$$A_3 \cos(A_1\,A'_2) - A_1 \cos(A_3\,A'_2) = 0$$

Условіе, что эти три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ:

$$\cos(A_1\,A'_2)\,.\cos(A_2\,A'_3)\,.\cos(A_3\,A'_1) = \cos(A'_1\,A_2)\,.\cos(A'_2\,A_3)\,.\cos(A'_3\,A_1)$$

коего симметрія показываетъ, что другіе перпендикуляры пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 3. Показать, что прямая:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0$$

составляетъ такой уголъ съ $A_1 = 0$, какой прямая:

$$\lambda A_1 - A_2 = 0$$

составляетъ съ $A_2 = 0$, или, что эти прямыя одинаково наклонены къ равнодѣлящей:

$$A_1 - A_2 = 0$$

Пр. 4. Если черезъ вершины треугольника:

$$A_1 = 0 \;\;,\;\; A_2 = 0 \;\;,\;\; A_3 = 0$$

проведемъ три, какія-нибудь, прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, то прямыя одинаково наклоненныя съ ними къ равнодѣлящимъ углы треугольника, также пересѣкутся въ одной точкѣ?

Рѣшеніе. Уравненія трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ будутъ (§ 81):

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \;\;,\;\; \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \;\;,\;\; \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0$$

Уравненія прямыхъ одинаково наклоненныхъ съ этими послѣдними къ равнодѣлящимъ углы треугольника, очевидно, будутъ:

$$\frac{A_1}{a_2} - \frac{A_2}{a_1} = 0 \;\;,\;\; \frac{A_2}{a_3} - \frac{A_3}{a_2} = 0 \;\;,\;\; \frac{A_3}{a_1} - \frac{A_1}{a_3} = 0$$

или:

$$a_1 A_1 - a_2 A_2 = 0 \;\;,\;\; a_2 A_2 - a_3 A_3 = 0 \;\;,\;\; a_3 A_3 - a_1 A_1 = 0$$

которыя, очевидно пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 5. Выведемъ еще предложеніе изъ уравненія прямой слѣдующей формы:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \tag{15}$$

гдѣ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

суть уравненія сторонъ треугольника.

Уравненіе (15) можно разсматривать, какъ происшедшее изъ сложенія уравненій:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 + A_3 = 0$$

но второе уравненіе есть равнодѣлящая внѣшній уголъ треугольника между сторонами $A_2 = 0$ и $A_3 = 0$, слѣдовательно точка пересѣченія равнодѣлящеи внѣшній уголъ треугольника съ противуположной стороной лежитъ на прямой (15). Дѣлая тоже разсужденіе относительно уравненій:

$$A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_3 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0$$

будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Три точки пересѣченія равнодѣлящихъ внѣшніе углы треугольника съ противуположными сторонами, лежатъ на одной прямой линіи.

Если тоже разсужденіе сдѣлаемъ надъ прямою:

$$A_1 + A_2 - A_3 = 0$$

то получимъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Три точки пересѣченія двухъ равнодѣлящихъ внутренніе углы въ треугольникѣ и одной—внѣшній съ противулежащими сторонами, лежатъ на одной прямой линіи.

Задача. Съ помощью сокращеннаго способа можно доказать свойство треугольника, доказанное выше (§§ 47, 48).

Точка.

§ 82. Если уравненія двухъ точекъ въ нормальной формѣ будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \tag{16}$$

то:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \tag{17}$$

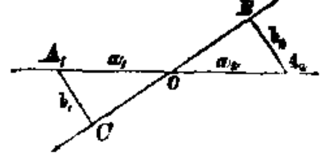
будетъ уравненіе точки, лежащей на прямой проходящей черезъ точки (16).

Числовыя значенія A_1 и A_2 въ уравненіи (17) будутъ перпендикуляры, опущенные изъ точекъ (16) на прямыя, проходящія черезъ точку (17). Слѣдовательно λ въ уравненіи (17) будетъ отношеніе этихъ перпендикуляровъ. Если точка (17) будетъ находится между точками (16), то эти перпендикуляры будутъ имѣть противные знаки, если-же эта точка будетъ внѣ точекъ (16), то они будутъ имѣть одинаковые знаки, то есть будутъ или оба положительные или оба отрицательные.

Пусть A_1A_2 будетъ прямая (фиг. 51), проходящая черезъ точки (16). Пусть O будетъ точка на A_1A_2 между A_1 и A_2.

Если $A_1C=b_1$, $A_2B=b_2$, то для прямой CB мы будемъ имѣть:

Фиг. 51.



$$b_1+\lambda b_2=0$$

откуда:

$$\lambda=-\frac{b_1}{b_2}$$

но b_1 и b_2 имѣютъ противные знаки, слѣдовательно:

$$\lambda=\frac{b_1}{b_2}=\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{a_1}{a_2}$$

откуда уравненіе (16) сдѣлается:

$$A_1+\frac{a_1}{a_2}A_2=0 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}=0 \tag{18}$$

Если точка O будетъ лежать внѣ точекъ A_1 и A_2, то ея уравненіе, очевидно, будетъ:

$$\frac{A_1}{a_1}-\frac{A_2}{a_2}=0 \tag{19}$$

Очевидно, что (18) и (19) суть уравненія точекъ, дѣлящія разстояніе A_1A_2, первая внутренне, а вторая внѣшне, въ отношеніи $a_1:a_2$.

Если $a_1=a_2$ въ уравненіи (18), то:

$$A_1+A_2=0$$

будетъ уравненіе точки, дѣлящей пополамъ разстояніе A_1A_2. Если $a_1=a_2$ въ уравненіи (19), то:

$$A_1-A_2=0$$

будетъ уравненіе точки на безконечности.

§ 83. Если уравненія трехъ точекъ:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_3=0$$

помноженныя, на прилично выбранные коэфиціенты, даютъ въ суммѣ тождество, т. е. если мы имѣемъ:

$$\lambda A_1+\mu A_2+\nu A_3=0$$

то такія три точки лежатъ на одной прямой линіи. Разсужденіе такое, какъ и въ § 56.

Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

суть уравненія вершинъ треугольника, то очевидно, что точки, лежащія на сторонахъ треугольника и данныя уравненіями:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_2} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \qquad (20)$$

или уравненіями:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \qquad (21)$$

лежатъ на одной прямой линіи.

Пр. 1. Если въ уравненіи (20) $a_1 = a_2 = a_3$, то три точки данныя уравненіями

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0 \quad , \quad A_3 - A_1 = 0$$

находятся на безконечности и лежатъ на одной прямой линіи.

Пр. 2. Если $a_1 = a_2 = a_3$ въ уравненіяхъ (21), то средины двухъ сторонъ треугольника и точка на безконечности на третьей сторонѣ лежатъ на одной прямой линіи.

Пр. 3. Уравненія (20) показываютъ, что если разстоянія между точками A_1 и A_2 раздѣлимъ внѣшне въ отношеніи $a_1 : a_2$, разстояніе между A_2 и A_3 раздѣлимъ въ отношеніи $a_1 : a_3$ и наконецъ разстояніе A_3 и A_1 въ отношенія $a_3 : a_1$, то построенныя три точки лежатъ на одной прямой линіи.

Пр. 4. Сдѣлать выводы изъ уравненій:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 - A_3 = 0$$

какія мы сдѣлали относительно прямыхъ линій въ § 81.

Пр. 5. Тоже сдѣлать и относительно уравненій:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_2} = 0$$

ГЛАВА VIII.

Геометрическое мѣсто точекъ есть прямая линія.

§ 84. Геометрическое мѣсто есть непрерывный рядъ точекъ или прямыхъ линій, каждая изъ коихъ удовлетворяетъ извѣстному условію. Это условіе выражается уравненіемъ, въ которое, если введемъ или координаты точекъ или координаты прямыхъ, выбравъ извѣстную систему координатъ, то получимъ уравненіе между координатами, которое и будетъ представлять

геометрическое мѣсто. Въ главѣ II мы уже познакомились съ пріемами, съ помощью которыхъ по даннымъ условіямъ мы выводили уравненія геометрическихъ мѣстъ. Въ настоящей главѣ мы займемся, только тѣми условіями, которыя даютъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ—прямую линію и какъ геометрическое мѣсто прямыхъ линій—точку. Пріемъ для составленія по извѣстному условію уравненія геометрическаго мѣста есть слѣдующій: берутъ двѣ, какія-нибудь, прямыя за координатныя оси и съ помощью, даннаго условія ищутъ зависимость между координатами точекъ или прямыхъ геометрическаго мѣста. Таковъ пріемъ въ общихъ чертахъ, но выборъ координатъ имѣетъ большое значеніе, какъ относительно легкости составленія уравненія геометрическаго мѣста, такъ и относительно простоты самаго уравненія. Указать правило для выбора координатъ нельзя по безконечной разнообразности условій дающихъ геометрическія мѣста. Единственный для этого указатель есть симметрія условій, навыкъ и соображеніе.

При симметріи условій координатныя оси такъ выбираются, чтобы данныя, условіями геометрическаго мѣста, были расположены симметрично относительно выбранныхъ координатныхъ осей. Иногда вводятся параметры, которые затѣмъ исключаются и въ результатѣ исключенія получается геометрическое мѣсто. Нижеслѣдующіе примѣры пояснятъ все сказанное.

Прямая.

Пр. 1. Найти геометрическое мѣсто вершинъ треугольника, коего основаніе дано и дана разность квадратовъ его сторонъ?

Рѣшеніе. Такъ какъ основаніе треугольника дано, то концы его будутъ симметрично расположены относительно координатныхъ осей, если это основаніе возьмемъ за ось абсциссъ, а перпендикуляръ, возставленный изъ его средины, за ось ординатъ.

Фиг. 52.

Пусть (фиг. 52) AB будетъ данное основаніе, его средина O, OY ось ординатъ, C одна изъ точекъ геометрическаго мѣста.

По условію задачи:

$$AB = 2a \quad , \quad AC^2 - CB^2 = m^2$$

Если C есть точка геометрическаго мѣста, то:

$$OD = x \quad , \quad DC = y$$

Изъ $\triangle ADC$ и $\triangle DBC$ мы имѣемъ:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = (a+x)^2+y^2 \quad , \quad CB^2 = (a-x)^2 + y^2$$

откуда:

$$(a+x)^2 + y^2 - (a-x)^2 - y^2 = m^2 \quad \text{или} \quad (a+x)^2 - (a-x)^2 = m^2$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто будетъ:

$$4ax = m^2 \quad \text{или} \quad x = \frac{m^2}{4a}$$

прямая перпендикулярная къ основанію на разстоянія $\frac{m^2}{4a}$ отъ его средины.

Пр. 2. По данному основанію треугольника и $\cot A + m \cot B$ найти геометрическое мѣсто вершины?

Рѣшеніе. Пусть основаніе $AB = 2a$, а $\cot A + m \cot B = b$ (фиг. 52). Возьмемъ тѣже координатныя оси, что и въ предъидущемъ примѣрѣ, то легко видѣть что:

$$\cot A = \frac{AD}{CD} = \frac{a+x}{y} \quad , \quad \cot B = \frac{DB}{CD} = \frac{a-x}{y}$$

откуда:

$$\frac{a+x}{y} + m\frac{a-x}{y} = b$$

или:

$$(a+x) + m(a-x) - by = 0$$

или:

$$(1-m)x - by + a(1+m) = 0$$

слѣдовательно геометрическое мѣсто есть прямая линія.

Пр. 3. Дано основаніе треугольника и сумма двухъ другихъ сторонъ; высота треугольника продолжена такъ, чтобы вся ея длина была равна одной изъ сторонъ. Найти геометрическое мѣсто конца этой высоты?

Рѣшеніе. Возьмемъ тужe фигуру (52) и тѣже координатныя оси. Мы имѣемъ:

$$AB = 2a \quad , \quad AC + CB = m \quad , \quad AC = DG$$

Изъ этихъ данныхъ имѣемъ:

$$BC = m - y \quad , \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD$$

или замѣчая, что $AC = GD = y$,

$$(m-y)^2 = 4a^2 + y^2 - 4a(a+x)$$

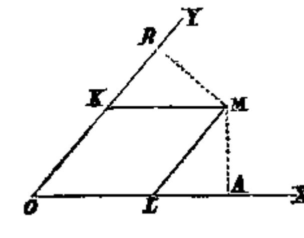
откуда:

$$2my - 4ax = m^2$$

прямая линія.

Пр. 4. Найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разность разстояній отъ двухъ данныхъ прямыхъ есть величина постоянная?

Фиг. 53.



Рѣшеніе. Возьмемъ данныя прямыя (фиг. 53) за координатныя оси. Пусть онѣ будутъ OX и OY.

Если M есть одна изъ точекъ геометрическаго мѣста, а MA и MB суть перпендикуляры къ OX и OY, то мы будемъ имѣть, если $\angle XOY = \varphi$ и $MB - MA = k$:

$$MA = y \sin\varphi \quad , \quad MB = x \sin\varphi$$

$$y - x = \frac{k}{\sin\varphi}$$

Очевидно, это прямая параллельная равнодѣлящей уголъ φ.

Пр. 5. Если сумма разстояній будетъ дана, то геометрическое мѣсто будетъ:

$$y = -x + \frac{k}{\sin\varphi}$$

Пр. 6. Найти геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разность квадратовъ разстояній отъ двухъ данныхъ точекъ есть величина постоянная?

Рѣшеніе. Возьмемъ для симметріи разстояніе данныхъ двухъ точекъ за ось X, перпендикуляръ, возставленный изъ средины этого разстоянія, за ось Y. Пусть это разстояніе будетъ равно $2a$; разность квадратовъ разстояній точки геометрическаго мѣста пусть будетъ k^2, то мы будемъ имѣть:

$$y^2 + (x - a)^2 - y^2 + (x + a)^2 = k^2$$

откуда:

$$4ax = -k^2$$

Пр. 7. Даны двѣ прямыя линіи OA и OB, проведена, какая-нибудь, прямая AB, параллельно третьей данной прямой OC, AB пересѣкаетъ прямыя OA и OB въ точкахъ A и B, на AB взята точка M, такъ чтобы $\frac{MA}{AB} = n$. Найти геометрическое мѣсто точекъ M?

Рѣшеніе. Возьмемъ OA и OC за координатныя оси X и Y (фиг. 54). Пусть уравненіе данной прямой OB будетъ $y = mx$.

Фиг. 54.

Такъ какъ точка B лежитъ на прямой $y = mx$, то:

$$AB = m \,.\, OA = mx$$

Но по условію $MA = n \,.\, AB$, слѣдовательно геометрическое мѣсто будетъ:

$$y = m \,.\, n \,.\, x$$

Пр. 8. Проведена прямая AB, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ, параллельно данной прямой OC. Пересѣкаетъ она прямыя, коихъ уравненія суть:

$$y = mx \quad , \quad y = m_1x + n_1 \quad , \quad y = m_2x + n_2 \quad , \quad y = m_3x + n_3, \ldots\ldots$$

въ точкахъ B, B_1, B_2, $B_3 \ldots$. На этой прямой взята точка M такъ, чтобы отрѣзокъ AM былъ пропорціоналенъ суммѣ ординатъ AB, AB_1, AB_2, $AB_3 \ldots\ldots$ Найти геометрическое мѣсто точекъ M?

Рѣшеніе. Если:

$$\frac{AB + AB_1 + AB_2 + \ldots\ldots}{AM} = k$$

то мы будемъ имѣть:

$$ky = mx + m_1x + n_1 + m_2x + n_2 + \ldots\ldots$$

или:

$$ky = (m + m_1 + m_2 + \ldots\ \ldots)\,x + n_1 + n_2 + \ldots\ldots$$

Пр. 9. Даны основанія и сумма площадей нѣсколькихъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину, найти ея геометрическое мѣсто?

Рѣшеніе. Пусть уравненія основаній треугольниковъ будутъ:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad , \quad x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0, \ldots\ldots \qquad (1)$$

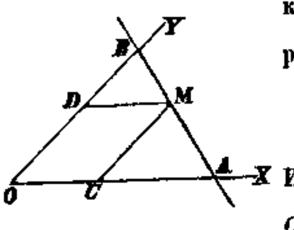
ихъ основанія a, a_1, $a_2, \ldots$ Сумма площадей пусть будетъ m^2. Если въ уравненіи (1) вставимъ координаты общей вершины треугольниковъ, то числовыя ихъ величины будутъ длины перпендикуляровъ изъ вершины на основанія (§ 45). Слѣдовательно:

$$a(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p) + a_1(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1) + a_2(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_2) + \ldots = 2m^2$$

а потому геометрическое мѣсто есть прямая линія.

Пр. 10. Дана сумма двухъ сторонъ въ треугольникѣ и уголъ между ними. Сторона противулежащая данному углу раздѣлена въ данномъ отношеніи. Найти геометрическое мѣсто этой точки?

Фиг. 55.



Рѣшеніе. Возьмемъ (фиг. 55) стороны OA и OB, заключающія данный уголъ AOB, за координатныя оси. Сторона AB въ точкѣ M раздѣлена въ отношеніи $\frac{MA}{BM} = \frac{n}{m}$.

По условію мы имѣемъ:

$$AO + OB = k \quad , \quad OC = x \quad , \quad MC = y$$

Изъ подобія треугольниковъ $\triangle AOB$ и $\triangle MDB$ имѣемъ:

$$\frac{OA}{x} = \frac{m+n}{m} \quad , \quad \frac{OB}{y} = \frac{m+n}{n}$$

откуда:

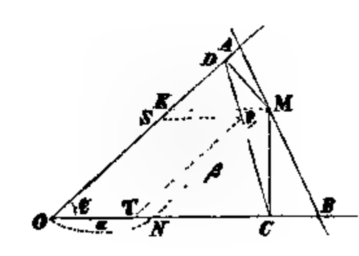
$$\frac{m+n}{m}x + \frac{m+n}{n}y = k$$

или:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = \frac{k}{m+n}$$

Пр. 11. Даны двѣ прямыя OA и OB и прямая $y = ax + b$ (AB) (фиг. 56). Изъ какой-нибудь точки M прямой AB опущены перпендикуляры MC и MD на OB и OA. Найти геометрическое мѣсто срединъ P отрѣзка DC?

Фиг. 56.



Рѣшеніе. Возьмемъ OA и OB за оси X и Y. Если $\angle AOB = \varphi$, а координаты точки M будутъ α и β, то координаты точки P будутъ:

$$OC = ON + NC = 2x = \alpha + \beta\cos\varphi\,,$$

$$OD = OK + KD = 2y = \beta + \alpha\cos\varphi$$

откуда вставляя α и β, полученныя изъ этихъ уравненій, въ уравненіе $y = ax + b$, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

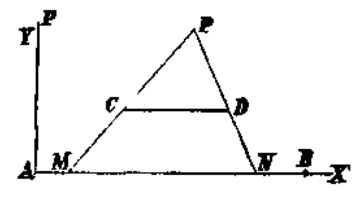
$$2y - 2x\cos\varphi = 2a(x - y\cos\varphi) + b\sin^2\varphi$$

или:

$$(1 + a\cos\varphi)\,y - (a + \cos\varphi)\,x = \frac{b\sin^2\varphi}{2}$$

Пр. 12. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего основаніе CD дано и дано отношеніе $AM : NB = k$ частей даннаго отрѣзка $AB = a$, параллельнаго основанію?

Фиг. 57.



Рѣшеніе. Возьмемъ AB (фиг. 57) за ось X, а AF перпендикуляръ къ AB, за ось Y.

Пусть координаты точки P будутъ (x, y), координаты точекъ C и D пусть будутъ (x_1, y_1), (x_2, y_1), ордината y_1 одна для обѣихъ точекъ C и D, такъ какъ CD параллельно AB. Уравненіе прямой PC будетъ, если бѣгущія координаты обозначимъ черезъ x', y':

$$(y - y_1)\,x' - (x - x_1)\,y' = yx_1 - xy_1$$

полагая въ этомъ уравненіи $y' = 0$, $AM = x'$, будемъ имѣть:

$$AM = \frac{yx_1 - xy_1}{y - y_1}$$

Точно также найдемъ AN:

$$AN = \frac{yx_2 - xy_1}{y - y_1}$$

такъ какъ $AB = a$, то отношеніе $AM = k.BN$ даетъ:

$$\frac{x_1y - y_1x}{y - y_1} = k\left(a - \frac{x_2y - y_1x}{y - y_1}\right)$$

откуда будемъ имѣть искомое геометрическое мѣсто:

$$x_1y - y_1x = k\left\{a(y - y_1) - (x_2y - y_1x)\right\}$$

Пр. 13. Данъ уголъ XOY и точка P (фиг. 58); проведемъ, какія-нибудь двѣ сѣкущія PBA и PDC, которыя пересѣкаютъ OY и OX въ точкахъ A и B, C и D; найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія прямыхъ AD и BC?

Рѣшеніе. Возьмемъ OX и OY за координатныя оси. Пусть координаты точки P будутъ (x_1, y_1).

Фиг. 58.

Уравненія двухъ, какихъ-нибудь, сѣкущихъ PA и PC будутъ:

$$(PA) \quad y - y_1 = \alpha_1(x - x_1) \quad , \quad y - y_1 = \alpha_2(x - x_1) \quad (PC)$$

Полагая въ этихъ уравненіяхъ $y = 0$, найдемъ отрѣзки OB и OD:

$$OB = \frac{y_1 - \alpha_1x_1}{\alpha_1} \quad , \quad OD = \frac{y_1 - \alpha_1x_1}{\alpha_2}$$

полагая $x = 0$ будемъ имѣть отрѣзки OA и OC:

$$OA = y_1 - \alpha_1x_1 \quad , \quad OC = y_1 - \alpha_2x_1$$

Имѣя эти отрѣзки, мы будемъ имѣть уравненія прямыхъ AD и BC (§ 38):

$$(AD) \quad \frac{\alpha_1x}{\alpha_1x_1 - y_1} + \frac{y}{y_1 - \alpha_1x_1} = 1 \quad , \quad \frac{\alpha_2x}{\alpha_2x_1 - y_1} + \frac{y}{y_1 - \alpha_2x_1} = 1 \quad (BC)$$

Точка M пересѣченія AD и BC должна удовлетворять обѣимъ уравненіямъ (AD) и (BC), какіе бы ни были параметры α_1 и α_2. Если ихъ исключимъ, получимъ искомое геометрическое мѣсто. Вычтемъ предъидущія уравненія, то найдемъ:

$$y_1x + x_1y = 0$$

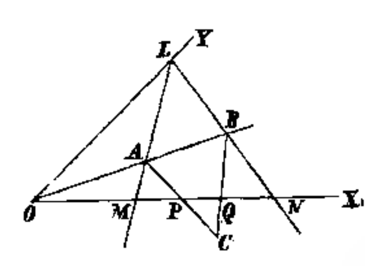
Это уравненіе прямой, проходящей черезъ точку O.

Пр. 14. Двѣ вершины треугольника ABC скользятъ по двумъ даннымъ прямымъ LM и LN, три стороны этого треугольника проходятъ черезъ три данныя точки O, P и Q, лежащія на одной прямой. Найти геометрическое мѣсто третьей вершины?

Рѣшеніе. Возьмемъ за ось X прямую OPQ (фиг. 59), а за ось Y прямую OL, соединяющую точку O съ точкою L пересѣченія прямыхъ ML и NL.

Пусть координаты точки C будутъ (x, y), пусть $OL = b$, $OM = a$, $ON = a_1$, $OP = c$, $OQ = c_1$.

Фиг. 59.



Очевидно, что уравненія прямыхъ LM и LN будутъ:

$$(LM) \quad \frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 1 \quad , \quad \frac{x'}{a_1} + \frac{y'}{b} = 1 \quad (LN)$$

а уравненіе прямой CP, проходящей черезъ точки $P(c, 0)$ и $C(x, y)$ будетъ:

$$(x - c)\,y' - yx' + yc = 0 \quad (PC)$$

Координаты точки A пересѣченія этой прямой съ прямой LM будутъ:

$$x_1 = \frac{ab(x - c) + acy}{b(a - c) + ay} \quad , \quad y_1 = \frac{b(x - c)y}{b(a - c) + ay}$$

Координаты точки B, пересѣченія прямой CQ съ LN, получатся изъ предъидущихъ, давая индексы буквамъ a и c:

$$x_2 = \frac{a_1b(x - c_1) + a_1c_1y}{b(a_1 - c_1) + a_1y} \quad , \quad y_2 = \frac{b(x - c_1)y}{b(a_1 - c_1) + a_1y}$$

Но мы должны имѣть:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

такъ какъ прямая AB должна проходить черезъ начало, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\frac{b(a - c)y}{ab(x - c) + acy} = \frac{b(a_1 - c_1)y}{a_1b(x - c_1) + a_1y}$$

откуда послѣ приведеній, найдемъ:

$$\frac{(ac_1 - ca_1)x}{cc_1(a - a_1) - aa_1(c - c_1)} + \frac{y}{b} = 1$$

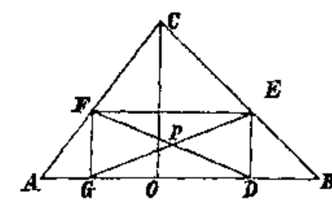
Пр. 15. Найти геометрическое мѣсто вершины C въ предъидущемъ примѣрѣ, если прямая PQ проходитъ не черезъ O, а черезъ L?

Отв. Если за координатныя оси взять LM и LN, а уравненіе прямой PQ будетъ $y = mx$, то:

$$x_3x_2(y - y_1) - y_2x_1(x - x_2) = x_1x_2(mx - y)$$

Пр. 16. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія діагоналей, вписаннаго въ данный треугольникъ, прямоугольника?

Фиг. 60.



Рѣшеніе. Пусть (фиг. 60) данный треугольникъ будетъ ABC.

Возьмемъ основаніе AB и высоту CO за координатныя оси. Пусть $OC = h$, $OB = a$, $OA = a_1$, то уравненія прямыхъ AC и BC будутъ:

$$\frac{y}{h} - \frac{x}{a_1} = 1 \quad , \quad \frac{y}{h} + \frac{x}{a} = 1 \qquad (2)$$

Проведемъ EF параллельно AB на разстояніи k отъ AB. Абсциссы OD и GO то-

чекъ E и F найдутся изъ уравненій (2), положивъ въ нихъ $y = k$. Слѣдовательно мы будемъ имѣть:

$$OD = a\left(1 - \frac{k}{h}\right) \quad , \quad OG = -a_1\left(1 - \frac{k}{h}\right)$$

Имѣя абсциссы точекъ E и F мы найдемъ абсциссу средины FE, которую если назовемъ черезъ x, то найдемъ:

$$x = \frac{a - a_1}{2}\left(1 - \frac{k}{h}\right) \tag{3}$$

очевидно это абсцисса пересѣченія діагоналей FD и GE. Но ордината этой точки есть $\frac{1}{2}k$, слѣдовательно геометрическое мѣсто получится измѣняя k на $2y$, именно:

$$2x = (a - a_1)\left(1 - \frac{2y}{h}\right)$$

или:

$$\frac{2x}{a - a_1} + \frac{2y}{h} = 1$$

или еще:

$$\frac{x}{\frac{a - a_1}{2}} + \frac{y}{\frac{h}{2}} = 1$$

Слѣдовательно искомое геометрическое мѣсто есть прямая, проходящая черезъ средину основанія AB и черезъ средину высоты h.

Пр. 17. Въ данномъ треугольникѣ ABC проведена прямая FE параллельно AB, точки F и E пересѣченія этой прямой съ AC и BC соединены съ данными точками P и Q на основаніи AB. Найти геометрическое мѣсто точки M пересѣченія прямыхъ FQ и EP (фиг. 61)?

Фиг. 61.

Рѣшеніе. Возьмемъ за координатныя оси основаніе AB и высоту OC. Пусть координаты данныхъ точекъ P и Q будутъ $(m, 0)$, $(n, 0)$. Пусть $OB = a$, $OA = -a_1$, $OC = h$, то уравненія прямыхъ BC и AC будутъ:

$$(BC)\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1 \quad , \quad -\frac{x}{a_1} + \frac{y}{h} = 1 \quad (AC)$$

Если EF проведено на разстояніи k отъ AB, то абсциссы точекъ E и F получатся изъ уравненій (BC) и (AC), полагая въ нихъ $y = k$, что даетъ:

$$OG = a\left(1 - \frac{k}{h}\right) \quad , \quad OD = -a_1\left(1 - \frac{k}{h}\right)$$

Слѣдовательно уравненія прямыхъ QF и PE будутъ:

$$y = \frac{k}{a\left(1 - \frac{k}{h}\right) - n}(x - n) \quad , \quad y = \frac{k}{-a_1\left(1 - \frac{k}{h}\right) - m}(x - m)$$

исключая изъ этихъ уравненій k, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

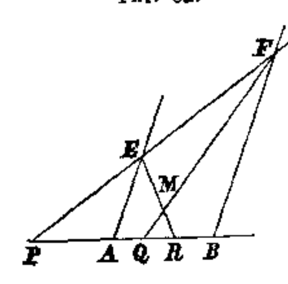
$$(a - n)\{x_1 y - h(x - m)\} = (a_1 + m)\{ay - h(x - n)\}$$

Пр. 18. Рѣшить туже задачу если точки P и Q совпадаютъ съ A и B?

Отв. $\quad (a - a_1)y + 2hx + h(a + a_1) = 0$

Пр. 19. Даны двѣ параллельныя линіи AE и BF и три точки P, Q, R на одной прямой линіи, черезъ точку P проведена, какая-нибудь, сѣкущая PEF, точки E и F пересѣченія этой сѣкущей съ прямыми AE и BF соединимъ съ точками R и Q прямыми ER и FQ. Найти геометрическое мѣсто точки M пересѣченія прямыхъ ER и FQ (фиг. 62)?

Фиг. 62.



Рѣшеніе. Пусть A и B будутъ точки пересѣченія прямой PQB съ AE и BF. Возьмемъ PA за ось X, а AE за ось Y.

Пусть $AB = a$, $AQ = a_1$, $AR = a_2$, $AP = a_3$, то координаты точекъ P, Q, R будутъ:

$$(a_1, 0) \quad , \quad (a_2, 0) \quad , \quad (a_3, 0)$$

Пусть $AE = u$, то уравненія прямыхъ PE и ER будутъ:

$$-\frac{x}{a_1} + \frac{y}{u} = 1 \qquad , \qquad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{u} = 1$$

Чтобы найти уравненіе прямой QF, замѣтимъ, что абсцисса точки F есть a, слѣдовательно ордината BF получится изъ уравненія:

$$-\frac{x}{a_1} + \frac{y}{u} = 1$$

подставивъ a вмѣсто x, найдемъ:

$$y = BF = u\left(1 + \frac{a}{a_1}\right) = \frac{u}{a_1}(a + a_1)$$

такъ какъ прямая QF проходитъ черезъ точки $(a_1, 0)$ и (a_1, BF), то мы имѣемъ:

$$y = \frac{BF}{a - a_2}(x - a_2) = \frac{u}{a_1} \cdot \frac{a + a_1}{a - a_2}(x - a_2)$$

исключая u изъ этого уравненія и уравненія:

$$\frac{x}{a_2} + \frac{y}{u} = 1$$

найдемъ геометрическое мѣсто:

$$x = \frac{a_1 a_2 (a - a_2) + a_1 a_3 (a + a_1)}{a_1 (a - a_2) + a_2 (a + a_1)}$$

которое есть прямая параллельная оси Y.

Пр. 20. Разсмотрѣть въ предъидущей задачѣ тѣ случаи, когда точки Q и R совпадаютъ съ A и B и когда точка P находится на безконечности, т. е. когда $PE \parallel AB$?

Рѣшить еще слѣдующія задачи:

Пр. 21. Данъ треугольникъ ABC, на его основаніи AB даны три точки P, Q, R, черезъ точку P проведена сѣкущая, которая встрѣчаетъ стороны AC и BC въ точкахъ E и F, точки E и F соединены съ R и Q прямыми ER и FQ. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ ER и FQ?

Разобрать тѣ случаи, въ которыхъ точки Q и R совпадаютъ съ A и B и когда точка P находится на безконечности, т. е. когда $PE \parallel AB$. Показать, что пр. 19 есть частный случай настоящаго?

Пр. 22. Проведены двѣ прямыя PP' и QQ' параллельно сторонамъ AB и AC даннаго параллелограмма. Точки P, P', Q и Q' суть точки встрѣчи прямыхъ PP' и QQ' со сторонами параллелограмма. Найти геометрическое мѣсто точки встрѣчи прямыхъ PQ и $P'Q'$?

Пр. 23. Дана точка и двѣ прямыя линіи, черезъ данную точку проведены двѣ сѣкущія и точки ихъ встрѣчи съ данными прямыми соединены крестообразно. Найти геометрическое мѣсто точки ихъ встрѣчи?

Пр. 24. Данъ треугольникъ ABC, на его основаніи дана точка P; проведена, какая-нибудь, прямая ab AB, точки ея пересѣченія a и b съ AC и BC соединены съ P и A прямыми aP и Ab. Найти геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченія?

Пр. 25. Данъ треугольникъ ABC, на основаніи его даны точки Q и P, черезъ точку P проведена сѣкущая Pab, которая встрѣчаетъ стороны AC и BC въ точкахъ a и b, черезъ точку a проведена прямая $ac \parallel AB$, точка b соединена съ Q прямою bQ. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія ac и bQ?

Пр. 26. Даны двѣ параллельныя прямыя AX и BY и три точки P, Q, R на прямой параллельной первымъ двумъ, черезъ точку P проведена сѣкущая Pab, которая встрѣчаетъ AX и AY въ точкахъ a и b, точка a соединена съ P, а точка b съ Q прямыми aP и bQ. Найти геометрическое мѣсто точки встрѣчи прямыхъ aP и bQ?

Геометрическое мѣсто прямой линіи есть точка.

§ 85. Во всѣхъ предъидущихъ примѣрахъ условія были таковы, что всѣ точки, удовлетворяющія этимъ условіямъ, находились на одной прямой линіи. Въ нижеслѣдующихъ мримѣрахъ условія будутъ таковы, что всѣ прямыя, коихъ координаты удовлетворяютъ этимъ условіямъ, будутъ проходить черезъ одну точку, которая и называется геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ линій.

Задачи этого рода, также какъ и предъидущія, можно рѣшать съ помощью каждаго изъ методовъ двойственности, т. е. въ координатахъ точки и въ координатахъ линіи. Но по послѣднему методу, за исключеніемъ не многихъ случаевъ, рѣшенія бываютъ вообще сложнѣе, такъ какъ выборъ координатъ стѣсняется нѣкоторыми особенностями метода, такъ напримѣръ, если даны двѣ прямыя въ условіяхъ задачи, то въ методѣ Декарта можно всегда эти прямыя взять за координатныя оси, что сейчасъ же упрощаетъ ихъ уравненія; въ другомъ-же методѣ это нельзя сдѣлать, такъ какъ всякая прямая, проходящая черезъ начало, опредѣляется координатами $\xi = \infty$, $\eta = \infty$, а ея уравненіе дается парадоксомъ $C = 0$, т. е. постоянное количество равно нулю, что въ Декартовой системѣ координатъ соотвѣтствуетъ прямой на безконечности. Слѣдующія примѣры пояснятъ сказанное. Замѣтимъ сначала, что если даны координаты точки (x_1, y_1), то ея уравненіе будетъ (§ 63):

$$x_1\xi + y_1\eta + 1 = 0$$

а если даны координаты прямой (ξ_1, η_1), то ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + 1 = 0$$

Если даны координаты двухъ точекъ (x_1, y_1), (x_2, y_2) то уравненіе прямой, проходящей черезъ эти точки будетъ (§ 68):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

а если даны координаты двухъ прямыхъ (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), то уравненіе точки ихъ пересѣченія будетъ (§ 68):

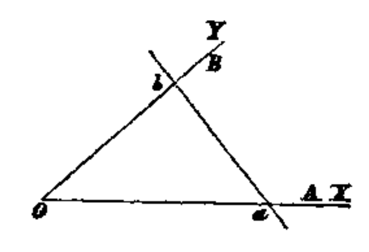
$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пр. 1. Даны двѣ прямыя OA и OB, третья прямая ab пересѣкаетъ OA и OB такъ, что:

$$\frac{1}{Oa} + \frac{1}{Ob} = k$$

k есть число постоянное. Найти геометрическое мѣсто прямой ab?

Фиг. 63.



Рѣшеніе. Возьмемъ за координатныя оси OA и OB (фиг. 63), то изъ условій задачи видимъ, что координаты ξ и η прямой ab, которыя суть ничто иное какъ $\frac{1}{Oa}$ и $\frac{1}{Ob}$, должны удовлетворять уравненію:

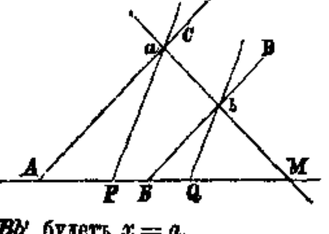
$$\xi + \eta = k \quad \text{или} \quad \frac{1}{k}\xi + \frac{1}{k}\eta = 1$$

а это уравненіе точки, коей координаты:

$$x = \frac{1}{k}, \quad y = \frac{1}{k}.$$

Пр. 2. Даны двѣ параллельныя AC и BD и двѣ точки P и Q. Черезъ точки P и Q проведены двѣ, какія-нибудь, параллельныя Pa и Qb, точки a и b пересѣченія ихъ съ прямыми AC и BD соединены прямою ab. Найти геометрическое мѣсто ab?

Фиг. 64.



Рѣшеніе. Проведемъ прямую PQ и возьмемъ PQ и AC (фиг. 64) за координатныя оси. Пусть координаты данныхъ точекъ P и Q будутъ $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$. Если положимъ $AB = a$, то уравненіе прямой BD будетъ $x = a$.

Если AC и AB суть координатныя оси, то уравненія прямыхъ Pa и Qb будутъ:

$$y = \alpha(x - x_1) \quad , \quad y = \alpha(x - x_2) \qquad (4)$$

абсциссы точекъ a и b суть 0 и a, чтобы получить ординаты надобно въ уравненіяхъ (4) положить въ первомъ $x = 0$, а во второмъ $x = a$, что даетъ $-\alpha x_1$, $\alpha(a - x_2)$, слѣдовательно координаты точекъ a и b будутъ:

$$(a) \qquad (0, -\alpha x_1) \quad , \quad (a, \alpha(a - x_2)) \qquad (b)$$

Слѣдовательно уравненіе прямой ab будетъ (§ 63):

$$\begin{vmatrix} x & , & y & , & 1 \\ 0 & , & -\alpha x_1 & , & 1 \\ a & , & \alpha(a - x_2) & , & 1 \end{vmatrix} = 0$$

откуда координаты этой прямой будутъ:

$$\xi = \frac{x_2 - x_1 - a}{\alpha x_1} \quad , \quad \eta = \frac{1}{\alpha x_1}$$

Изъ чего видимъ, что прямая проходитъ во всѣхъ своихъ положеніяхъ черезъ точку:

$$\left(\frac{ax_1}{x_2 - x_1 - a} \quad , \quad 0\right)$$

Пр. 3. Даны двѣ точки A и B на прямой AB и двѣ другія a и b на другой прямой, которая встрѣчаетъ AB въ точкѣ C; около этой точки (фиг. 65) вращается прямая ab. Во всѣхъ ея положеніяхъ проводятъ прямыя Aa и Bb, которыя встрѣчаются въ точкѣ S, черезъ точку S проводятъ прямую $SO \parallel ab$. Найти геометрическое мѣсто прямой SO?

Рѣшеніе. Возьмемъ CA за ось X, CY, перпендикулярную CA, за ось Y. Въ этомъ предположенія уравненіе вращающейся прямой Ca будетъ:

$$y = \alpha x$$

Фиг. 65.

Въ извѣстномъ положеніи прямой Ca пусть координаты точекъ a и b будутъ (x', y'), (x'', y''), то очевидно, что:

$$y' = \alpha x' \quad , \quad y'' = \alpha x''$$

Если означимъ разстояніе $Ca = \rho$, $ab = \omega$, то:

$$cb = \rho + \omega$$

Такъ какъ координаты точекъ a и b суть $(x', \alpha x')$, $(x'', \alpha x'')$, то ихъ уравненія будутъ:

$$(a) \quad x'\xi + \alpha x'\eta = 1 \quad , \quad x''\xi + \alpha x''\eta = 1 \quad (b)$$

Полагая:

$$CA = x_1 \quad , \quad CB = x_2$$

координаты точекъ A и B будутъ $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, слѣдовательно ихъ уравненія будутъ:

$$(A) \quad x_1\xi = 1 \quad , \quad x_2\xi = 1 \quad (B)$$

Если имѣемъ уравненія точекъ (a) и (b), (A) и (B), то легко найти координаты прямыхъ Aa и Bb. Эти координаты получатся, опредѣляя изъ уравненій (a) и (A), (b) и (B), ξ и η, что даетъ:

$$(Aa) \quad \left(\frac{1}{x'} , \frac{x_1 - x'}{\alpha x_1 x'}\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{x_2} , \frac{x_2 - x''}{\alpha x' x_2}\right) \quad (Bb)$$

Имѣя координаты (Aa) и (Bb), найдемъ уравненіе точки ихъ пересѣченія S (§ 63):

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \frac{1}{x_1} & \frac{x_1 - x'}{\alpha x' x_1} & 1 \\ \frac{1}{x_2} & \frac{x_2 - x''}{\alpha x'' x_2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (S)$$

Откуда будемъ имѣть координаты точки S.

Изъ уравненія мы найдемъ, что координаты (x_3, y_3) точки S будутъ:

$$x_3 = \frac{x''x_1x_2 - x'x''x_2 - x'x_1x_2 + x'x''x_2}{x_1x'' - x'x_2} \quad , \quad y_3 = \frac{x'x''(x_1 - x_2)}{x_1x'' - x'x_2}\alpha$$

Уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (S) параллельно прямой Ca, будетъ:

$$y - y_3 = \alpha(x - x_3)$$

Чтобы найти точку ея встрѣчи съ осью X, надобно въ этомъ уравненіи положить $y = 0$, то $x = CO$, если O есть точка ея встрѣчи.

$$CO = \frac{\alpha x_3 - y_3}{\alpha}$$

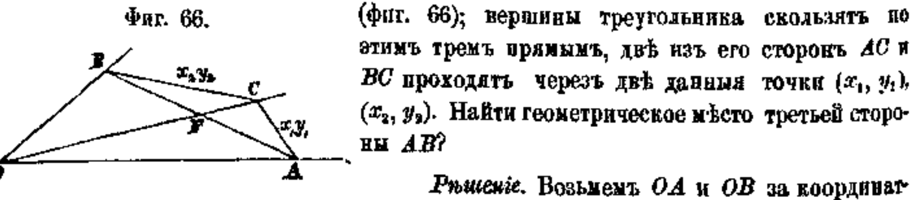
подставляя предъидущія выраженія для x_3, y_3, найдемъ:

$$CO = \frac{x_1x_2\omega}{x_1(\rho + \omega) - \rho x_2}$$

величина постоянная, слѣдовательно прямая постоянно проходитъ черезъ точку O, т. е. эта точка есть геометрическое мѣсто прямой SO.

Пр. 4. Даны три прямыя OA, OB, OC, проходящія черезъ одну точку O (фиг. 66); вершины треугольника скользятъ по этимъ тремъ прямымъ, двѣ изъ его сторонъ AC и BC проходятъ черезъ двѣ данныя точки (x_1, y_1), (x_2, y_2). Найти геометрическое мѣсто третьей стороны AB?

Фиг. 66.



Рѣшеніе. Возьмемъ OA и OB за координатныя оси, то уравненіе прямой OC будетъ:

$$y = \alpha x \quad (OC)$$

Координаты точекъ A и B будутъ $(x', 0)$, $(0, y')$, если положимъ $OA = x'$, $OB = y'$, слѣдовательно уравненіе прямой AB будетъ:

$$y = -\frac{y'}{x'}(x - x')$$

Уравненія прямыхъ AC и AB будутъ:

$$(AC) \quad y = \frac{y_1}{x_1 - x'}(x - x'), \quad y - y_2 = \frac{y_2 - y'}{x_2} x \quad (BC)$$

Но эти прямыя должны пересѣкаться на OC, слѣдовательно мы будемъ имѣть координаты точки C, опредѣливъ x и y изъ уравненій OC и AC, OC и BC, что даетъ:

$$x = \frac{y_1 x'}{y_1 - \alpha(x_1 - x')} \qquad x = \frac{x_2 y'}{\alpha x_2 - (y_2 - y')}$$

$$y = \frac{\alpha y_1 x'}{y_1 - \alpha(x_1 - x')} \qquad y = \frac{\alpha x_2 y'}{\alpha x_2 - (y_2 - y')}$$

Но такъ какъ эти выраженія равны, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{y_1 x'}{y_1 - \alpha(x_1 - x')} = \frac{x_2 y'}{\alpha x_2 - (y_2 - y')}$$

Откуда найдемъ, полагая $x' = \frac{1}{\xi}$, $y' = \frac{1}{\eta}$:

$$y_1(\alpha x_2 - y_2)\eta + x_2(\alpha x_1 - y_1)\xi - (\alpha x_2 - y_1) = 0$$

или

$$\frac{y_1(\alpha x_2 - y_2)}{\alpha x_2 - y_1}\eta + \frac{x_2(\alpha x_1 - y_1)}{\alpha x_2 - y_1}\xi = 1$$

Это уравненіе точки, коей координаты суть:

$$x = -x_2 \frac{\alpha x_1 - y_1}{\alpha x_2 - y_1} \qquad y = -y_1 \frac{\alpha x_2 - y_2}{\alpha x_2 - y_1}$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто прямой AB есть точка. Рѣшить еще слѣдующіе примѣры:

Пр. 5. Даны двѣ прямыя SA и SB и двѣ точки P и Q на одной прямой съ точкою S. Если черезъ точки P и Q проведемъ къ каждой изъ точекъ, данной третьей прямой ML, прямыя, которыя встрѣтятъ SA и SB въ точкахъ m и n, то геометрическое мѣсто прямой mn есть точка.

Пр. 6. Даны двѣ прямыя SA и SB и точка B. Если черезъ эту точку проведемъ, какую-нибудь прямую, которая встрѣтитъ SA и SB въ точкахъ m и n; черезъ двѣ другія данныя точки P и Q проведемъ прямыя Pm и Qn, которыя встрѣтятъ SA и SB въ точкахъ m_1 и n_1, то геометрическое мѣсто прямой m_1n_1 будетъ точка.

Пр. 7. Даны три прямыя SA, SB, SC, проходящія черезъ одну и туже точку S, прямыя эти встрѣчаютъ третью данную прямую въ трехъ точкахъ A, B, C. Если черезъ каждую изъ точекъ M прямой SC, проведемъ прямую MB, которая встрѣчаетъ SA въ точкѣ a и параллельную AB, которая встрѣчаетъ SB въ точкѣ b, черезъ точку b проведемъ bA, которая встрѣчаетъ SC въ точкѣ c, то геометрическое мѣсто прямой ac есть точка. Чертежи къ каждой изъ задачъ читатель можетъ легко сдѣлать по указаніямъ въ задачѣ.

Рѣшить наконецъ примѣръ:

Пр. 8. Если изъ данныхъ точекъ, въ какомъ угодно числѣ, опустимъ перпендикуляры на такъ выбранную прямую, что сумма произведеній этихъ перпендикуляровъ на данныя числа равна нулю, то геометрическое мѣсто такихъ прямыхъ есть точка.

Рѣшеніе. Пусть уравненіе искомой прямой будетъ:

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0 \tag{5}$$

пусть координаты, данныхъ точекъ, будутъ:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots (x_n, y_n)$$

а данныя числа $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$.

По условію задачи мы будемъ имѣть (§ 45):

$$m_1(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p) + m_2(x_2 \cos\alpha + y_2 \sin\alpha - p) + \ldots\ldots$$

$$+ m_n(x_n \cos\alpha + y_n \sin\alpha - p) = 0$$

откуда:

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots\ldots + m_nx_n)\cos\alpha + (m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots\ldots m_ny_n)\sin\alpha$$

$$- p(m_1 + m_1 + \ldots\ldots + m_n) = 0$$

Опредѣляя отсюда p и вставляя въ уравненіе (5), найдемъ:

$$x\cos\alpha\sum_1^n m_r + y\sin\alpha\sum_1^n m_r - \cos\alpha\sum_1^n m_rx_r - \sin\alpha\sum_1^n m_ry_r = 0$$

откуда, найдемъ:

$$\left(x\sum_1^n m_r - \sum_1^n m_rx_r\right) + \operatorname{tg}\alpha\left(y\sum_1^n m_r - \sum_1^n m_ry_r\right) = 0$$

Изъ формы этого уравненія видимъ, что эта прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ:

$$x\sum_1^n m_r - \sum_1^n m_rx_r = 0 \quad , \quad y\sum_1^n m_r - \sum_1^n m_ry_r = 0$$

Координаты точки пересѣченія, или геометрическаго мѣста, будутъ:

$$x = \frac{\sum_1^n m_rx_r}{\sum_1^n m_r} \quad , \quad y = \frac{\sum_1^n m_ry_r}{\sum_1^n m_r}$$

§ 86. ***Геометрическія мѣста въ полярныхъ координатахъ.*** Иногда по характеру задачи удобнѣе брать или составлять уравненія въ полярныхъ координатахъ.

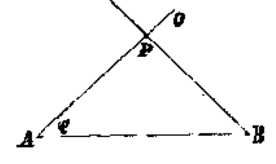
Вотъ нѣсколько примѣровъ:

Пр. 9. Даны двѣ точки A и B (фиг. 67), черезъ точку B проведена, какая-нибудь, прямая BP, изъ точки A опустимъ на нее перпендикуляръ AP и продол-

жимъ его до точки Q такъ, что $AP.AQ = k^2$, k есть величина постоянная. Найти геометрическое мѣсто точки Q?

Рѣшеніе. Возьмемъ A за полюсъ, AB за начало угловъ, пусть $AB = a$, $\angle BAP = \varphi$, $AQ = \rho$.

Фиг. 67.



По условію мы имѣемъ:

$$AP.QA = k^2$$

но:

$$AP = a\cos\varphi$$

слѣдовательно геометрическое мѣсто будетъ:

$$\rho a\cos\varphi = k^2 \quad \text{или} \quad \rho\cos\varphi = \frac{k^2}{a}$$

а это, очевидно, прямая перпендикулярная къ AB.

Пр. 10. Даны углы въ треугольникѣ ABC, вершина A неподвижна, вершина B скользитъ по данной прямой BP. Найти геометрическое мѣсто третьей вершины C?

Рѣшеніе. Возьмемъ A за полюсъ, AP перпендикулярную BP за начало угловъ (фиг. 68), пусть

Фиг. 68.

$$\angle A = \alpha \ , \ \angle B = \beta \ , \ \angle C = \gamma \ , \ AC = \rho ,$$

$$\angle PAC = \varphi \ , \ AP = a.$$

Такъ какъ углы въ треугольникѣ даны, то мы имѣемъ:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = k$$

Но $AP = AB\cos(\varphi - \alpha) = a$, откуда:

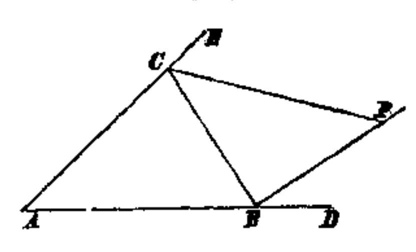
$$\rho\cos(\varphi - \alpha) = ak$$

а это есть уравненіе прямой, составляющей уголъ α съ данною прямою BP и пересѣкающей ее на разстояніи ak отъ точки A.

Пр. 11. Дано основаніе AB треугольника ABC и сумма сторонъ, изъ конца B основанія возставляемъ перпендикуляръ BP къ сторонѣ BC. Найти геометрическое мѣсто точки его встрѣчи съ равнодѣлящей CP внѣшняго угла BCE?

Рѣшеніе. Возьмемъ точку B за полюсъ, AB за начало угловъ (фиг. 69), то $BP = \rho$, $\angle PBD = \varphi$.

Фиг. 69.



Означимъ черезъ a, b, c стороны треугольника, противулежащія угламъ A, B, C.

Легко видѣть, что $\angle BCP = 90 - \frac{1}{2}C$, а изъ $\triangle PBC$ мы будемъ имѣть:

$$a = \rho\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}C \qquad (6)$$

Слѣдовательно, если выразимъ a и $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}C$ черезъ φ, то будемъ имѣть уравненіе геометрическаго мѣста точки P. Изъ $\triangle ABC$ мы имѣемъ:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

но если сумма сторонъ есть m, то:

$$b = m - a$$

слѣдовательно, такъ какъ:

$$\cos B = \sin\varphi$$

или

$$m^2 - 2ma + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac\sin\varphi$$

откуда:

$$a = \frac{m^2 - c^2}{2(m - c\sin\varphi)}$$

Но мы имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{b\sin C}{b(1 + \cos C)}$$

а такъ какъ:

$$b\sin C = c\sin B = c\cos\varphi \quad \text{и} \quad b\cos C = a - c\cos B = a - c\sin\varphi$$

то:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{c\cos\varphi}{m - c\sin\varphi}$$

подставляя въ уравненіе (6) найденныя выраженія для a и $\operatorname{tg}\frac{1}{2}C$, найдемъ уравненіе геометрическаго мѣста:

$$\frac{m^2 - c^2}{2(m - c\sin\varphi)} = \frac{\rho c\cos\varphi}{m - c\sin\varphi} \quad \text{или} \quad \rho\cos\varphi = \frac{m^2 - c^2}{2c}$$

Откуда видимъ, что геометрическое мѣсто есть перпендикуляръ къ основанію AB, проведенный на разстояніи $\frac{m^2 - c^2}{2c}$ отъ B.

Рѣшить туже задачу относительно внутренней равнодѣлящей уголъ ACB?

Пр. 12. Дано n прямыхъ линій и точка O, проведемъ черезъ O, какую-нибудь прямую, которая встрѣтитъ данныя прямыя въ точкахъ r_1, $r_2 \ldots r_n$, на этой прямой построимъ точку R такъ, чтобы:

$$\frac{n}{OR} = \frac{1}{Or_1} + \frac{1}{Or_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{Or_n}$$

Найти геометрическое мѣсто точекъ R?

Рѣшеніе. Пусть уравненія прямыхъ будутъ:

$$\rho\cos(\varphi - \alpha_1) = p_1 \quad , \quad \rho\cos(\varphi - \alpha_2) = p_2, \ldots, \rho\cos(\varphi - \alpha_n) = p_n$$

Легко видѣть, что уравненіе геометрическаго мѣста будетъ:

$$\frac{n}{\rho} = \frac{\cos(\varphi - \alpha_1)}{p_1} + \frac{\cos(\varphi - \alpha_2)}{p_2} + \ldots$$

очевидно, прямая линія.

§ 87. Мы уже выше видѣли, какъ по извѣстнымъ даннымъ условіямъ отыскивается геометрическое мѣсто точекъ, положеніе которыхъ удовлетворяетъ даннымъ условіямъ. Слѣдующіе примѣры даются для упражненій, въ которыхъ уравненія геометрическихъ мѣстъ выше 1-ой степени.

Пр. 1. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего основаніе дано и сумма квадратовъ сторонъ?

Отв. $x^2 + y^2 = \frac{1}{2} m^2 - a^2$.

Пр. 2. Даны. основаніе и сумма или разность m разъ взятый квадратъ одной стороны и n разъ взятый квадратъ другой?

Отв. $(m + n)(x^2 + y^2) + 2(m + n)ax + (m + n)a^2 = k^2$.

Пр. 3. Даны основаніе и отношеніе сторонъ.

Пр. 4. Даны основаніе и произведеніе тангенсовъ угловъ при основаніи.

Отв. $y^2 + m^2x^2 = m^2a^2$.

Пр. 5 Даны основаніе, уголъ въ вершинѣ или что тоже сумма угловъ при основаніи.

Отв. $x^2 + y^2 \quad 2axy \operatorname{cotg} \varphi = a^2$.

Пр. 6. Даны основаніе и разность угловъ при основаніи.

Отв. $x^2 - y^2 + 2axy \operatorname{cotg} \varphi = a^2$.

Пр. 7. Даны: основаніе и одинъ изъ угловъ при основаніи равенъ удвоенному другому.

Отв. $3x^2 - y^2 + 2ax \quad a^2$.

Пр. 8. Даны: основаніе и $\operatorname{tg} C = m \operatorname{tg} B$.

Отв. $m(x^2 + y^2 \quad a^2) - 2a(a \quad x)$.

Пр. 9. Проведена прямая MB параллельно OC (см. пр. 7, § 85), пересѣкающая двѣ данныя прямыя въ точкахъ B и B' и взято $AM^2 = PB.PB'$, найти геометрическое мѣсто точки M?

Отв. $mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n')$.

Пр. 10. MA есть средне-гармоническая между AB и AB'.

Отв. $2mx(m'x + n') = y(mx + m'x + n')$.

Пр. 11. Данъ уголъ въ вершинѣ треугольника, найти геометрическое мѣсто точки, въ которой основаніе раздѣлено въ данномъ отношеніи, если при этомъ дана площадь треугольника?

Отв. xy — постоянному.

Пр. 12. Если дано основаніе.

Отв. $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} - \frac{2xy \cos \omega}{mn} = \frac{b^2}{(m + n)^2}$.

Пр. 13. Если основаніе проходитъ чрезъ данную точку.

Отв. $\frac{mx'}{x} + \frac{ny'}{y} - m + n$.

Пр. 14. Найти геометрическое мѣсто точки P (см. пр. 12, § 86), если прямая CD не параллельна основанію?

Пр. 15. Дано основаніе CD треугольника, найти геометрическое мѣсто вершины, если AB на данной прямой есть постоянный отрѣзокъ (см. пр. 12, § 86)?

Отв. $(x'y - y'x)(y \quad y'') + (x''y - y''x)(y - y') = a(y - y')(y - y'')$.

ГЛАВА IX.

Ангармонія, гармонія, инволюція.

§ 88. Отрѣзокъ прямой линіи между точками a и b изображается черезъ ab, принимая a за начало отрѣзка, а b за конецъ.

Тотъ же отрѣзокъ, но взятый въ противуположномъ направленіи изображается черезъ ba. Если примѣнимъ здѣсь геометрическое значеніе знаковъ $+$ и $-$, то мы должны положить:

$$ab = -ba \quad \text{или} \quad ab + ba = 0 \tag{1}$$

т. е. если отрѣзокъ, откладываемый въ извѣстномъ направленіи на прямой, принимается за положительный, то отложенный въ противуположномъ направленіи онъ принимается за отрицательный.

§ 89. *Предложеніе.* Какое бы нибыло относительное положеніе трехъ точекъ a, b, c на одной прямой линіи мы всегда будемъ имѣть:

$$ab + bc + ca = 0 \tag{2}$$

Доказательство. Если точки находятся на прямой въ порядкѣ a, b, c (фиг. 70), то уравненіе (2) очевидно, потому что сумма отрѣзковъ:

$$ab + bc = ac \quad , \quad \text{а} \quad ac = -ca$$

слѣдовательно мы имѣемъ (2).

Фиг. 70.

Если точка c будетъ между точками a и b, то мы имѣемъ (фиг. 71):

$$ab = ac + cb$$

но:

$$ac = -ca \quad , \quad cb = -bc$$

подставляя, найдемъ снова (2).

Фиг. 71.

Точно также легко показать и для другихъ положеній точекъ c и b относительно a, что уравненіе (2) всегда имѣетъ мѣсто.

На основаніи этого свойства можно, какой-нибудь, отрѣзокъ bc выразить разностью $ac - ab$, гдѣ a есть, какая-нибудь, точка на прямой bc. Въ этомъ случаѣ точка a служитъ началомъ отсчитыванія отрѣзковъ.

§ 90. *Предложеніе.* Какое бы нибыло относительное положеніе четырехъ точекъ a, b, c, d, на одной прямой линіи, мы будемъ всегда имѣть:

$$ab . cd + ac . db + ad . bc = 0 \tag{3}$$

Доказательство. Если точки находятся на прямой въ порядкѣ a, b, c, d, то мы будемъ имѣть, отсчитывая всѣ отрѣзки отъ точки a:

$$cd = ad - ac \quad , \quad db = da - ba \quad , \quad bc = ac - ab$$

подставляя въ (3), вмѣсто отрѣзковъ cd, db, bc эти выраженія, найдемъ, что выраженіе (3) равно нулю (фиг. 72).

Фиг. 72.

Если бы точки были въ порядкѣ b, a, c, d (фиг. 73), то для этого порядка, по предъидущему, мы будемъ имѣть:

$$ba . cd + bc . da + bd . ac = 0$$

но по условію мы имѣемъ:

$$ba = -ab \quad , \quad bd = -db \quad , \quad da = -ad$$

подставляя, найдемъ (3).

Фиг. 73.

Точно также можно показать, что уравненіе (3) имѣетъ мѣсто и при другихъ положеніяхъ точекъ.

§ 91. *Опредѣленіе.* Возьмемъ четыре точки a, b, c, d на одной прямой линіи (фиг. 72) и будемъ ихъ разсматривать по-парно соотвѣтственными, напримѣръ, a и b, c и d. Эти четыре точки образуютъ шесть отрѣзковъ ab, ac, ad, bc, bd и cd.

Составимъ изъ этихъ отрѣзковъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac . bd}{ad . bc} \tag{4}$$

т. е. отношеніе разстояній первой точки a, изъ первой пары (a, b), отъ точекъ (c, d) второй пары, раздѣленное на отношеніе разстояній второй точки b, изъ первой пары, отъ точекъ второй пары.

Такое выраженіе называется *ангармоническимъ* отношеніемъ четырехъ точекъ. Мы его будемъ изображать символомъ $(abcd)$, гдѣ a и b, c и d суть пары соотвѣтственныхъ точекъ. Слѣдовательно символъ, напримѣръ, $(cdab)$ будетъ изображать выраженіе:

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$$

Такъ какъ вторая часть выраженія (4) можетъ быть написана въ четырехъ формахъ:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac}{ad} \cdot \frac{bd}{bc} = \frac{ac}{bc} \cdot \frac{bd}{ad} = \frac{bd}{ad} \cdot \frac{ac}{bc} = \frac{bd}{bc} \cdot \frac{ac}{ad}$$

или также:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{db}{da} : \frac{cb}{ca} = \frac{bd}{bc} : \frac{ad}{ac}$$

то есть:

$$(abcd) = (cdab) = (dcba) = (badc) \tag{5}$$

слѣдовательно, если соотвѣтственными парами будутъ ab и cd, cd и ab, dc и ba, ba и dc, то ангармоническое отношеніе неизмѣняется. Эти перестановленія получаются изъ $(abcd)$, второе перестановленіемъ паръ a и b, c и d между собою, третее получается изъ втораго перемѣщеніемъ буквъ c и d, a и b между собою, а четвертое получится такъ изъ перваго, какъ третее получено изъ втораго.

Такъ какъ изъ четырехъ буквъ всѣхъ перестановленій двадцать четыре, то различныя ангармоническія отношенія суть только слѣдующія группы:

$$\begin{matrix} (abcd) & , & (acdb) & , & (adbc) \\ (abdc) & , & (acbd) & , & (adcb) \end{matrix} \tag{6}$$

Первая группа получается изъ $(abcd)$ круговымъ перемѣщеніемъ трехъ буквъ bcd, а вторая группа получается изъ первой, перемѣщая между собою сопряженныя точки вторыхъ паръ. Легко видѣть, что произведенія соотвѣтственныхъ паръ ангармоническихъ отношеній (6) равны единицѣ, т. е.:

$$\begin{aligned} (abcd) \cdot (abdc) &= 1 \\ (acdb) \cdot (acbd) &= 1 \\ (adbc) \cdot (adcb) &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Слѣдовательно ангармоническія отношенія второй группы (6) суть обратныя ангармоническимъ отношеніямъ первой группы. Три ангармоническія отношенія первой группы (6) мы будемъ называть *основными*. Слѣдовательно основныя ангармоническія отношенія суть слѣдующія:

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd} \quad , \quad \frac{ad}{ab}:\frac{cd}{cb} \quad , \quad \frac{ab}{ac}:\frac{db}{bc} \tag{8}$$

Если обратимъ вниманіе на направленіе отрѣзковъ въ предъидущихъ трехъ ангармоническихъ отношеніяхъ и на условіе относительно знаковъ, то увидимъ, что ангармоническія отношенія первое и третее (8) суть положительныя, а второе отрицательное

§ 92. Мы видѣли въ § 90, (3), что если четыре точки a, b, c, d находятся на одной прямой линіи, то мы всегда имѣемъ слѣдующее выраженіе:

$$ab \, . \, cd + ac \, . \, db + ad \, . \, bc = 0$$

раздѣляя всѣ члены этого тождества на послѣдній членъ $ad \, . \, bc$, найдемъ:

$$\frac{ac \, . \, db}{ad \, . \, bc} + \frac{ab \, . \, cd}{ad \, . \, bc} + 1 = 0$$

или:

$$\frac{ac}{ad}:\frac{bc}{bd} + \frac{ab}{ad}:\frac{cb}{cd} = 1$$

или:

$$(abcd) + (acbd) = 1 \tag{9}$$

Точно также найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} (acdb) + (adcb) = 1 \\ (adbc) + (abdc) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Ангармоническія отношенія, коихъ сумма равна единицѣ, называются *дополнительными*.

Изъ уравненій (7) и (9), (10) мы видимъ, что всѣ шесть ангармоническихъ отношеній, такъ связаны между собою, что могутъ быть всѣ выражены въ функціи одного изъ нихъ. Если положимъ:

$$(abcd) = \alpha, \quad \text{то} \quad (abdc) = \frac{1}{\alpha}$$

дополнительныя имъ:

$$(acbd) = 1 - \alpha \quad , \quad (adbc) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \tag{11}$$

и обратныя послѣднимъ двумъ:

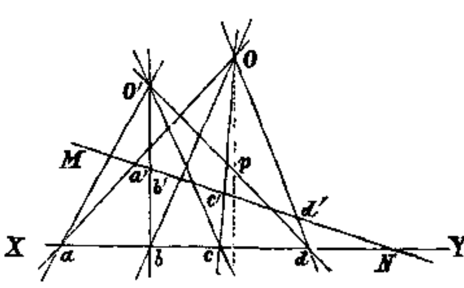
$$(acdb) = \frac{1}{1-\alpha} \quad , \quad (adcb) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

Какое бы изъ этихъ выраженій ни означили одной буквой, напримѣръ $1-\alpha=\beta$, всѣ функціи (11) получаютъ тѣже формы только въ другомъ порядкѣ:

$$\alpha = 1-\beta \quad , \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1-\beta} \quad , \quad 1-\alpha = \beta \quad , \quad \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\beta} \; ,$$

$$\frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta-1} \quad , \quad \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{\beta-1}{\beta}$$

Фиг. 74.



§ 93. Возьмемъ, какую-нибудь, точку O (фиг. 74), внѣ прямой, на которой находятся четыре точки a, b, c, d. Проведемъ черезъ точку O и точки a, b, c, d прямыя Oa, Ob, Oc и Od. Означимъ углы между этими прямыми символами (Oa, Ob), (Oa, Oc)....

Площади треугольниковъ $\triangle aOc$, $\triangle bOd$, $\triangle aOd$, $\triangle aOb$, $\triangle bOc$, $\triangle cOd$ можно выразить двоякимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} 2\triangle aOc &= ac\,.\,p = Oa\,.\,Oc\,.\sin(Oa, Oc) \\ 2\triangle bOd &= bd\,.\,p = Ob\,.\,Od\,.\sin(Ob, Od) \\ 2\triangle aOd &= ad\,.\,p = Oa\,.\,Od\,.\sin(Oa, Od) \\ 2\triangle aOb &= ab\,.\,p = Oa\,.\,Ob\,.\sin(Oa, Ob) \\ 2\triangle bOc &= bc\,.\,p = Ob\,.\,Oc\,.\sin(Ob, Oc) \\ 2\triangle cOd &= cd\,.\,p = Oc\,.\,Od\,.\sin(Oc, Od) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Если въ каждомъ изъ ангармоническихъ отношеній точекъ a, b, c, d поставимъ вмѣсто отрѣзковъ ac, ab,..... ихъ выраженія, полученныя изъ выраженій (12), то найдемъ, напримѣръ:

$$(abcd) = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(Oa, Oc)}{\sin(Oa, Od)} : \frac{\sin(Ob, Oc)}{\sin(Ob, Od)} \qquad (13)$$

точно такія же выраженія найдемъ и для другихъ ангармоническихъ отношеній.

Выраженіе:

$$\frac{\sin(Oa, Oc)}{\sin(Oa, Od)} : \frac{\sin(Ob, Oc)}{\sin(Ob, Oc)} \tag{14}$$

называется *ангармоническимъ отношеніемъ* связки четырехъ прямыхъ Oa, Ob, Oc. Od, проходящихъ черезъ точку O. Оно обозначается символомъ $(O.abcd)$; слѣдовательно:

$$(abcd) = (O.abcd) \tag{15}$$

§ 94. *Предложеніе.* Изъ уравненія (13) слѣдуетъ, что ангармоническое отношеніе $(O.abcd)$ связки, не будетъ измѣнятся, при перемѣщеніи точки O на плоскости, если прямыя проходятъ постоянно черезъ точки a, b, c, d. И, обратно, ангармоническое отношеніе $(abcd)$ точекъ на прямой не будетъ измѣнятся, если прямая XY перемѣщается на плоскости, а связка Oa, Ob, Oc, Od не измѣняется, т. е:

$$(abcd) = (a'b'c'd') \quad , \quad (O.abcd) = (O'.abcd) \tag{16}$$

§ 95. Вообще шесть выраженій (11) ангармоническихъ отношеній четырехъ точекъ имѣютъ различныя числовыя значенія, но въ частности точки a, b, c, d могутъ быть такъ расположены, что нѣкоторыя изъ этихъ выраженій будутъ равны между собой. Такъ можетъ случится, что:

1) $\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ откуда $\alpha = \pm 1$

2) $\alpha = 1 - \alpha$ откуда $\alpha = \dfrac{1}{2}$

3) $\alpha = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$ откуда $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ (17)

4) $\alpha = \dfrac{1}{1 - \alpha}$ откуда $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

5) $\alpha = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ откуда $\alpha^2 - 2\alpha = 0$, $\alpha = 0$ и $\alpha = 2$

Изъ этихъ значеній только три различны. Въ самомъ дѣлѣ, если $\alpha = 1$, то мы будемъ имѣть слѣдующія числовыя значенія для шести ангармоническихъ отношеній:

$$\alpha \ , \ \frac{1}{\alpha} \ , \ 1 - \alpha \ , \ \frac{\alpha - 1}{\alpha} \ , \ \frac{1}{1 - \alpha} \ , \ \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$1 \ , \ 1 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ \infty \ , \ \infty$$

Такъ какъ одно изъ этихъ значеній есть 0, а это пятый случай (17), то пятый случай даетъ тѣже числовыя значенія, только въ другомъ порядкѣ:

$$0 \ , \ \infty \ , \ 1 \ , \ \infty \ , \ 1 \ , \ 0$$

Положимъ $\alpha = -1$, то ангармоническія отношенія будутъ:

$$-1 \ , \ -1 \ , \ 2 \ , \ 2 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2}$$

и такъ какъ между ними находятся второй и пятый случаи (17), т. е. $\frac{1}{2}$, 2, то онѣ дадутъ тѣже числовыя значенія.

Замѣтимъ, что третій и четвертый случаи тождественны, слѣдовательно четыре точки на прямой могутъ имѣть только три исключительныя положенія, при которыхъ ангармоническія отношенія будутъ:

$$\alpha = 1 \ , \ \alpha = -1 \ , \ \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Разсмотримъ каждый изъ этихъ случаевъ.

1) $\alpha = 1$.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$\frac{ac}{ad} = \frac{bc}{bd} \quad .$$

т. е. отношенія разстояній двухъ точекъ a и b отъ другихъ двухъ c и d равны, слѣдовательно точки a и b, c и d совпадаютъ.

2) $\alpha = -1$.

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$(abcd) = -1$$

или:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = -1 \quad , \quad \frac{ac}{ad} + \frac{bc}{bd} = 0 \qquad (18)$$

Четыре точки, находящіяся въ такомъ положеніи называются *гармоническими.* Если второе изъ уравненій (18) напишемъ въ формѣ:

$$\frac{ac}{bc} = -\frac{ad}{db} \qquad (19)$$

то легко видѣть, что точки c и d дѣлятъ разстояніе между точками a и b одна внутренне, а другая внѣшне, въ одномъ и томъ-же отношеніи. Если тоже уравненіе напишемъ въ формѣ:

$$\frac{db}{dc}=-\frac{da}{ac} \tag{20}$$

то легко видѣть, что разстояніе между точками c и d дѣлится точками b и a, одною внутренне, другою внѣшне, въ одномъ и томъ-же отношеніи. Поэтому точки a и b, c и d называются *сопряженными гармоническими парами.*

Если уравненіе (19) напишемъ въ формѣ:

$$\frac{ac}{cb}=\frac{ad}{bd} \tag{21}$$

и положимъ, что точка d находится на безконечности, то:

$$a\infty=b\infty$$

слѣдовательно:

$$ac=cb$$

т. е. точка c дѣлитъ разстояніе ab пополамъ. Откуда слѣдуетъ, что двѣ точки, ихъ средина и точка на безконечности суть четыре гармоническія точки (фиг. 75).

Фиг. 75.

Если уравненіе (21) напишемъ въ формѣ:

$$\frac{1}{cb}+\frac{1}{db}=\frac{2}{ab} \tag{22}$$

то изъ него легко видѣть, что если точка c будетъ приближаться къ точкѣ b, то точка d также будетъ приближаться къ точкѣ b и обѣ съ нею совпадутъ.

Если точка c, перейдя средину ab, будетъ приближаться къ a, то d перейдетъ на другую сторону отрѣзка ab и будетъ къ нему приближаться пока не совпадетъ съ точкою a.

3) $\alpha^2-\alpha+1=0$, $\alpha=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ или $\alpha^3+1=0$

Въ этомъ случаѣ a есть кубическій корень изъ -1, слѣдовательно имѣетъ три значенія:

$$a = -1 \quad , \quad \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \quad , \quad \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

Въ первыхъ двухъ случаяхъ мы имѣемъ три системы по два равныхъ ангармоническихъ отношеній, а въ настоящемъ случаѣ двѣ системы по три равныхъ ангармоническихъ отношеній. Кремона, итальянскій геометръ, это послѣднее расположеніе точекъ назвалъ *эквіангармоническимъ*.

Проэктивность.

§ 96. Если на двухъ данныхъ прямыхъ AB и AB', пересѣкающихся въ точкѣ O, возьмемъ по три точки a, b, c, на AB, и a', b', c', на AB', то по данной четвертой d, на AB, можно найти всегда четвертую d, на AB', такъ чтобы ангармоническое отношеніе точекъ a, b, c, d было равно ангармоническому отношенію точекъ a', b', c', d', т. е., чтобы:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{ba} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'} \tag{23}$$

точки a и a', b и b', c и c', d и d' называются *соотвѣтственными*.

Такъ какъ четвертая точка d взята произвольно, то можно построить на прямыхъ AB и $A'B'$ безчисленное множество соотвѣтственныхъ точекъ, коихъ ангармоническія отношенія съ точками a, b, c и a', b', c' равны. Напримѣръ, по данной еще точкѣ e, на прямой AB, можно построить точку e', на $A'B'$, такъ чтобы:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ae}{bc} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'e'}{b'e'} \tag{24}$$

Если, такимъ образомъ, построимъ ряды на AB и AB', то ангармоническое отношеніе четырехъ, произвольно выбранныхъ изъ ряда, точекъ на AB всегда равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ точекъ на $A'B'$.

Такъ, напримѣръ, если раздѣлимъ (24) на (23), то найдемъ:

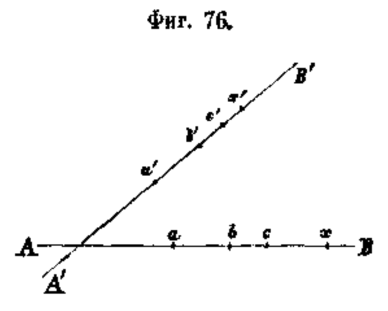
$$\frac{ad}{bd} : \frac{ae}{be} = \frac{a'd'}{b'd'} : \frac{a'e'}{b'e'}$$

т. е. ангармоническое отношеніе точекъ a, b, d, e равно ангармоническому отношенію соотвѣтственныхъ точекъ a', b', d', e'.

Такіе два ряда на прямыхъ AB и $A'B'$ называются *проэктивными*. Шаль ихъ назвалъ *гомографическими*, а Мёбіусъ *колинеарными*.

Изъ этого видимъ, что три данныя пары точекъ на прямыхъ AB и $A'B$ вполнѣ опредѣляютъ проэктивные ряды.

Фиг. 76.



Слѣдовательно, если a и a', b и b', c и c (фиг. 76) суть три данныя пары, то, какая-нибудь, четвертая проэктивная пара x и x найдется изъ уравненія (23):

$$\frac{ax}{bx} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'x'}{b'x'} : \frac{a'c'}{b'c'} \tag{25}$$

§ 97. *Точки соотвѣтствующія безконечно удаленнымъ*. Если на двухъ прямыхъ расположены два проэктивные ряда, то каждой точкѣ одного ряда соотвѣтствуетъ точка другаго. Посмотримъ какія точки соотвѣтствуютъ точкамъ на безконечности.

Если въ уравненіи (25) положимъ $x' = \infty$, а $x = I$, то найдемъ:

$$\frac{aI}{bI} : \frac{ac}{bc} = 1 : \frac{a'c'}{b'c'}$$

или:

$$\frac{aI}{bI} = \frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'} \tag{26}$$

Полагая $x = \infty$, а $x' = I'$ изъ того-же уравненія (25), найдемъ:

$$1 : \frac{ac}{bc} = \frac{a'I'}{b'I'} : \frac{a'c'}{b'c'}$$

или:

$$\frac{a'I'}{b'I'} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{ac}{bc} \tag{27}$$

Съ помощью уравненій (26) и (27), опредѣляются точки I и I', соотвѣтствующія безконечно удаленнымъ точкамъ на прямыхъ AB и $A'B'$ двухъ проэктивныхъ рядовъ, которые опредѣляются тремя данными парами a, a'; b, b'; c, c' соотвѣтственныхъ точекъ. Эти точки связаны слѣдующею зависимостью, которая получается, раздѣливъ (26) на (27):

$$\frac{aI}{bI} = \frac{b'I'}{a'I'} \tag{28}$$

Такъ какъ проэктивные ряды вполнѣ опредѣляются тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ, то въ уравненіи (25) можно или одну изъ данныхъ паръ замѣстить парою I, ∞ или ∞, I' или двѣ пары данныхъ точекъ замѣстить двумя парами I, ∞ и ∞, I'.

Если оставимъ пары a, a' и b, b, а вмѣсто пары c, c' возьмемъ I, ∞, то въ уравненіи (25), которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{ax}{bx} : \frac{a'x'}{b'x'} = \frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'} \tag{29}$$

надобно замѣстить вторую часть выраженіемъ (26), что даетъ:

$$\frac{ax}{bx} = \frac{aI}{bI} \cdot \frac{a'x'}{b'x'} \tag{30}$$

Это уравненіе проэктивности двухъ рядовъ, опредѣляемыхъ тремя парами a, a'; b, b' и I, ∞.

Точно также проэктивность тѣхъ же рядовъ опредѣляемыхъ парами a, a'; b, b' и ∞, I', выражается уравненіемъ:

$$\frac{a'I'}{b'I'} \cdot \frac{ax}{bx} = \frac{a'x'}{b'x'} \tag{31}$$

Наконецъ, если пары b, b' и c, c' замѣстимъ парами I, ∞ и ∞, I', то найдемъ:

$$\frac{ax}{Ix} = \frac{a'x'}{a'I'}. \tag{32}$$

Таковы уравненія (29), (30), (31), (32) проэктивности двухъ рядовъ.

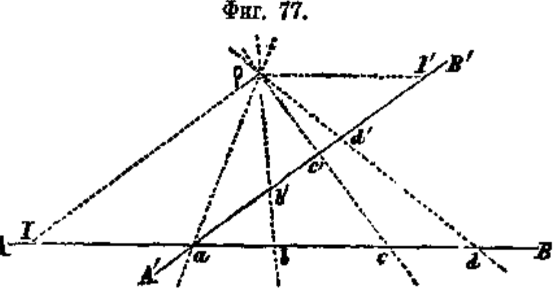
§ 98. Назовемъ точки I и I', соотвѣтствующія безконечно удаленнымъ точкамъ *главными*.

Если бы два проэктивные ряда были такого свойства, что $I = \infty$, то и $I' = \infty$, какъ показываетъ уравненіе (28), въ этомъ случаѣ проэктивность двухъ рядовъ выразится уравненіемъ:

$$\frac{ax}{bx} = \frac{a'x'}{b'x'}, \tag{33}$$

полученнымъ изъ (30) или (31), полагая въ первомъ $I = \infty$, а во второмъ $I' = \infty$. Изъ предъидущаго уравненія видимъ, что проэктивность, въ этомъ случаѣ, обращается въ пропорціональность. Такіе два ряда называются *подобными*. Слѣдовательно въ подобныхъ рядахъ на двухъ прямыхъ, точкѣ на безконечности, въ одномъ изъ нихъ, соотвѣтствуетъ точка на безконечности въ другомъ и обратно.

§ 99. *Предложеніе.* Если въ двухъ проэктивныхъ рядахъ на двухъ прямыхъ AB и $A'B'$ соотвѣтственныя точки, напримѣръ, a и a' совпадаютъ, то всѣ прямыя, проходящія черезъ соотвѣтственныя точки, проходятъ черезъ одну точку, которая называется *центромъ перспективы.*



Фиг. 77.

Доказательство. Пусть $a, b, c, d \ldots$ и $a, b', c', d', \ldots$ суть (фиг. 77) соотвѣтственныя точки на AB и $A'B'$, т. е. a есть общая точка или сама себѣ соотвѣтственная.

Такъ какъ эти ряды проэктивны по условію, то мы имѣемъ:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac'}{ad'} : \frac{b'c'}{b'd'} \tag{34}$$

Проведемъ прямыя bb' и cc' и точку ихъ пересѣченія ρ соединимъ съ общею точкою a, проведемъ прямую ρd, если она не пройдетъ чрезъ соотвѣтственную точку d', то она встрѣтитъ AB' въ точкѣ d'', слѣдовательно мы будемъ имѣть (§ 94):

$$(abcd) = (ab'c'd'')$$

соображаясь съ (34), найдемъ равенство:

$$(ab'c\,d') = (ab\,c'd'')$$

изъ котораго видимъ, что точка d'' совпадаетъ съ d'.

Такіе два проэктивные ряда называются *перспективными.* Если проэктивные ряды подобны, центръ перспективы находится на безконечности.

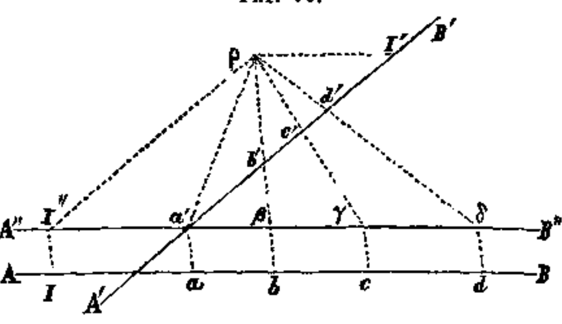
Два проэктивные ряда могутъ быть сдѣланы перспективными; для этого одну изъ прямыхъ передвигаютъ параллельно самой себѣ до тѣхъ поръ пока одна изъ точекъ одной прямой не совпадетъ съ своей соотвѣтственной точкой другой прямой. Очевидно, что въ этомъ положеніи проэктивные ряды дѣлаются перспективными.

Въ двухъ перспективныхъ рядахъ легко построить главныя точки I и I'. Пусть $a, b, c, d, \ldots$ и $a, b', c', d', \ldots$ (фиг. 77) будутъ два перспективные ряда на прямыхъ AB и $A'B'$. Если черезъ центръ ρ перспективы проведемъ прямую $\rho I \parallel A'B'$ и $\rho I' \parallel AB$, то эти прямыя встрѣтятъ AB и $A'B'$ въ точкахъ I и I', которыя, очевидно, и суть главныя точки соотвѣтственныя точкамъ на безконечности на прямыхъ AB и $A'B'$.

§ 100. Легко также построить точки I и I' въ двухъ проэктивныхъ рядахъ (фиг. 78).

Пусть $a, b, c, d, \ldots; a', b', c', d', \ldots$ будутъ два проэктивные ряда на AB и $A'B'$; передвинемъ прямую AB параллельно самой себѣ въ положеніе $A''B''$ такъ, чтобы одна изъ ея точекъ, напримѣръ a, совпала со своей соотвѣтственной a' на $A'B$; проведемъ прямую aa' и $b\beta \parallel aa'$, $c\gamma \parallel aa'$, $d\delta \parallel aa'$ и т. д.; рядъ полученныхъ, такимъ образомъ, точекъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ на $A''B''$ будетъ перспективный съ рядомъ $a', b', c', d', \ldots$ Центръ перспективы ρ получится, проводя прямыя $b\beta$ и $c'\gamma$ до встрѣчи въ точкѣ ρ. Если черезъ ρ проведемъ прямыя $\rho I'' \parallel A'B$ и $\rho I' \parallel AB$, то точки I'' и I' на прямыхъ $A''B''$ и $A'B$ будутъ главными точками перспективныхъ рядовъ $a', \beta, \gamma, \delta, \ldots$ и $a', b', c, d', \ldots$ Если наконецъ проведемъ $I''I \parallel aa'$, то точка I, полученная на AB, будетъ искомая. Очевидно, что точки I и I', полученныя на AB и $A'B$, будутъ главныя двухъ данныхъ проэктивныхъ рядовъ.

Фиг. 78.



§ 101. Проэктивность двухъ рядовъ на двухъ прямыхъ можетъ быть выражена еще въ болѣе общей формѣ, слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ три пары соотвѣтственныхъ точекъ, произвольно выбранныхъ изъ двухъ данныхъ проэктивныхъ рядовъ.

Три выбранныя пары вполнѣ опредѣляютъ проэктивность рядовъ, какъ мы видѣли выше. Возьмемъ на каждой изъ прямыхъ AB и $A'B'$ по точкѣ и примемъ каждую изъ этихъ точекъ за начало, такъ что всѣ точки на прямыхъ AB и $A'B'$ опредѣляются разстояніями ихъ отъ точекъ принятыхъ за начало. Пусть три пары точекъ опредѣляются абсциссами x_1, x'_1; x_2, x'_2 и x_3, x'_3 и наконецъ, какія-нибудь, скользящія точки опредѣляются абсциссами x и x'.

Легко видѣть, что уравненіе проэктивности (23) сдѣлается, если точки $a, b, c, d; a', b', c', d'$ будутъ имѣть абсциссами $x_1, x_2, x_3, x; x'_1, x'_2, x'_3, x'$:

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x}{x_2-x}=\frac{x'_1-x'_3}{x'_2-x'_3}:\frac{x'_1-x'}{x'_2-x'} \quad (35)$$

откуда, послѣ всѣхъ приведеній, это уравненіе приметъ форму:

$$Axx'+Bx+Cx'+D=0 \quad (36)$$

гдѣ коэфиціенты A, B, C, D суть функціи трехъ паръ данныхъ точекъ.

Такимъ уравненіемъ связаны два проэктивные ряда на двухъ прямыхъ.

Обратно, если между абсциссами точекъ на двухъ прямыхъ, существуетъ зависимость выраженная уравненіемъ:

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \tag{37}$$

то эти два ряда будутъ проэктивны. Въ самомъ дѣлѣ, изъ этого уравненія мы имѣемъ:

$$x' = -\frac{D+Bx}{C+Ax}$$

Возьмемъ на прямой AB, какія-нибудь, четыре точки; пусть ихъ абсциссы будутъ x_1, x_2, x_3, x_4, то абсциссы соотвѣтственныхъ точекъ x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 опредѣлятся изъ уравненій:

$$x'_1 = -\frac{D+Bx_1}{C+Ax_1},\quad x'_2 = -\frac{D+Bx_2}{C+Ax_2},\quad x'_3 = -\frac{D+Bx_3}{C+Ax_3},\quad x'_4 = -\frac{D+Bx_4}{C+Ax_4}$$

откуда легко видѣть, что:

$$\frac{x'_1-x'_2}{x'_1-x'_3} : \frac{x'_2-x'_3}{x'_2-x'_4} = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} : \frac{x_2-x_3}{x_2-x_4}$$

т. е. ангармоническія отношенія, произвольно выбранныхъ четырехъ точекъ и четырехъ имъ соотвѣтственныхъ, опредѣляемыхъ изъ уравненія (37), равны, слѣдовательно ряды проэктивны.

§ 102. Уравненію проэктивности:

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \tag{38}$$

можно дать различныя формы, опредѣляя коэфиціенты A, B, C, D точками выбранными извѣстнымъ образомъ.

Если даны три пары проэктивныхъ точекъ x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x_3', то онѣ должны удовлетворять уравненію (38), слѣдовательно:

$$Ax_1x'_1 + Bx_1 + Cx'_1 + D = 0$$

$$Ax_2x'_2 + Bx_2 + Cx'_2 + D = 0$$

$$Ax_3x'_3 + Bx_3 + Cx'_3 + D = 0$$

присовокупляя къ этимъ уравненіемъ, уравненіе (38) для, какой-нибудь, пары скользящихъ точекъ, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ x_1x'_1 & x_1 & x'_1 & 1 \\ x_2x'_2 & x_2 & x'_2 & 1 \\ x_3x'_3 & x_3 & x'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{39}$$

таково уравненіе проэктивности двухъ рядовъ опредѣляемыхъ тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ.

Выбирая извѣстнымъ образомъ пары соотвѣтственныхъ точекъ, уравненію проэктивности можно дать различныя формы. Въ уравненіи одинъ изъ коэфиціентовъ можно положить равнымъ единицѣ, напримѣръ A, слѣдовательно уравненіе проэктивности будетъ:

$$xx' + Bx + Cx' + D = 0 \tag{40}$$

Если за начало, на прямыхъ AB и AB', примемъ соотвѣтственныя точки, то, очевидно, при $x=0$ мы должны имѣть и $x'=0$, а это требуетъ, чтобы $D=0$, слѣдовательно уравненіе (40) сдѣлается:

$$xx' + Bx + Cx' = 0 \tag{41}$$

Если вмѣсто абсциссъ x и x' возьмемъ отрѣзки ax и $a'x'$, гдѣ a и a' суть соотвѣтственныя точки, то предъидущее уравненіе сдѣлается:

$$ax\,.\,a'x' + Bax + Ca'x' = 0 \tag{42}$$

Опредѣлимъ B и C съ помощью главныхъ точекъ I и I', для этого положимъ въ (42) послѣдовательно $ax = aI$, $a'x' = \infty$ и $a'x' = a'I'$, $ax = \infty$, то будемъ имѣть:

$$B + a'I' = 0 \quad , \quad C + aI = 0$$

откуда уравненіе (42) сдѣлается:

$$ax\,.\,a'x' - a'I'\,.\,ax - aI\,.\,a'x' = 0 \tag{43}$$

или:

$$\frac{aI}{ax} + \frac{a'I'}{a'x'} = 1 \tag{44}$$

§ 103. На основаніи этого уравненія (44) можно рѣшить слѣдующія задачи:

Задача 1. По данной точкѣ a въ одномъ изъ двухъ данныхъ проэктивныхъ рядовъ, найти такую точку x, чтобы отрѣзокъ ax былъ равенъ соотвѣтственному отрѣзку $a'x'$ или равенъ, но съ противнымъ знакомъ?

Рѣшеніе. Эта задача рѣшается, положивъ въ уравненіи (44) $ax = a'x'$ или $ax = -a'x'$. Такія положенія даютъ:

$$ax = aI + a'I' \text{ и } ax = aI - a'I'$$

Для построенія этихъ отрѣзковъ необходимо условиться въ какомъ направленіи, отъ точекъ a и a', считать отрѣзки положительными и въ какомъ отрицательными.

Задача 2. Даны двѣ прямыя OA и OA' и точка ρ, провести черезъ точку ρ такъ прямую, чтобы она, пересѣкаясь съ OA и OA' въ точкахъ x и x' дала отрѣзки $Ox = Ox'$ или $Ox = -Ox'$.

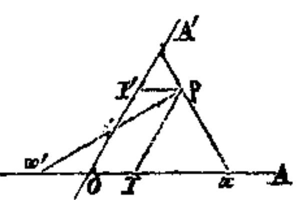
Рѣшеніе. Если черезъ точку ρ (фиг. 79) будемъ проводить прямыя, пересѣкающія OA и OA', то получимъ на этихъ прямыхъ два проэктивные ряда точекъ (§ 94), въ которыхъ точка O сама себѣ соотвѣтственная, слѣдовательно соотвѣтственныя точки будутъ удовлетворять уравненію (44):

$$\frac{OI}{Ox} + \frac{OI'}{Ox} = 1$$

полагая $Ox = Ox'$ или $Ox = -Ox'$ будемъ имѣть:

$$Ox = OI + OI' \quad , \quad Ox = OI - OI'$$

Фиг. 79.



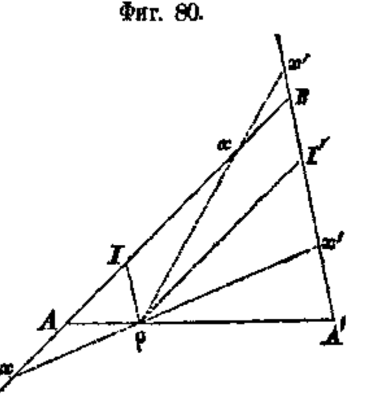
проводя черезъ ρ прямыя $\rho I' \parallel OA$ и $\rho I \parallel OA'$ найдемъ главныя точки I и I'. Слѣдовательно задача рѣшается построеніемъ главныхъ точекъ I и I'. Условимся считать отрѣзки по направленію отъ O къ I и I' положительными. Если отъ точки I отложимъ $Ix = OI'$ и $Ox' = -OI$, то прямыя ρx и $\rho x'$ будутъ искомыя.

Задача 3. Черезъ данную точку ρ на основаніи треугольника $AA'B$ провести прямую $\rho xx'$, такъ чтобы отрѣзки Ax и $A'x'$ были равны или равны съ противными знаками?

Рѣшеніе. Прямая, проведенная черезъ точку ρ, пересѣкаясь съ сторонами AB и $A'B$ треугольника $AA'B$ (фиг. 80) образуетъ проэктивные ряды. Если построимъ главныя точки I и I', какъ показано выше (§ 100), то соотвѣтственныя точки будутъ удовлетворять уравненію:

$$\frac{AI}{Ax} + \frac{A'I'}{A'x'} = 1$$

Фиг. 80.



A и A' суть соотвѣтственныя точки. Полагая $Ax = \pm A'x'$, найдемъ:

$$Ax = AI \pm A'I'$$

Если условимся считать отрѣзки, отсчитываемые отъ A и A' по направленію къ I и I', то, откладывая отъ точки I, $Ix = A'I'$ и $Ix = -A'I'$, найдемъ точки x и x, черезъ которыя, проведенныя прямыя ρx и ρx, рѣшаютъ задачу. Если бы въ предъидущихъ задачахъ требовалось найти такіе отрѣзки Ax и $A'x'$, чтобы отношеніе между ними было данное λ, то надобно только въ уравненіяхъ положить:

$$Ax = \pm \lambda A'x'$$

§ 104. Если въ уравненіи:

$$xx' + Bx + Cx' + D = 0 \tag{45}$$

будемъ считать отрѣзки на прямыхъ AB и $A'B'$ не отъ соотвѣтственныхъ точекъ, а отъ какихъ-нибудь, a на AB и b' на $A'B'$, то предъидущее уравненіе будетъ имѣть форму:

$$ax \,.\, b'x' + Bax + Cb'x' + D = 0 \tag{46}$$

Полагая $x = I$ и $x' = I'$, найдемъ:

$$B = -b'I' \quad , \quad C = -aI$$

слѣдовательно уравненіе (46) будетъ:

$$ax.b'a' - b'I'.ax - aI.b'x' + D = 0 \tag{47}$$

чтобы опредѣлить D положимъ $x = a$, то $x' = a'$, подставляя найдемъ:

$$D = aI.b'a'$$

слѣдовательно уравненіе приметъ форму:

$$ax.b'x' - b'I'.ax - aI.b'x' + aI.b'a' = 0 \tag{48}$$

Если въ (47) положимъ $a = I$, а $b' = I'$, то это уравненіе приметъ весьма простую форму:

$$Ix.I'x' = aI.a'I = k^2 \tag{49}$$

k есть величина постоянная, а $D = aI.a'I = k^2$.

§ 105. Если въ уравненіи:

$$Aax.b'x' + Bax + Cb'x' + D = 0 \tag{50}$$

коэфиціенты B и C опредѣлимъ, полагая послѣдовательно $x = I$, $x' = \infty$; $x = \infty$, $x' = I$, то найдемъ:

$$B + A.b'I' = 0 \quad , \quad C + A.aI = 0.$$

откуда:

$$b'I' = -\frac{B}{A} \quad , \quad aI = -\frac{C}{A}$$

Если проэктивные ряды подобны, то $aI = \infty$ и $a'I' = \infty$ (§ 98), слѣдовательно необходимо имѣть $A = 0$, въ силу чего уравненіе (50) сдѣлается:

$$Bax + Cb'x' + D = 0$$

полагая $x=a$, $x'=a'$; $x'=b'$, $x=b$, найдемъ:

$$\frac{C}{D}=-\frac{1}{b'a'}\quad,\quad\frac{B}{D}=-\frac{1}{ab}$$

подставляя въ предъидущее уравненіе, получимъ:

$$\frac{ax}{ab}+\frac{b'x'}{b'a'}=1 \tag{51}$$

Если вмѣсто bx' подставимъ $a'x'-a'b$, то уравненіе преобразуется въ:

$$\frac{ax}{ab}+\frac{a'x}{b'a'}=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{ax}{a'x'}=\frac{ab}{a'b'}$$

форма, изъ которой видна пропорціональность соотвѣтственныхъ отрѣзковъ.

§ 106. Если одну изъ прямыхъ, на которыхъ расположены два проэктивные ряда, совмѣстимъ съ другою, то оба проэктивные ряда расположатся на одной прямой.

Помѣстимъ прямую $A'B'$ на AB такъ, чтобы точка b' совпала съ точкою a, то уравненіе (48) проэктивности двухъ рядовъ расположенныхъ на одной прямой, если отрѣзки отсчитываются отъ одной точки a, будетъ:

$$ax.ax'-aI'.ax-aI.ax'+aI.aa'=0 \tag{52}$$

какъ бы прямая $A'B'$ ни была наложена на AB всегда найдутся такія двѣ соотвѣтственныя точки, которыя совпадутъ. Такія точки называются *двойными*. Чтобы найти эти точки надобно въ уравненіи (52) положить $x=x'$, полученное уравненіе:

$$ax^2-(aI+aI')\,ax+aI.aa'=0 \tag{53}$$

даетъ возможность опредѣлить положеніе двойныхъ точекъ. Такъ какъ это уравненіе второй степени, то проэктивные ряды на одной прямой линіи имѣютъ двѣ двойныя точки, дѣйствительныя, совпадающія или мнимыя.

Если двойныя точки означимъ черезъ e и f, то ae и af будутъ корни уравненія (53). Изъ свойствъ квадратнаго уравненія мы имѣемъ:

$$ae+af=aI+aI'$$

а это показываетъ, что средина между e и f есть вмѣстѣ и средина между I и I'. Если O есть средина, то:

$$2aO=aI+aI'$$

слѣдовательно уравненіе (53) можно написать въ формѣ:

$$\overline{ax}^2 - 2aO . ax + aI . aa' = 0 \qquad (54)$$

Если за начало отрѣзковъ возьмемъ точку O, т. е. положимъ $a = O$, то уравненіе (54) сдѣлается:

$$Ox^2 + OI . OO' = 0 \qquad (55)$$

гдѣ O' есть соотвѣтственная точка точки O. Такъ какъ O есть средина между I и I', то $OI = -OI'$, слѣдовательно:

$$\overline{Ox}^2 = OI' . OO' \qquad (56)$$

откуда:

$$Ox = \pm \sqrt{OI' . OO'}$$

т. е.:

$$Oe = + \sqrt{OI' . OO'} \quad , \quad Of = - \sqrt{OI . OO'} \qquad (57)$$

Слѣдовательно двойныя точки находятся по обѣ стороны точки O на разстояніи $\sqrt{OI' . OO'}$.

Если точки O' и I' находятся по одну сторону точки O, то двойныя точки будутъ дѣйствительныя, въ противномъ случаѣ онѣ мнимыя.

Выраженіе (56) даетъ легкій способъ построить двойныя точки; для этого надобно только построить отрѣзокъ средне-пропорціональный между отрѣзками OI' и OO'.

§ 107. Мы видѣли, что три пары точекъ a, a'; b, b'; c, c' опредѣляютъ проэктивность двухъ рядовъ, а четвертая, какая-нибудь, пара опредѣляется изъ уравненія:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ax}{bx} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'x'}{b'x'}$$

или:

$$\frac{ax}{bx} = \lambda \frac{a'x'}{b'x'} \qquad (58)$$

гдѣ λ есть величина постоянная. Если a и b суть двойныя точки e и f, то мы имѣемъ:

$$\frac{ex}{fx} = \lambda \frac{ex'}{fx'} \quad \text{или} \quad \frac{ex}{fx} : \frac{ex'}{fx'} = \lambda \qquad (59)$$

т. е. ангармоническое отношеніе двухъ, какихъ-нибудь, соотвѣтственныхъ точекъ съ двойными точками, есть величина постоянная.

§ 108. Такова теорія проэктивности рядовъ точекъ расположенныхъ на прямыхъ линіяхъ. Съ помощью свойствъ такихъ рядовъ легко рѣша-

ются задачи, которыя занимали уже древнихъ и считались трудными. Аполоній посвятилъ имъ три сочиненія: „De sectione determinata“, „De sectione rationis“ и „De sectio spatii“. Первую задачу онъ рѣшилъ съ помощью 83-хъ предложеній, вторую съ помощью 181-го и третюю съ помощью 124-хъ.

Задачи эти суть слѣдующія.

1. Даны на прямой четыре точки, требуется найти пятую, такъ чтобы отношеніе произведенія разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ къ произведенію разстояній отъ другихъ двухъ было величиною данною?

2. Даны двѣ прямыя OA и OB и на нихъ двѣ точки A и B, черезъ данную точку ρ провести такъ прямую, чтобы она, пересѣкаясь съ OA и OB въ точкахъ a и a', дала отрѣзки Aa и Ba', отношеніе между которыми было бы данное λ?

3. На двухъ прямыхъ OA и OB даны двѣ точки A и B, провести черезъ данную точку ρ прямую такъ, чтобы отрѣзки Aa и Ba', которые она дѣлаетъ на данныхъ прямыхъ, дали произведеніе данной величины λ?

Читатель найдетъ рѣшенія этихъ задачъ въ главахъ XIV и XV сочиненія Шаля [1]).

Инволюція.

§ 109. Когда два проэктивные ряда, расположенные на двухъ прямыхъ линіяхъ, переносятся на одну изъ нихъ, то есть замѣчательное положеніе этихъ рядовъ, при которомъ *главныя точки* совпадаютъ. Въ этомъ случаѣ проэктивность двухъ рядовъ, на одной прямой линіи, носитъ названіе *инволюціи*.

Говорятъ, что рядъ точекъ есть *инволюціонный*.

Посмотримъ какую форму приметъ уравненіе проэктивности въ этомъ случаѣ.

Если изъ уравненія проэктивности:

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \tag{60}$$

опредѣлимъ главныя точки I, I' въ функціи коэфиціентовъ, то найдемъ, полагая, послѣдовательно, $x = I$, $x' = \infty$, $x = \infty$, $x' = I'$:

$$I = -\frac{C}{A}, \quad I' = -\frac{B}{A}$$

---

[1]) *Chasles*, Traité de géométrie supérieure. Paris, 1852, in-8.

Изъ этихъ выраженій видимъ, что если точки I и I' совпадутъ, то мы должны имѣть $B=C$, слѣдовательно уравненіе проэктивности (60) приметъ форму:

$$Axx'+B(x+x')+D=0 \tag{61}$$

Такъ какъ это уравненіе симметрично относительно x и x', то пары соотвѣтственныхъ точекъ, опредѣляемыхъ этимъ уравненіемъ, взаимно соотвѣтственны, т. е. онѣ мѣняются ролями, когда одну изъ нихъ разсматривать, какъ принадлежащую, то къ одному, то къ другому ряду. Если точка x принадлежитъ къ первому ряду, то соотвѣтственная x' находится во второмъ ряду, а если точку x разсматривать, какъ принадлежащую ко второму ряду, то x' будетъ находится въ первомъ ряду. Вслѣдствіи такого свойства рядъ точекъ былъ названъ *инволюціоннымъ.*

Уравненіе инволюціоннаго ряда (61), выраженное въ отрѣзкахъ, отсчитываемыхъ отъ извѣстной точки a, получится изъ (52), полагая въ немъ $aI=aI'=aO$:

$$ax\,.\,ax'-aO\,(ax+ax')+aO\,.\,aa'=0. \tag{62}$$

Точка O, совпаденія главныхъ точекъ I и I', называется *инволюціоннымъ центромъ.* Соотвѣтственная ей точка находится на безконечности. Изъ этого видимъ, что инволюціонный рядъ точекъ отличается отъ проэктивнаго только относительнымъ положеніемъ проэктивныхъ рядовъ на одной прямой линіи. Слѣдовательно онъ имѣетъ такую же общность, какъ и ряды проэктивные.

§ 110. Чтобы получить уравненія двойныхъ точекъ инволюціоннаго ряда, надобно положить въ уравненію (62) $x=x'$, что даетъ:

$$ax^2-2aO\,.\,ax+aO\,.\,aa'=0 \tag{63}$$

если означимъ двойныя точки черезъ e и f, то ae и af будутъ корни уравненія (63). Изъ свойствъ квадратнаго уравненія мы имѣемъ:

$$2aO=ae+af \quad \text{или} \quad aO=\frac{ae+af}{2}$$

т. е. центръ инволюціи находится на срединѣ разстоянія ef двойныхъ точекъ. Эти точки могутъ быть дѣйствительныя, совпадающія и мнимыя, смотря потому будетъ-ли:

$$aO^2-aO\,.\,aa'=aO\,(aO-aa')=aO\,.\,a'O \gtreqless 0$$

Если соотвѣтственныя точки a и a' будутъ по одну сторону центра O, то двойныя точки будутъ дѣйствительныя, если же a и a' находятся по обѣ стороны O, то двойныя точки мнимыя, наконецъ двойныя точки совпадутъ, если центръ будетъ точка сама себѣ соотвѣтствующая, а это тогда случится, когда центръ O будетъ самъ на безконечности, т. е. когда ряды подобны и соотвѣтственные отрѣзки равны. Мы видѣли (49), что:

$$Ix.I'x' = aI.a'I'$$

если рядъ будетъ инволюціонный, то $I = I' = O$, слѣдовательно уравненіе сдѣлается:

$$Ox.Ox' = Oa.Oa'$$

если вмѣсто точки a возьмемъ двойную точку e, то уравненіе сдѣлается:

$$Ox.Ox' = Oe^2 \tag{64}$$

Мы показали, что въ проэктивномъ ряду мы имѣемъ (59):

$$\frac{ex}{fx} : \frac{ex'}{fx'} = \lambda$$

λ есть величина постоянная; если рядъ инволюціонный, то положивъ $x = O$, $x = \infty$, найдемъ:

$$\frac{Oe}{Of} = \lambda$$

но $Oe = -Of$, слѣдовательно $\lambda = -1$; откуда видимъ, что двѣ, какія нибудь, соотвѣтственныя точки суть сопряженно-гармоническія съ двойными точками инволюціоннаго ряда.

Проэктивныя связки.

§ 111. Если черезъ точки O и O' проходятъ лучи, черезъ первую A, B, C, а черезъ вторую A', B', C', то по данному четвертому лучу D, проходящему черезъ точку O, можно опредѣлить четвертый лучъ D', проходящій черезъ точку O' такъ, чтобы:

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(B, C)} : \frac{\sin(A, D)}{\sin(B, D)} = \frac{\sin(A', C')}{\sin(B', C')} : \frac{\sin(A', D')}{\sin(B', D')} \tag{65}$$

т. е., чтобы ангармоническое отношеніе первой связки лучей было равно ангармоническому отношенію второй.

Такъ какъ четвертый лучъ D можетъ быть взятъ произвольно, а D опредѣляется по немъ изъ уравненія (65), то образуются, такимъ образомъ, двѣ связки лучей, коихъ ангармоническія отношенія съ лучами A, B, C и A', B', C' равны.

И равны вообще какіе бы соотвѣтственные лучи ни были взяты изъ связокъ.

Такія двѣ связки называются *проэктивными*, лучи A и A', B и B',... называются *соотвѣтственными*.

Изъ этого видимъ, что проэктивныя связки опредѣляются тремя парами соотвѣтственныхъ лучей и выражаются уравненіемъ:

$$\frac{\sin(A,C)}{\sin(B,C)}:\frac{\sin(A,X)}{\sin(B,X)}=\frac{\sin(A',C')}{\sin(B',C')}:\frac{\sin(A',X')}{\sin(B',X')} \qquad (66)$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{\sin(A,X)}{\sin(B,X)}=\lambda\frac{\sin(A',X')}{\sin(B',X')} \qquad (67)$$

гдѣ λ есть величина постоянная.

Если бы лучи A и B и соотвѣтственные лучи A' и B' были перпендикулярны, то предъидущее уравненіе будетъ имѣть форму:

$$\operatorname{tg}(A,X)=\lambda\,.\operatorname{tg}(A',X') \qquad (68)$$

§ 112. *Задача.* Показать, что если въ двухъ проэктивныхъ связкахъ два соотвѣтственные луча совпадутъ, то всѣ другіе соотвѣтственные лучи пересѣкутся на одной прямой линіи?

Мы не станемъ развивать свойства проэктивныхъ связокъ, а напишемъ только уравненія, соотвѣтствующія уравненіямъ проэктивныхъ рядовъ.

Уравненію (25) § 96 соотвѣтствуетъ (66).

Уравненію (42) § 102 соотвѣтствуетъ:

$$\frac{\sin(A,X)}{\sin(B,X)}:\frac{\sin(A,C)}{\sin(B,C)}+\frac{\sin(C',X')}{\sin(B',X')}:\frac{\sin(C',A')}{\sin(B',A')}=1$$

или:

$$\lambda\frac{\sin(A,X)}{\sin(B,X)}+\mu\frac{\sin(C',X')}{\sin(B',X')}=1 \qquad (69)$$

Если лучъ A перпендикуляренъ къ B, а лучъ C' къ B', то это уравненіе сдѣлается:

$$\lambda\operatorname{tg}(A,X)+\mu\operatorname{tg}(A',X')=1 \qquad (70)$$

Уравненіе соотвѣтствующее (46) § 104:

$$\frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \cdot \frac{\sin(B', X')}{\sin(D', X')} + \lambda \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} + \mu \frac{\sin(B', X')}{\sin(D', X')} + \nu = 0 \qquad (71)$$

если лучи A и C, B' и D' перпендикулярны, то уравненіе будетъ:

$$\operatorname{tg}(A, X) \cdot \operatorname{tg}(B', X') + \lambda \operatorname{tg}(A, X) + \mu \operatorname{tg}(B', X') + \nu = 0 \qquad (72)$$

§ 113. Если обѣ проэктивныя связки исходятъ изъ одной точки, то всегда есть лучи соотвѣтственные сами себѣ,—эти лучи называются *двойными*. Если эти лучи назовемъ черезъ E и F, то проэктивность можно написать въ формѣ (67):

$$\frac{\sin(E, X)}{\sin(F, X)} = \lambda \frac{\sin(E, X')}{\sin(F, X')} \qquad (73)$$

Если это уравненіе напишемъ въ формѣ:

$$\frac{\sin(E, X)}{\sin(F, X)} : \frac{\sin(E, X')}{\sin(F, X')} = \lambda \qquad (74)$$

то мы будемъ имѣть предложеніе (§ 107):

Ангармоническое отношеніе двухъ, какихъ-нибудь, соотвѣтственныхъ лучей съ двойными лучами есть величина постоянная.

Если двойные лучи перпендикулярны, то уравненіе (74) будетъ имѣть форму:

$$\operatorname{tg}(E, X) = \lambda \operatorname{tg}(E, X') \qquad (75)$$

§ 114. Если въ уравненіи (71), гдѣ лучи B' и D' взяты произвольно, положимъ, что они совпадаютъ съ лучами A и C и назовемъ черезъ I и I' два луча, которые соотвѣтствуютъ въ первой и во второй связкѣ одному и тому же лучу C, разсматриваемому, какъ принадлежащій и первой и второй связкѣ, то уравненіе (71) приметъ форму:

$$\frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} \cdot \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} + \lambda \frac{\sin(A, X)}{\sin(C, X)} + \mu \frac{\sin(A, X')}{\sin(C, X')} + \nu = 0 \qquad (76)$$

полагая, послѣдовательно, $X = C$ и $X' = C$, найдемъ, соображаясь съ сказаннымъ выше, значеніе коэффиціентовъ λ и μ:

$$\lambda = -\frac{\sin(A, I')}{\sin(C, I')} \quad , \quad \mu = -\frac{\sin(A, I)}{\sin(C, I)}$$

Слѣдовательно уравненіе (76) сдѣлается:

$$\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}\cdot\frac{\sin(A,X')}{\sin(C,X')}-\frac{\sin(A,I')}{\sin(C,I')}\cdot\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}-\frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)}\cdot\frac{\sin(A,X')}{\sin(C,X')}+\nu=0 \quad (77)$$

чтобы опредѣлить коэфиціентъ ν положимъ въ уравненіи (77) $X=A$, то найдемъ:

$$\nu=\frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)}\cdot\frac{\sin(A,A')}{\sin(C,A')}$$

Слѣдовательно уравненіе (77), наконецъ, сдѣлается:

$$\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}\cdot\frac{\sin(A,X')}{\sin(C,X')}-\frac{\sin(A,I')}{\sin(C,I')}\cdot\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}-\frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)}\cdot\frac{\sin(A,X')}{\sin(C,X')}+$$

$$+\frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)}\cdot\frac{\sin(A,A')}{\sin(C,A')}=0. \quad (78)$$

Полагая $X=X'$, найдемъ уравненіе, опредѣляющее двойные лучи:

$$\left\{\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}\right\}^2-\left\{\frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)}+\frac{\sin(A,I')}{\sin(C,I')}\right\}\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}+\frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)}\cdot\frac{\sin(A,A')}{\sin(C,A')}=0 \quad (79)$$

Лучи A и C выбраны произвольно, слѣдовательно можно ихъ взять перпендикулярными, въ этомъ случаѣ уравненія (78) и (79) сдѣлаются:

$$\operatorname{tg}(A,X).\operatorname{tg}(A,X')-\operatorname{tg}(A,I').\operatorname{tg}(A,X)-\operatorname{tg}(A,I).\operatorname{tg}(A,X')+$$

$$+\operatorname{tg}(A,I).\operatorname{tg}(A,A')=0 \quad (80)$$

$$\operatorname{tg}^2(A,X)-\{\operatorname{tg}(A,I)+\operatorname{tg}(A,I')\}\operatorname{tg}(A,X)+\operatorname{tg}(A,I).\operatorname{tg}(A,A')=0 \quad (81)$$

Если бы вмѣсто A поставили лучъ C, то въ предъидущихъ уравненіяхъ (80) и (81) надобно только измѣнить A на C, а tg на cotg.

§ 115. *Инволюціонная связка.* Если проэктивность будетъ такого свойства, что лучи будутъ взаимно соотвѣтственными, то такая связка называется *инволюціонной.*

Если лучи связки взаимно соотвѣтственны, то разсматривая лучъ C, какъ принадлежащій къ первой или второй связкѣ, соотвѣтственный лучъ будетъ I, слѣдовательно уравненія проэктивности (78) и (80) при $I'=I$ сдѣлаются:

$$\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}\frac{\sin(A,X')}{\sin(C,X')}-\frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)}\left\{\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}+\frac{\sin(A,X')}{\sin(C,X')}\right\}+$$

$$+\frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)}\frac{\sin(A,A')}{\sin(C,A')}=0 \quad (82)$$

$$\operatorname{tg}(A,X).\operatorname{tg}(A,X')-\operatorname{tg}(A,I)\{\operatorname{tg}(A,X)+\operatorname{tg}(A,X')\}+\operatorname{tg}(A,I).\operatorname{tg}(A,A')=0 \quad (83)$$

а уравненія для двойныхъ лучей примутъ форму:

$$\left\{\frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)}\right\}^2 - 2 \cdot \frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)} \cdot \frac{\sin(A,X)}{\sin(C,X)} + \frac{\sin(A,I)}{\sin(C,I)} \cdot \frac{\sin(A,A')}{\sin(C,A')} = 0 \qquad (84)$$

$$\operatorname{tg}^2(A,X) - 2\operatorname{tg}(A,I) . \operatorname{tg}(A,X) + \operatorname{tg}(A,I) . \operatorname{tg}(A,A') = 0 \qquad (85)$$

§ 116. Послѣ этой общей теоріи проэктивности и ея особенной формы—инволюціи, разсмотримъ эту послѣднюю, выраженную извѣстною зависимостью между тремя парами точекъ сопряженныхъ по двѣ.

Мы видѣли, что три пары точекъ вполнѣ опредѣляютъ инволюцію ряда, если эти три пары такъ даны, что ангармоническое отношеніе четырехъ, произвольно выбранныхъ, изъ трехъ паръ точекъ, равно ангармоническому отношенію четырехъ имъ сопряженныхъ.

Разсмотримъ всесторонне связь между этими тремя парами точекъ опредѣляющихъ инволюцію:

Пусть a и a', b и b', c и c', будутъ три сопряженныя пары точекъ. Если онѣ опредѣляютъ инволюцію, то (§ 91) мы будемъ имѣть, напримѣръ:

$$(abcc') = (a'b'c'c)$$

§ 117. *Предложеніе.* Если три пары точекъ:

$$a, a' \quad ; \quad b, b' \quad ; \quad cc'$$

составляютъ инволюцію, которая опредѣляется комбинаціей:

$$(abcc') = (a'b'c'c)$$

то это уравненіе будетъ удовлетворено, какую бы ни выбрали комбинацію четырехъ изъ шести точекъ.

Доказательство. Положимъ что инволюція шести точекъ a, a'; b, b'; c, c' опредѣлена сочетаніемъ:

$$(abcc') = (a'b'c'c) \qquad (86)$$

Мы говоримъ, что уравненіе будетъ имѣть мѣсто, какое бы сочетаніе ни взяли изъ шести точекъ по четыре.

1. Такъ какъ уравненіе (86) по условію имѣетъ мѣсто, то мы имѣемъ (§ 91):

$$(c'bca) = (cb'c'a')$$

или:

$$\frac{c'c}{c'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{cc'}{ca'} : \frac{b'c'}{b'a'}$$

Если въ этомъ уравненіи $c'c$ и cc' замѣнимъ отрѣзками $a'a$ и aa', то будемъ имѣть:

$$\frac{a'a}{c'a}:\frac{bc}{ba}=\frac{aa'}{ca'}:\frac{b'c'}{b'a'}$$

или:

$$\frac{a'c}{a'a}:\frac{bc}{ba}=\frac{ac'}{aa'}:\frac{b'c'}{b'a'}$$

Это уравненіе показываетъ равенство ангармоническихъ отношеній:

$$a',\ b,\ c,\ a \quad \text{и} \quad a,\ b',\ c',\ a'$$

2. Равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній (86) можно выразить и въ формѣ:

$$(cc'ab)=(c'ca'b')$$

или:

$$\frac{ca}{cb}:\frac{c'a}{c'b}=\frac{c'a'}{c'b'}:\frac{ca'}{cb'}$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{ca}{cb'}:\frac{c'a}{c'b'}=\frac{c'a'}{c'b}:\frac{ca'}{cb}$$

а въ этой формѣ уравненіе выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній a, b', c, c' и a', b, c', c и т. д.

§ 118. Если три пары сопряженныхъ точекъ a и a', b и b', c и c' составляютъ инволюцію, то слѣдующія семь уравненій имѣютъ мѣсто; и обратно, каждое изъ этихъ уравненій выражаетъ инволюцію и заключаетъ въ себѣ остальныя шесть:

$$\frac{ab\,.\,ab'}{ac\,.\,ac'}=\frac{a'b'\,.\,a'b}{a'c'\,.\,a'c}$$

$$\frac{bc\,.\,bc'}{ba\,.\,ba'}=\frac{b'c'\,.\,b'c}{a'b'\,.\,b'a} \tag{87}$$

$$\frac{ca\,.\,ca'}{cb\,.\,cb'}=\frac{c'a'\,.\,c'a}{c'b'\,.\,c'b}$$

$$ab'\,.\,bc'\,.\,ca'=-\,a'b\,.\,b'c\,.\,c'a$$

$$ab'\,.\,bc\,.\,c'a'=-\,a'b\,.\,b'c'\,.\,ca$$

$$ab\,.\,b'c'\,.\,ca'=-\,a'b'\,.\,bc\,.\,c'a \tag{88}$$

$$ab\,.\,b'c\,.\,c'a'=-\,a'b'\,.\,bc'\,.\,ca$$

Каждое изъ этихъ уравненій можно написать въ формѣ, выражающей равенство ангармоническихъ отношеній четырехъ точекъ, изъ шести, четыремъ сопряженнымъ. Это равенство имѣетъ мѣсто, такъ какъ, по условію, шесть точекъ составляютъ инволюцію; слѣдовательно предъидущія уравненія имѣютъ мѣсто.

§ 119. Обратно, каждое изъ этихъ уравненій (87 и 88) выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній, т. е. инволюцію шести точекъ, слѣдовательно остальныя имѣютъ также мѣсто. Такъ, напримѣръ, первое изъ уравненій (87) можно написать въ двухъ формахъ:

$$\frac{ab}{ac}:\frac{a'b}{a'c}=\frac{a'b'}{a'c'}:\frac{ab'}{ac'}\ ,\quad \frac{ab}{ac'}:\frac{a'b}{a'c'}=\frac{a'b'}{a'c}:\frac{ab'}{ac}$$

первое выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній сочетанія a, b, c, a' и a, b', c', a, а второе сочетанія a, b, c', a' и a', b', c, a. Второе изъ уравненій (88):

$$ab'\,.\,bc\,.\,c'a'=-a'b\,.\,b'c'\,.\,ca$$

вводя множитель aa' въ обѣ части, можно написать въ формѣ:

$$\frac{a'a}{a'b}:\frac{ca}{cb}=\frac{aa'}{ab'}:\frac{c'a'}{c'b'}$$

которое выражаетъ равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній a, b, c, a' и a', b', c', a.

Введя множитель bb' наше уравненіе можно написать въ формѣ выражающей равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній a, b, c, b' и a', b, c', b.

Наконецъ, введя множитель cc, уравненіе можно написать въ формѣ, выражающей равенство ангармоническихъ отношеній сочетаній a, b', c, c' и a', b, c', c.

§ 120. *Опредѣленіе.* Если одинъ изъ двухъ отрѣзковъ находится частью на другомъ, а частью внѣ, то мы будемъ говорить, что одинъ отрѣзокъ *налегаетъ* на другой.

§ 121. *Предложеніе.* Если три отрѣзка aa', bb', cc' составляютъ инволюцію, то если одинъ изъ отрѣзковъ налегаетъ на другой, то онъ налегаетъ также и на третій.

Доказательство. Пусть отрѣзокъ aa' налегаетъ на bb', одна изъ точекъ a или a' будетъ на bb', а другая внѣ bb', слѣдовательно произведенія $ab\,.\,ab'$ и $a'b\,.\,a'b'$ будутъ имѣть противные знаки, а если эти произве-

денія имѣютъ противные знаки, то изъ перваго уравненія (87) видно, что и произведенія $ac \cdot ac'$ и $ac' \cdot a'c$ имѣютъ также противные знаки, а это показываетъ, что одна изъ точекъ a или a' находится на отрѣзкѣ cc', т. е. что отрѣзокъ aa' налегаетъ и на cc'. Откуда слѣдуетъ, очевидно, что если отрѣзокъ не налегаетъ на bb, то онъ не налегаетъ и на cc'.

§ 122. Даны четыре точки a, a', b и b', пятую точку c можно взять произвольно, а сопряженную ей c' опредѣлить изъ уравненій (87) и (88).

Произвольный выборъ точки c даетъ два случая, въ которыхъ инволюціонная зависимость имѣетъ мѣсто только между пятью точками: это когда точка c будетъ взята на безконечности или когда она совпадаетъ со своей сопряженной.

§ 123. Положимъ, что точка c находится на безконечности, назовемъ черезъ O сопряженную ей точку c', то (87) и (88) сдѣлаются:

$$\frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{aO}{a'O} \quad , \quad \frac{ba \cdot ba'}{b'a \cdot b'a'} = \frac{bO}{b'O} \quad , \quad Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{Oa}{Ob} = \frac{ab'}{ba'} \quad , \quad \frac{Oa'}{Ob'} = \frac{a'b}{b'a} \\ \frac{Oa}{Ob'} = \frac{ab}{b'a'} \quad , \quad \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a'b'}{ba} \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

§ 124. Уравненіе:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'$$

показываетъ, что если точки a и a' находятся съ одной стороны точки O, то и точки b и b' находятся также съ одной стороны, такъ какъ, въ этомъ случаѣ, отрѣзки Oa и Oa' будутъ имѣть одинаковые знаки, а слѣдовательно и отрѣзки Ob и Ob' должны имѣть также одинаковые знаки. Если точка O находится между точками a и a', то, очевидно, что она должна находится и между точками b и b'. Изъ этого слѣдуетъ, что если отрѣзки aa' и bb' налегаютъ одинъ на другой, то точка O должна находится на общей обѣимъ отрѣзкамъ части, такъ какъ въ противномъ случаѣ, т. е. если бы точка была внѣ отрѣзковъ aa' и bb', одно изъ произведеній было бы больше другаго.

Наконецъ, если-бы два отрѣзка были одинъ внѣ другаго, то точка O должна находится между отрѣзками. Она не можетъ находится на одномъ изъ отрѣзковъ, потому что произведенія $Oa \cdot Oa'$ и $Ob \cdot Ob'$ имѣли-бы различные знаки; она не можетъ находится внѣ обоихъ отрѣзковъ, потому что одно изъ произведеній $Oa \cdot Oa'$ и $Ob \cdot Ob'$ было-бы больше другаго.

§ 125. *Двойныя точки.* Положимъ, что двѣ точки c и c', составляющія инволюцію съ двумя парами aa' и bb', совмѣщаются въ одну, которую мы назовемъ *двойною точкою инволюціи*; означимъ эту точку черезъ e, то семь уравненій (§ 118) сводятся на слѣдующія четыре:

$$\frac{ab \cdot ab'}{a'b' \cdot a'b} = \frac{ae^2}{a'e^2}$$

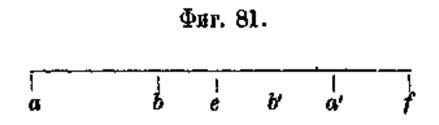
$$\frac{ba \cdot ba'}{b'a' \cdot b'a} = \frac{be^2}{b'e^2} \qquad (90)$$

$$ab' \cdot be \cdot ea' = -a'b \cdot b'e \cdot ea$$

$$ab \cdot b'e \cdot ea' = -a'b' \cdot be \cdot ea$$

Каждое изъ этихъ уравненій выражаетъ, что точка e составляетъ съ двумя парами точекъ a, a' и b, b' инволюцію, въ которой точка e есть сама себѣ сопряженная (фиг. 81).

Фиг. 81.



Положеніе точекъ имѣющихъ это свойство, опредѣляется каждымъ изъ четырехъ уравненій (90), которыя, будучи второй степени, даютъ два положенія для точки e. Слѣдовательно существуетъ двѣ двойныя точки инволюціи.

Означимъ вторую изъ этихъ точекъ черезъ f, тогда мы будемъ имѣть:

$$\frac{ab \cdot ab'}{a'b' \cdot a'b} = \frac{af^2}{a'f^2}$$

слѣдовательно:

$$\frac{ae^2}{a'e^2} = \frac{af^2}{a'f^2} \quad \text{откуда} \quad \frac{ae}{a'e} = -\frac{af}{a'f} \qquad (91)$$

Знакъ — взятъ потому что съ положительнымъ знакомъ точки e и f совпали-бы, что не имѣетъ мѣста.

Точно также имѣемъ:

$$\frac{be}{b'e} = -\frac{bf}{b'f} \qquad (92)$$

Уравненія (91) и (92) показываютъ, что отрѣзки aa' и bb' точками e и f дѣлятся гармонически.

Такъ какъ двойныя точки опредѣляются квадратнымъ уравненіемъ, то онѣ могутъ быть и *мнимыя*, что бываетъ тогда, когда отрѣзки aa' и bb' налегаютъ одинъ на другой.

§ 126. Обратно, если двѣ точки e и f дѣлятъ гармонически въ одно время два отрѣзка aa' и bb', то каждая изъ этихъ точекъ составляетъ съ парами a, a' и b, b', инволюцію, въ которой она будетъ сама себѣ сопряженною.

Въ самомъ дѣлѣ, если точки e и f дѣлятъ гармонически отрѣзки aa' и bb', то мы имѣемъ (§ 95):

$$\frac{2}{ef}=\frac{1}{ea}+\frac{1}{ea'} \quad , \quad \frac{2}{ef}=\frac{1}{eb}+\frac{1}{eb'}$$

откуда:

$$\frac{1}{ea}-\frac{1}{eb}=-\left(\frac{1}{ea'}-\frac{1}{eb'}\right)$$

или:

$$\frac{eb-ea}{ea\,.\,eb}=-\frac{eb'-ea'}{ea'\,.\,eb'}$$

или еще:

$$\frac{ab}{ea\,.\,eb}=-\frac{a'b'}{ea'\,.\,eb'}$$

откуда:

$$ab\,.\,b'e\,.\,ea'=-a'b'\,.\,be\,.\,ea$$

а это одно изъ уравненій (90) § 125, слѣдовательно и т. д.

§ 127. Одна изъ двойныхъ точекъ можетъ быть на безконечности. Пусть эта точка будетъ e. Дѣлая это положеніе въ уравненіяхъ (90), найдемъ:

$$ab\,.\,ab'=a'b'\,.\,a'b$$

$$ab\,.\,ba'=a'b'\,.\,b'a$$

$$ab=b'a' \quad ; \quad ab'=ba'$$

а вторая точка f будетъ находится на серединѣ каждаго изъ отрѣзковъ aa' и bb' (§ 95).

§ 128. *Предложеніе.* Если три пары точекъ a, a'; b, b'; c, c' составляютъ инволюцію, то четвертая пара d, d', составляющая инволюцію съ двумя первыми парами, составляетъ инволюцію съ третьей парой и каждой изъ двухъ первыхъ паръ.

Доказательство. Такъ какъ три пары точекъ составляютъ инволюцію, то мы имѣемъ, напримѣръ:

$$(acbb')=(a'c'b'b)$$

или:

$$\frac{ab}{ab'}:\frac{cb}{cb'}=\frac{a'b'}{a'b}:\frac{c'b'}{c'b} \tag{93}$$

но по условію три пары точекъ a, a'; b, b'; d, d' составляютъ инволюцію, слѣдовательно мы имѣемъ также:

$$(adbb')=(a'd'b'b)$$

или

$$\frac{ab}{ab'}:\frac{db}{db'}=\frac{a'b'}{a'b}:\frac{d'b'}{d'b} \tag{94}$$

изъ уравненій (93) и (94), найдемъ:

$$\frac{cb}{cb'}:\frac{db}{db'}=\frac{c'b'}{c'b}:\frac{d'b'}{d'b}$$

а это показываетъ, что ангармоническое отношеніе точекъ b, b', c, d равно ангармоническому отношенію точекъ b', b, c', d'; слѣдовательно три пары точекъ b, b'; c, c'; d, d' составляютъ инволюцію.

§ 129. *Центральная точка.* Мы видѣли § 123, что если три пары точекъ:

$$a,\ a';\quad b,\ b';\quad 0,\ \infty$$

составляютъ инволюцію, то:

$$Oa\,.\,Oa'=Ob\,.\,Ob'$$

Если c, c' есть третья пара, составляющая инволюцію съ двумя первыми парами a, a' и b, b', то, по предъидущему предложенію, мы также имѣемъ:

$$Ob\,.\,Ob'=Oc\,.\,Oc'$$

т. е. если три пары точекъ составляютъ инволюцію, то всегда существуетъ такая точка, коей произведеніе разстояній отъ сопряженныхъ точекъ есть величина постоянная. Эту точку называютъ *центральною* точкою инволюціи. Эта точка, какъ мы уже выше видѣли, составляетъ инволюцію съ двумя, какими-нибудь, изъ трехъ паръ, имѣя сопряженную точку на безконечности.

§ 130. Обратно, если три пары точекъ связаны условіемъ:

$$Oa\,.\,Oa'=Ob\,.\,Ob'=Oc\,.\,Oc'$$

то онѣ составляютъ инволюцію.

Въ самомъ дѣлѣ, если точка c' съ пятью точками a, a'; b, b' и c не составляла бы инволюціи, то существовала бы другая точка c'', которая составляла бы инволюцію съ a, a'; b, b' и c', т. е. мы имѣли бы:

$$Oa \, . \, Oa' = Oc \, . \, Oc''$$

сравнивая съ предъидущимъ, найдемъ:

$$Oc \, . \, Oc' = Oc \, . \, Oc''$$

откуда:

$$Oc' = Oc''$$

слѣдовательно и т. д.

§ 131. *Предложеніе.* Если на двухъ отрѣзкахъ aa' и bb' описаны два какіе-нибудь круга, то ихъ общая хорда пройдетъ всегда черезъ центральную точку O.

Доказательство. Пусть g будетъ одна изъ точекъ встрѣчи этихъ двухъ окружностей, мы говоримъ, что прямая Og пройдетъ и черезъ другую точку встрѣчи окружностей. Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ g' и g'' означимъ точки встрѣчи окружностей съ Og, то мы будемъ имѣть:

$$Og \, . \, Og' = Oa \, . \, Oa' \quad \text{и} \quad Og \, . \, Og'' = Ob \, . \, Ob'$$

но мы имѣемъ:

$$Oa \, . \, Oa' = Ob \, . \, Ob'$$

откуда:

$$Og' = Og''$$

т. е. точки g' и g'' совпадаютъ.

Слѣдствіе 1. Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если на трехъ инволюціонныхъ отрѣзкахъ опишемъ три окружности, проходящія черезъ одну и ту же точку, то эти три окружности пройдутъ всѣ и черезъ вторую точку и ихъ общая хорда пройдетъ черезъ центральную точку.

Слѣдствіе 2. Окружности, описанныя на трехъ инволюціонныхъ отрѣзкахъ, какъ на діаметрахъ, всѣ три проходятъ черезъ двѣ однѣ и тѣ же точки. Въ самомъ дѣлѣ, общія хорды этихъ окружностей, взятыя по двѣ, проходятъ всѣ три черезъ центральную точку, а такъ какъ онѣ перпендикулярны къ прямой, соединяющей ихъ центры, то совпадаютъ.

§ 132. Точки пересѣченія окружностей могутъ быть мнимыя, а это имѣетъ мѣсто, когда отрѣзки не налегаютъ одинъ на другой; въ этомъ случаѣ говорятъ, что окружности имѣютъ общую *радикальную ось* [1]).

---

[1]) См. Ващенко-Захарченко, Элементарная Геометрія. Кіевъ, 1883, in-8. См. стр. 138.

Если три окружности имѣютъ общую радикальную ось, то касательныя, проведенныя изъ центральной точки, къ тремъ окружностямъ равны.

§ 133. Если три окружности, описанныя на трехъ отрѣзкахъ aa', bb', cc', какъ на діаметрахъ, пересѣкаются, то прямыя, проведенныя изъ точки пересѣченія окружностей къ концамъ отрѣзковъ, перпендикулярны.

Откуда слѣдуетъ, что если три отрѣзка, на прямой, составляютъ инволюцію, то есть двѣ точки, дѣйствительныя или мнимыя, изъ которыхъ всѣ три отрѣзка видны подъ прямымъ угломъ.

Обратно: если прямой уголъ вращается около своей вершины, то отрѣзки, которые онъ дѣлаетъ своими сторонами, на какой-нибудь прямой составляютъ инволюцію.

§ 134. Возвратимся опять къ свойствамъ двойныхъ точекъ инволюціи. Пусть онѣ будутъ e и f, каждая изъ нихъ составляетъ инволюцію съ двумя парами a, a' и b, b' изъ пяти точекъ, въ которой онѣ сами себѣ сопряжены. Въ силу предложенія § 116 эти точки имѣютъ тоже свойство и относительно двухъ паръ b, b' и c, c', слѣдовательно онѣ дѣлятъ гармонически въ одно время три отрѣзка aa', bb', cc'. Изъ этого мы имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если три пары точекъ a, a'; b, b'; c, c' составляютъ инволюцію, то существуетъ пара точекъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, которыя дѣлятъ гармонически три отрѣзка aa', bb', cc'. Мы выше видѣли, что это суть двойныя точки.

§ 135. Двойныя точки лежатъ по обѣ стороны центральной точки.

Въ самомъ дѣлѣ, точка e составляетъ инволюцію съ двумя парами точекъ a, a' и b, b', слѣдовательно:

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = Oe^2$$

точно тоже имѣемъ и относительно точки f, слѣдовательно:

$$Oe^2 = Of^2 \quad , \quad Oe = -Of$$

Знакъ — взятъ потому что со знакомъ + точки e и f совмѣстились бы. Изъ этого видно, что точки e и f лежатъ, одна съ одной, другая съ другой стороны точки O, на равномъ отъ нея разстояніи.

Уравненіе:

$$Oe^2 = Oa \cdot Oa'$$

показываетъ, что точки e и f будутъ мнимыя, если точка O будетъ находится на отрѣзкахъ aa' и bb', что бываетъ, когда отрѣзки aa' и bb' налегаютъ одинъ на другой. Напротивъ, точки e и f будутъ дѣйствительныя, если одинъ отрѣзокъ заключенъ въ другомъ или одинъ лежитъ внѣ другаго.

§ 136. *Предложеніе.* Двойныя точки инволюціи, которой принадлежатъ двѣ пары сопряженныхъ точекъ a, a'; b, b' составляютъ инволюцію изъ шести точекъ съ двумя парами a и b', a' и b.

Доказательство. Мы выше видѣли, что точки e и f дѣлятъ гармонически каждый изъ отрѣзковъ aa' и bb' такъ, что мы имѣемъ:

$$\frac{ae}{af} = -\frac{a'e}{a'f} \quad \text{и} \quad \frac{be}{bf} = -\frac{b'e}{b'f}$$

откуда:

$$\frac{ae}{af} : \frac{a'e}{a'f} = \frac{b'f}{b'e} : \frac{bf}{be}$$

а это показываетъ, что:

$$(aa'ef) = (b'bfe)$$

а изъ этого слѣдуетъ, что три пары точекъ a и b', a' и b, e и f составляютъ инволюцію.

Гармоническая связка.

§ 137. Въ § 93 мы видѣли, что если черезъ четыре точки a, b, c, d, находящіяся на одной прямой линіи, проведемъ прямыя линіи, проходящія черезъ одну точку O, лежащую внѣ прямой точекъ a, b, c, d, то мы имѣемъ:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(Oa \,.\, Oc)}{\sin(Oa \,.\, Od)} : \frac{\sin(Ob \,.\, Oc)}{\sin(Ob \,.\, Od)} \tag{95}$$

Если точки a, b, c, d будутъ гармоническія, то и связка $(O \,.\, abcd)$ будетъ гармоническая и мы будемъ имѣть:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(Oa \,.\, Oc)}{\sin(Oa \,.\, Od)} : \frac{\sin(Ob \,.\, Oc)}{\sin(Ob \,.\, Od)} = -1 \tag{96}$$

Изъ уравненія:

$$\frac{\sin(Oa \,.\, Oc)}{\sin(Oa \,.\, Od)} : \frac{\sin(Ob \,.\, Oc)}{\sin(Ob \,.\, Od)} = -1$$

легко видѣть, что если сопряженныя прямыя Oc и Od перпендикулярны, то сопряженныя прямыя Oa и Ob составляютъ равные углы съ Oc.

И обратно, прямая, дѣлящая уголъ между двумя прямыми и прямая перпендикулярная къ ней, составляютъ гармоническую связку.

Легко также видѣть, что если прямая Oc, проближаясь къ Ob, совпадаетъ съ нею, то и сопряженная ей прямая Od будетъ приближатся къ

Ob и совпадетъ съ нею вмѣстѣ съ прямою *Oc*. Это видно изъ свойства гармоническихъ точекъ a, b, c, d, черезъ которыя проходятъ прямыя *Oa*, *Ob*, *Oc*, *Od*.

Инволюціонная связка.

§ 138. Шесть прямыхъ линій, проходящихъ черезъ одну точку и попарно сопряженныхъ образуютъ *инволюціонную связку*, если ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ линій, взятыхъ изъ трехъ паръ, равно ангармоническому отношенію четырехъ имъ сопряженныхъ прямыхъ.

Очевидно (§ 137), что инволюціонная связка пересѣкается всякою прямою въ шести точкахъ, которыя образуютъ инволюціонный рядъ и всѣ свойства этого ряда, въ который входятъ только ангармоническія отношенія, распространяютсл и на связку прямыхъ.

§ 139. Если шесть прямыхъ попарно сопряженныхъ *Oa* и *Oa'*, *Ob* и *Ob'*, *Oc* и *Oc'* назовемъ просто нумерами 1 и 1', 2 и 2', 3 и 3', а углы между ними символами (1, 1'); (1, 2);....., то легко видѣть изъ § 93, что между синусами ихъ угловъ существуетъ семь уравненій подобныхъ уравненіямъ (87) и (88) § 118:

$$\frac{\sin(1,2).\sin(1,2')}{\sin(1,3).\sin(1,3')} = \frac{\sin(1',2').\sin(1',2)}{\sin(1',3').\sin(1',3)} \tag{97}$$

$$\sin(1,2).\sin(2',3).\sin(1',3') = -\sin(1',2').\sin(2,3').\sin(1,3)$$

каждое изъ этихъ уравненій опредѣляетъ инволюцію связки и заключаетъ всѣ остальныя шесть, какъ слѣдствіе.

§ 140. Двойнымъ точкамъ инволюціоннаго ряда соотвѣтствуютъ двойные радіусы связки, которые могутъ быть дѣйствительные или мнимые. Эти двойные радіусы составляютъ гармоническую связку съ каждой парой сопряженныхъ радіусовъ и составляютъ инволюціонную связку съ радіусами *Oa* и *Ob'*, *Oa'* и *Ob*. Но въ связкѣ нѣтъ радіуса, соотвѣтствующаго центральной точкѣ ряда шести инволюціонныхъ точекъ. Отличительное свойство центральной точки есть то, что сопряженная ей точка находится на безконечности и исчезаетъ изъ уравненій инволюціоннаго ряда, между тѣмъ какъ въ инволюціонной связкѣ всѣ радіусы не имѣютъ никакой особенности относительно другихъ и ни одинъ не можетъ исчезнуть изъ уравненій инволюціи.

§ 141. *Предложеніе.* Если въ инволюціонной связкѣ два радіуса соотвѣтственно перпендикулярны къ ихъ сопряженнымъ радіусамъ, то и два другіе сопряженные радіусы также перпендикулярны между собою.

Доказательство. Проведемъ сѣкущую; пусть a, a'; b, b'; c, c' будутъ точки пересѣченія ея съ инволюціонной связкой. По предъидущему эти три пары точекъ образуютъ инволюцію, а слѣдовательно окружности, описанныя на отрѣзкахъ aa' и bb', какъ на діаметрахъ, проходятъ черезъ вершину связки, такъ какъ радіусы Oa и Oa', Ob и Ob', по условію, перпендикулярны; слѣдовательно окружность, описанная на отрѣзкѣ cc', какъ на діаметрѣ, пройдетъ также черезъ точку O, а слѣдовательно радіусы Oc и Oc' также перпендикулярны. Поэтому если три прямые угла имѣютъ общую вершину, то ихъ стороны или радіусы образуютъ инволюціонную связку.

§ 142. *Предложеніе.* Если углы, которые два радіуса инволюціонной связки, составляютъ съ ихъ сопряженными радіусами имѣютъ одну и ту же равнодѣлящую, то эта прямая будетъ равнодѣлящая и угла составляемаго двумя сопряженными радіусами.

Доказательство. Углы aOa' и bOb', по условію, имѣютъ общую равнодѣлящую, требуется доказать, что она будетъ равнодѣлящею и угла cOc'. Мы выше видѣли, что равнодѣлящая и перпендикулярная къ ней прямая дѣлятъ углы aOa' и bOb' гармонически, слѣдовательно это двойные радіусы связки, а потому они дѣлятъ гармонически и уголъ cOc', но такъ какъ эти радіусы перпендикулярны, то они суть равнодѣлящія одинъ угла cOc', а другой его дополнительнаго.

Въ этой главѣ мы изложили геометрически основную часть геометріи, которую называютъ *высшей геометріей* или *проэктивной.* Это послужитъ къ болѣе ясному представленію тѣхъ аналитическихъ изслѣдованій, которыя будутъ составлять предметъ слѣдующей главы. Большая часть изслѣдованій будетъ относится къ свойствамъ настоящей главы, но съ аналитической точки зрѣнія.

ГЛАВА X.

Ангармонія, гармонія, изложенныя аналитически.

§ 143. *Ангармонія.* Если:

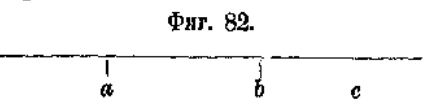
$$(a) \qquad A_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad A_2 = 0 \qquad (b) \tag{1}$$

суть уравненія двухъ точекъ или двухъ прямыхъ, то всякая другая точка (c), находящаяся на прямой (фиг. 82), проходящей черезъ точки (a) и (b) или всякая другая прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія прямыхъ (a) и (b), будетъ выражаться уравненіемъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \tag{2}$$

Точки или прямыя (a), (b) мы будемъ называть *основными* или *координатными*, такъ какъ онѣ служатъ основаніемъ для представленія уравненіями другихъ точекъ или прямыхъ.

Фиг. 82.



Если уравненія (a), (b) даны въ нормальной формѣ, то значеніе коэфиціента λ для точекъ будетъ (§§ 76 и 77)

Фиг. 83.

$$\lambda = \frac{ac}{cb} = -\frac{ac}{bc} \qquad (3)$$

а для прямыхъ:

$$\lambda = \frac{\sin(1,3)}{\sin(2,3)} \qquad (4)$$

если символы $(1, 3)$, $(2, 3)$ будутъ изображать углы между прямыми 1 и 3, 2 и 3 (фиг. 83).

§ 144. Принимая точки или прямыя (1) за основныя напишемъ уравненія четырехъ точекъ, находящихся на одной прямой линіи, или четырехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку. Уравненія эти будутъ (фиг. 84):

$$(a)\ A_1=0\quad,\quad(b)\ A_2=0\quad,\quad(c)\ A_1-\lambda A_2=0\quad,\quad(d)\ A_1-\mu A_2=0 \qquad (5)$$

Значеніе коэфиціентовъ λ и μ, если это четыре точки, будетъ:

Фиг. 84.

$$\lambda = \frac{ac}{bc}\quad,\quad \mu = \frac{ad}{bd}$$

Слѣдовательно ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ (5) будетъ:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \alpha = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (6)$$

Если же (5) будутъ четыре прямыя, то ангармоническое отношеніе этой связки будетъ:

$$\frac{\sin(1,3)}{\sin(2,3)} : \frac{\sin(1,4)}{\sin(2,4)} = \frac{\sin(1,3)}{\sin(1,4)} : \frac{\sin(2,3)}{\sin(2,4)} = \alpha = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (7)$$

Изъ этого видимъ, что если четыре точки или четыре прямыя даны уравненіями въ формѣ (5), то ихъ ангармоническое отношеніе будетъ отношеніе $\frac{\lambda}{\mu}$ — коэфиціентовъ.

§ 145. Но уравненія четырехъ точекъ или четырехъ прямыхъ не всегда бываютъ даны въ формѣ (5), а часто онѣ даются въ формѣ:

$$\begin{aligned} A_1-\lambda_1 A_2=0 \quad &, \quad A_1-\lambda_2 A_2=0 \\ A_1-\lambda_3 A_2=0 \quad &, \quad A_1-\lambda_4 A_2=0 \end{aligned} \tag{8}$$

Въ этомъ случаѣ выраженіе для ангармоническаго отношенія точекъ или прямыхъ находится, приводя уравненія (8) къ формѣ уравненій (5), слѣдующимъ образомъ:

$$A_1-\lambda_1 A_2=A'_1 \qquad A_1-\lambda_2 A_2=A'_2$$

опредѣливъ изъ этихъ уравненій A_1 и A_2 черезъ A'_1 и A'_2, выразимъ и два послѣднія изъ уравненій (8) черезъ эти величины.

Это преобразованіе даетъ слѣдующія уравненія:

$$A_1=\frac{\lambda_2 A'_1-\lambda_1 A'_2}{\lambda_2-\lambda_1} \qquad A_2=\frac{A'_1-A'_2}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$A_1-\lambda_3 A_2=\frac{(\lambda_2-\lambda_3)A'_1-(\lambda_1-\lambda_3)A'_2}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$A_1-\lambda_4 A_2=\frac{(\lambda_2-\lambda_4)A'_1-(\lambda_1-\lambda_4)A'_2}{\lambda_2-\lambda_1}$$

Слѣдовательно уравненія (8) сдѣлаются:

$$A'_1=0 \quad , \quad A'_2=0$$

$$A'_1-\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}A'_2=0 \quad , \quad A'_1-\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}A'_2=0 \tag{9}$$

Эти уравненія имѣютъ форму уравненій (5), слѣдовательно ихъ ангармоническое отношеніе есть:

$$\alpha=\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}=\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_4}:\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_4} \tag{10}$$

Другія выраженія для ангармоническаго отношенія легко получить изъ этихъ, перемѣщеніемъ индексовъ при λ.

§ 146. *Гармонія.* Если (5) есть рядъ гармоническихъ точекъ или связка гармоническихъ прямыхъ, то мы будемъ имѣть:

$$\frac{\lambda}{\mu}=-1 \quad \text{или} \quad \lambda=-\mu \tag{11}$$

Слѣдовательно уравненія четырехъ точекъ или гармоническихъ прямыхъ будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \lambda A_2 = 0 \qquad (12)$$

Если уравненія будутъ даны въ формѣ (8), то ихъ гармонія выражается условіемъ:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = -1 \quad , \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = 0 \qquad (13)$$

откуда:

$$\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 = 0 \qquad (14)$$

Пр. 1. Если въ уравненіи (12) $\lambda = 1$, то гармоническія точки или прямыя будуть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0 \qquad (15)$$

Если (12) будутъ уравненія четырехъ точекъ, то гармоническія точки будутъ: точки $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$, ихъ средина $A_1 + A_2 = 0$ и $A_1 - A_2 = 0$ точка на безконечности.

Если (12) будутъ прямыя, то прямыя (15) будутъ прямыя $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ и равнодѣлящія углы между ними $A_1 - A_2 = 0$ и $A_1 + A_2 = 0$.

Пр. 2. Уравненіе (14) можетъ служить для опредѣленія четвертой гармонической точки или прямой, если даны, напримѣръ, три уравненія точекъ или прямыхъ:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_3 A_2 = 0$$

то λ_4 опредѣляется изъ условія (14):

$$\lambda_4 = -\frac{\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3}{\lambda_1 - 2\lambda_3 + \lambda_2}$$

слѣдовательно четвертая гармоническая точка или прямая, будетъ:

$$(\lambda_1 - 2\lambda_3 + \lambda_2)A_1 + (\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3)A_2 = 0$$

Пр. 3. Проведемъ прямую линію, которая-бы пересѣкла стороны треугольника, коего вершины даны уравненіями:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \qquad (16)$$

Уравненія точекъ пересѣченія, проведенной прямой со сторонами треугольника, очевидно, будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \qquad (17)$$

Четвертыя гармоническія точки, точекъ (16) и каждой изъ предъидущихъ, будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0 \qquad (18)$$

а эти уравненія показываютъ, что двѣ первыя точки (18) и послѣдняя (17) находятся на одной прямой линіи.

Если проведенная прямая пересѣкаетъ стороны треугольника внѣшне, то уравненія (17) будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{19}$$

а точки гармоническія этимъ послѣднимъ будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{20}$$

откуда выведемъ тоже заключеніе.

Пр. 4. Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

будутъ уравненія сторонъ треугольника, то уравненія:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{21}$$

будутъ уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ вершины треугольника и пересѣкающихся въ одной точкѣ.

Четвертыя гармоническія, каждой парѣ сторонъ и одной изъ прямыхъ (20), будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} + \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{22}$$

изъ этихъ уравненій видимъ, что первыя двѣ прямыя (22) и послѣдняя (21) пересѣкаются въ одной точкѣ.

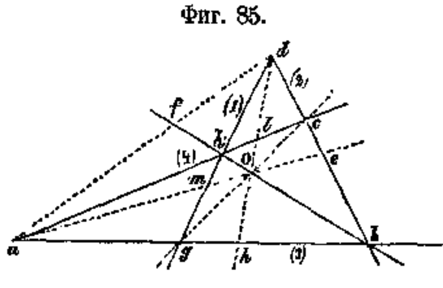
Гармоническія свойства полнаго четыреугольника.

§ 147. Пусть:

$$(1)\ A_1 = 0 \quad , \quad (2)\ A_2 = 0 \quad , \quad (3)\ A_3 = 0 \quad , \quad (4)\ A_4 = 0 \tag{23}$$

будутъ уравненія сторонъ четыреугольника $gbck$ (фиг. 85). Если соединимъ a и d, b и k, g и c, то это будутъ діагонали четыреугольника, который называется *полнымъ*. Проведемъ еще прямыя Od и Oa.

Фиг. 85.



Прежде чѣмъ мы изложимъ свойства этого четыреугольника, покажемъ, что изъ четырехъ уравненій (23) можно составить тождество:

$$\lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 + \delta A_4 = 0 \tag{24}$$

гдѣ λ, μ, ν, δ суть числовые коэфиціенты, опредѣленные извѣстнымъ образомъ. Напишемъ уравненія (23) въ ихъ полной формѣ, пусть онѣ будутъ:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad A_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ A_3 &= a_3x + b_3y + c_3 = 0 \quad , \quad A_4 = a_4x + b_4y + c_4 = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Если эти уравненія сложимъ, помноживъ на λ, μ, ν, δ, и отберемъ коэфиціенты при x, y, то найдемъ:

$$(a_1\lambda+a_2\mu+a_3\nu+a_4\delta)x+(b_1\lambda+b_2\mu+b_3\nu+b_4\delta)y+(c_1\lambda+c_2\mu+c_3\nu+c_4\delta)=0 \quad (26)$$

Если приравняемъ нулю коэфиціенты:

$$a_2\lambda+a_2\mu+a_3\nu+a_4\delta=0$$

$$b_1\lambda+b_2\mu+b_3\nu+b_4\delta=0$$

$$c_1\lambda+c_2\mu+c_3\nu+c_4\delta=0$$

и изъ этихъ уравненій опредѣлимъ λ, μ, ν, δ, то уравненіе (26) будетъ удовлетворено произвольными значеніями x и y, а слѣдовательно оно будетъ тождество (24). Такъ какъ, помножая уравненіе прямой линіи на какой-нибудь числовой коэфиціентъ, прямая неизмѣняется, то коэфиціенты λ, μ, ν, δ можно включить въ символы A_1, A_2, A_3, A_4 и написать тождество (24) въ формѣ:

$$A_1+A_2+A_3+A_4\equiv 0 \quad (27)$$

§ 148. Замѣтивъ это, возвратимся къ нашему четыреугольнику. Тождество (27) даетъ слѣдующія три тождества:

$$A_1+A_2\equiv-(A_3+A_4)$$

$$A_1+A_3\equiv-(A_2+A_4) \quad (28)$$

$$A_1+A_4\equiv-(A_2+A_3)$$

Легко видѣть, что прямая:

$$A_1+A_2=0 \quad (29)$$

проходя черезъ точку пересѣченія (1) и (2), проходитъ и черезъ точку пересѣченія (3) и (4), такъ какъ эти уравненія можно написать, въ силу перваго изъ тождествъ (28), и въ формѣ:

$$A_3+A_4=0$$

Слѣдовательно прямая, коей уравненіе есть (29), будетъ діагональ ad.

Уравненіе прямой:

$$A_1-A_2=0 \quad (30)$$

можно написать въ формѣ:

$$A_1-A_2\equiv A_1+A_3-(A_2+A_3)$$

эта прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія (1) и (2), что видно изъ формы первой части; она проходитъ черезъ пересѣченіе gc и bk, т. е. черезъ точку O, вслѣдствіи тождествъ (28), слѣдовательно прямая (30) есть Od.

Изъ этого видимъ, что уравненія связки da, dg, dO, db, суть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0$$

что показываетъ, что это гармоническая связка (§ 146).

Точно также легко показать, что и связка ad, ac, aO, ab есть гармоническая.

Если связка da, dq, dO, db гармоническая, то точки a, k, l, c, также гармоническія, слѣдовательно и связка Oc, Ol, Ok и Oa гармоническая. Изъ этого всего видно, что и точки a, g, h, b; b, e, c, d; g, m, k, d суть гармоническія. Откуда легко видѣть, что двѣ діагонали полнаго четыреугольника дѣлятъ третею гармонически.

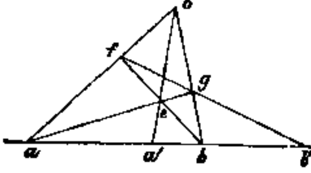
Тѣхъ же результатовъ мы бы могли достигнуть, если бы уравненія (23) представляли не стороны четыреугольника, а точки пересѣченія его сторонъ.

Съ помощью свойствъ полнаго четыреугольника легко построить, съ помощью только прямой, четвертую гармоническую точку къ тремъ даннымъ или четвертую гармоническую прямую къ тремъ даннымъ прямымъ.

§ 149. *Задача.* На прямой даны три точки a, a', b (фиг. 86); построить четвертую гармоническую, сопряженную точкѣ b?

Рѣшеніе. Для этого черезъ произвольно взятую точку O, внѣ прямой, проведемъ прямыя Oa, Ob, Oa'. На прямой Oa' возьмемъ какую-нибудь точку e, проведемъ прямыя ae, be и продолжимъ ихъ до встрѣчи съ Oa и Ob въ точкахъ f и g, проведемъ прямую fg; эта прямая встрѣчаетъ, данную прямую въ искомой точкѣ b'.

Фиг. 86.



Легко видѣть, изъ этого построенія, какъ слѣдуетъ построить a', если бы точки a, b и b' были даны.

Если бы были даны три прямыя, проходящія черезъ одну точку и требуется построить четвертую гармоническую, то слѣдуетъ данную связку пересѣчь, какою-нибудь, прямою и къ тремъ точкамъ пересѣченія построить четвертую гармоническую, какъ показано выше; соединивъ, построенную точку съ вершиною данной связки, получимъ искомую прямую.

Задача. Показать гармоническія свойства полнаго четыреугольника, если даны уравненія трехъ его сторонъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

а четвертая сторона дана въ формѣ:

$$\lambda A_1 + \mu A_2 + A_3 = 0$$

т. е. выражена черезъ три данныя стороны?

Проэктивность и инволюція.

§ 150. Проэктивность двухъ рядовъ точекъ можетъ быть изложена въ болѣе общей формѣ слѣдующимъ образомъ.

Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad ; \quad A'_1 = 0 \quad , \quad A'_2 = 0 \tag{31}$$

будутъ уравненія двухъ паръ точекъ. Уравненія точекъ на прямыхъ, проходящихъ черезъ каждую пару предъидущихъ точекъ, будутъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad ; \quad A'_1 - \mu A'_2 = 0 \tag{32}$$

давая всевозможныя значенія λ и μ мы будемъ имѣть уравненія всѣхъ точекъ на прямыхъ $(A_1 A_2)$ и $(A'_1 A'_2)$.

Чтобы каждой точкѣ на одной прямой соотвѣтствовала одна, и только одна, точка на другой прямой необходимо, чтобы одинъ изъ коэфиціентовъ, напримѣръ μ, былъ линейная функція другаго λ. Но самая общая линейная функція отъ λ имѣетъ форму:

$$\frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda}$$

Слѣдовательно самая общая соотвѣтственность между точками на прямыхъ $(A_1 A_2)$ и $(A'_1 A_2)$ будетъ дана уравненіями:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad ; \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda} A'_2 = 0 \tag{33}$$

Легко видѣть, что эти два ряда проэктивны. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, какія-нибудь, четыре точки:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_3 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_4 A_2 = 0$$

имъ соотвѣтственныя будутъ:

$$A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda_1}{\gamma + \delta\lambda_1} A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda_2}{\gamma + \delta\lambda_2} A'_2 = 0 ,$$

$$A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda_3}{\gamma + \delta\lambda_3} A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda_4}{\gamma + \delta\lambda_4} A'_2 = 0$$

если положимъ:

$$\mu_1 = \frac{\alpha + \beta\lambda_1}{\gamma + \delta\lambda_1} \quad , \quad \mu_2 = \frac{\alpha + \beta\lambda_2}{\gamma + \delta\lambda_2} \quad , \quad \mu_3 = \frac{\alpha + \beta\lambda_3}{\gamma + \delta\lambda_3} \quad , \quad \mu_4 = \frac{\alpha + \beta\lambda_4}{\gamma + \delta\lambda_4}$$

то легко видѣть, что:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4}$$

т. е. ангармоническое отношеніе четырехъ произвольно взятыхъ точекъ изъ перваго ряда равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтственныхъ точекъ изъ втораго ряда, слѣдовательно два ряда (33) будутъ проэктивны.

§ 151. Если даны два проэктивные ряда:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta\lambda}{\gamma + \delta\lambda} A'_2 = 0 \tag{34}$$

то, выбравъ, три совершенно произвольныя точки изъ перваго ряда, напримѣръ:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_3 A_2 = 0 \tag{35}$$

мы можемъ α, β, γ, δ такъ опредѣлить, что точкамъ (35) будутъ соотвѣтствовать совершенно произвольныя три точки со втораго ряда, напримѣръ:

$$A'_1 - \mu_1 A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \mu_2 A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \mu_3 A'_2 = 0$$

для этого надобно только положить:

$$\frac{\alpha + \beta\lambda_1}{\gamma + \delta\lambda_1} = \mu_1 \quad , \quad \frac{\alpha + \beta\lambda_2}{\gamma + \delta\lambda_2} = \mu_2 \quad , \quad \frac{\alpha + \beta\lambda_3}{\gamma + \delta\lambda_3} = \mu_3$$

и изъ этихъ уравненій опредѣлить отношенія $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$ или просто положить $\delta = 1$ и опредѣлить α, β, γ.

§ 152. Полагая въ уравненіяхъ (33) $\lambda = 1$ мы будемъ имѣть:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} A'_2 = 0$$

изъ коихъ первое уравненіе представляетъ точку на безконечности на прямой $(A_1 A_2)$, а второе точку I' на $(A'_1 A'_2)$.

Полагая:

$$\frac{\alpha + \lambda\beta}{\gamma + \delta\lambda} = 1$$

мы будемъ имѣть:

$$A_1 - \frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta} A_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - A'_2 = 0$$

изъ коихъ первое уравненіе есть точка I на $(A_1 A_2)$, а второе есть точка на безконечности на прямой $(A'_1 A'_2)$. Слѣдовательно уравненія главныхъ точекъ двухъ проэктивныхъ рядовъ (33) будутъ:

$$(I) \quad A_1 - \frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta} A_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} A'_2 = 0 \quad (I') \qquad (36)$$

Если:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta} = 1$$

то точка I будетъ на безконечности, но если $\frac{\alpha-\gamma}{\delta-\beta} = 1$, то $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} = 1$, слѣдовательно и точка I' будетъ также на безконечности, или ряды *подобны* (§ 98).

§ 153. Если два проэктивные ряда имѣютъ общій соотвѣтственный элементъ, напримѣръ точку $A_1 = 0$, то уравненія проэктивныхъ рядовъ будутъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - k\lambda A'_2 = 0$$

вычитая эти уравненія, найдемъ:

$$\lambda(A_2 - kA'_2) = 0$$

или:

$$A_2 - kA'_2 = 0 \qquad (37)$$

а это есть уравненіе точки, лежащей на прямой, проходящей черезъ двѣ соотвѣтственныя точки. Но такъ какъ это уравненіе независитъ отъ λ, то всѣ прямыя, проходящія черезъ соотвѣтственныя точки двухъ проэктивныхъ рядовъ, пересѣкаются въ одной точкѣ (37).

§ 154. *Главныя точки.* Если прямыя совмѣстимъ и оба ряда отнесемъ къ основнымъ точкамъ:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0$$

то проэктивные ряды на прямой $(A_1 A_2)$ выразятся двумя уравненіями:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \frac{a_2 + b_2\lambda}{a_1 + b_1\lambda} A_2 = 0 \qquad (38)$$

Уравненія главныхъ точекъ I и I', очевидно, будутъ:

$$(I)\quad A_1 - \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} A_2 = 0 \quad (I') \qquad (39)$$

§ 155. *Двойныя точки.* Если соотвѣтственныя точки рядовъ (38) совпадаютъ, то мы должны имѣть:

$$\lambda = \frac{a_2 + b_2\lambda}{a_1 + b_1\lambda}$$

откуда:

$$b_1\lambda^2 + (a_1 - b_2)\lambda - a_2 = 0 \qquad (40)$$

Это квадратное уравненіе даетъ для λ два значенія:

$$\lambda_1 = -\frac{a_1 - b_2}{2b_1} + \sqrt{\left(\frac{a_1 - b_2}{2b_1}\right)^2 + \frac{a_2}{b_1}} \; , \; \lambda_2 = -\frac{a_1 - b_2}{2b_1} - \sqrt{\left(\frac{a_1 - b_2}{2b_1}\right)^2 + \frac{a_2}{b_1}}$$

или полагая:

$$-\frac{a_1 - b_2}{2b_1} = k \qquad \left(\frac{a_1 - b_2}{2b_1}\right)^2 + \frac{a_2}{b_1} = R$$

найдемъ:

$$\lambda_1 = k + \sqrt{R} \quad , \quad \lambda_2 = k - \sqrt{R}$$

Слѣдовательно уравненія двойныхъ точекъ будутъ:

$$A_1 - (k + \sqrt{R})A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - (k - \sqrt{R})A_2 = 0 \qquad (41)$$

§ 156. Если проэктивные ряды будутъ такъ совмѣщены, что главныя точки (39) совпадутъ (§ 109), то рядъ, какъ мы видѣли, будетъ инволюціонный. Чтобы точки (39) совпали необходимо имѣть:

$$\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2} = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}$$

этому уравненію можно дать слѣдующую форму:

$$(a_1 + b_2)(a_2 - b_1 - a_1 + b_2) = 0$$

откуда, или:

$$(a_1 + b_2) = 0$$

или:

$$a_2 - a_1 = b_1 - b_2$$

или еще:

$$a_2 + b_2 = a_1 + b_1$$

второе и третье изъ этихъ уравненій даютъ тотъ случай, когда главныя точки совпадаютъ на безконечности (§ 153), т. е. когда ряды подобны, слѣдовательно инволюціонный рядъ дается первымъ условіемъ:

$$a_1 + b_2 = 0 \quad \text{или} \quad a_1 = -b_2$$

и выразится уравненіями:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \frac{a_2 - a_1\lambda}{a_1 + b_1\lambda} A_2 = 0 \tag{42}$$

Легко провѣрить, что соотвѣтственныя точки, представляемыя этими уравненіями, взаимно соотвѣтственны. Въ самомъ дѣлѣ, если, какую-нибудь, точку втораго ряда, напр:

$$\frac{a_2 - a_1\lambda}{a_1 + b_1\lambda}$$

разсматривать, какъ принадлежащую первому ряду, то ей соотвѣтственная точка втораго ряда будетъ:

$$\frac{a_2 - a_1\dfrac{a_2 - a_1\lambda}{a_1 + b_1\lambda}}{a_1 + b_1\dfrac{a_2 - a_1\lambda}{a_1 + b_1\lambda}} = \lambda$$

а это показываетъ, что эта точка находится въ первомъ ряду.

§ 157. Отнесемъ проэктивные ряды:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \frac{a_2 + b_2\lambda}{a_1 + b_1\lambda} A_2 = 0 \tag{43}$$

къ двойнымъ точкамъ (40), для этого положимъ:

$$A_1 - (k + \sqrt{R})\, A_2 = X \quad , \quad A_1 - (k - \sqrt{R})\, A_2 = Y$$

Замѣтимъ, что при совершенно произвольныхъ значеніяхъ λ', λ'' мы имѣемъ тождество:

$$A_1 - \lambda A_2 = \frac{(\lambda - \lambda'')(A_1 - \lambda' A_2) - (\lambda - \lambda')(A_1 - \lambda'' A_2)}{\lambda' - \lambda''} \tag{44}$$

если въ этомъ тождествѣ положимъ $\lambda' = \lambda_1$, $\lambda'' = \lambda_2$, λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (40), то найдемъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = \frac{(\lambda - \lambda_2)\, X - (\lambda - \lambda_1)\, Y}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Слѣдовательно уравненіе:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0$$

сдѣлается:

$$(\lambda - \lambda_2) X - (\lambda - \lambda_1) Y = 0 \quad \text{или} \quad X - \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \tag{45}$$

точно такимъ же образомъ преобразуемъ уравненіе:

$$A_1 - \frac{a_2 + b_2\lambda}{a_1 + b_1\lambda} A_2 = 0$$

въ:

$$\left(\frac{a_2 + b_2\lambda}{a_1 + b_1\lambda} - \lambda_2\right) X - \left(\frac{a_2 + b_2\lambda}{a_1 + b_1\lambda} - \lambda_1\right) Y = 0$$

откуда:

$$\{a_2 - a_1\lambda_2 + (b_2 - b_1\lambda_2)\lambda\} X - \{a_2 - a_1\lambda_1 + (b_2 - b_1\lambda_1)\lambda\} Y = 0$$

или:

$$\left(\lambda + \frac{a_2 - a_1\lambda_2}{b_2 - b_1\lambda_2}\right) X - \frac{b_2 - b_1\lambda_1}{b_2 - b_1\lambda_2}\left(\lambda + \frac{a_2 - a_1\lambda_1}{b_2 - b_1\lambda_1}\right) Y = 0 \tag{46}$$

Такъ какъ при $\lambda = \lambda_1$ это уравненіе должно дать двойную точку $X = 0$, а при $\lambda = \lambda_2$ оно должно дать $Y = 0$, то мы должны имѣть:

$$\lambda_1 + \frac{a_2 - a_1\lambda_1}{b_2 - b_1\lambda_1} = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 + \frac{a_2 - a_1\lambda_2}{b_2 - b_1\lambda_2} = 0 \tag{47}$$

но легко видѣть, что эти уравненія суть ничто иное какъ уравненіе (40), написанное въ другой формѣ послѣ подстановленія въ него корней λ_1 и λ_2; слѣдовательно уравненіе (46) можно написать въ формѣ:

$$X - \frac{b_2 - b_1\lambda_1}{b_2 - b_1\lambda_2} \cdot \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0$$

Слѣдовательно уравненія проэктивныхъ рядовъ, отнесенныя къ двойнымъ точкамъ, будутъ:

$$X - \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \quad , \quad X - \frac{b_2 - b_1\lambda_1}{b_2 - b_1\lambda_2} \cdot \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \tag{48}$$

Изъ этихъ уравненій видимъ, что ангармоническое отношеніе двухъ соотвѣтственныхъ точекъ съ двойными точками есть величина постоянная (§ 107):

$$\frac{b_2 - b_1\lambda_1}{b_2 - b_1\lambda_2} \tag{49}$$

Если эта величина равна -1, то уравненіе (48) сдѣлается:

$$X - \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \quad , \quad X + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} Y = 0 \tag{50}$$

т. е. двѣ какія-нибудь соотвѣтственныя точки съ двойными точками суть гармоническія, а это свойство принадлежитъ инволюціонному ряду (§ 110). И въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$\frac{b_2 - b_1\lambda_1}{b_2 - b_1\lambda_2} = -1$$

откуда:

$$2b_2 = b_1(\lambda_1 + \lambda_2) = -(a_1 - b_2)$$

Слѣдовательно $a_1 = -b_2$, а это условіе инволюціи (§ 156).

§ 158. *Инволюціонный центръ.* Мы видѣли, что инволюціонный центръ (§ 109) есть точка совпаденія главныхъ точекъ, и дѣйствительно при условіи $b_2 = -a_1$ уравненія (39) главныхъ точекъ тождественны, слѣдовательно уравненіе инволюціоннаго центра будетъ:

$$A_1 - \frac{a_2 - a_1}{a_1 + b_1} A_2 = 0 \tag{51}$$

Очевидно, что уравненіе ему соотвѣтствующей точки есть:

$$A_1 - A_2 = 0$$

т. е. точка на безконечности.

§ 159. Легко показать, что центръ есть средина между двойными точками:

$$A_1 - (k + \sqrt{R}) A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - (k - \sqrt{R}) A_2 = 0 \tag{52}$$

для этого надобно только найти уравненіе точки дѣлящей разстояніе между двойными точками (52) пополамъ. Уравненіе этой точки будетъ (51).

Задача. Даны двѣ точки $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ и двѣ другія:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0$$

Найти уравненіе средины между этими послѣдними?

Отв. $(2 - \lambda_1 - \lambda_1) A_1 - (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2) A_2 = 0$

§ 160. Уравненія двухъ проэктивныхъ рядовъ на одной прямой линіи могутъ быть всегда написаны въ формѣ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - k\lambda A_2 = 0$$

ангармоническое отношеніе этихъ рядовъ есть k, а

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

суть двойныя точки ряда.

Точкѣ λ соотвѣтствуетъ $k\lambda$, а этой послѣдней, если ее разсматривать какъ принадлежащую первому ряду, соотвѣтствующая во второмъ ряду есть $k^2\lambda$; если эту послѣднюю опять разсматривать, какъ принадлежащую первому ряду, то ея соотвѣтственная во второмъ будетъ $k^3\lambda$; продолжая такимъ образомъ получимъ рядъ точекъ:

$$\lambda,\ k\lambda,\ k^2\lambda, \ldots\ldots k^{n-1}\lambda,\ k^n\lambda \tag{53}$$

въ которомъ каждая точка соотвѣтствуетъ предъидущей. Если рядъ будетъ такого свойства, что:

$$k^n\lambda = \lambda$$

то рядъ замкнется, т. е. возвращается въ начальную точку λ. Такой рядъ называется *круго-проэктивнымъ* n-го порядка. Инволюціонный рядъ есть круго-проэктивный, втораго порядка, а подобный перваго.

Въ инволюціонномъ рядѣ $k =$ 1, слѣдовательно уравненія, представляющія такой рядъ будутъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \lambda A_2 = 0$$

или однимъ уравненіемъ:

$$A_1{}^2 \quad \lambda^2 A^2{}_2 = 0 \tag{54}$$

Инволюція точекъ.

§ 161. Изложивъ аналитически въ самой общей формѣ проэктивность и инволюцію, мы теперь изложимъ инволюцію аналитически въ параллель съ §§ 143—149.

Если шесть точекъ по-парно сопряженныхъ a и a', b и b', c и c', коихъ уравненія суть:

$$\begin{aligned} &(a)\ A_1 = 0 \quad , \quad (b)\ A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (c)\ A_1 - \mu A_2 = 0 \\ &(a')\ A_2 = 0 \quad , \quad (b')\ A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad , \quad (c')\ A_1 - \mu' A_2 = 0 \end{aligned} \tag{55}$$

находятся въ такой зависимости, что ангармоническое отношеніе четырехъ, произвольно выбранныхъ, изъ шести точекъ, равно ангармоническому отношенію четырехъ сопряженныхъ точекъ (§ 116), то говорятъ, что шесть точекъ составляютъ инволюціонный рядъ. Выберемъ, напримѣръ, изъ (55), слѣдующія четыре точки a, a', b' и c':

$$(a)\ A_1 = 0\ ,\ (a')\ A_2 = 0\ ,\ (b')\ A_1 - \lambda' A_2 = 0\ ,\ (c')\ A_1 - \mu' A_2 = 0 \tag{56}$$

Если рядъ точекъ (55) составляетъ инволюцію, то ангармоническое отношеніе (56) $\frac{\lambda'}{\mu'}$, должно быть равно ангармоническому отношенію a', a, b, c:

$$(a')\ A_2 = 0\ ,\ (a)\ A_1 = 0\ ,\ (b)\ A_1 - \lambda A_2 = 0\ ,\ (c)\ A_1 - \mu A_2 = 0 \quad (57)$$

Эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$(a)\ A_2 = 0\ ,\ (a)\ A_1 = 0\ ,\ (b)\ A_2 - \frac{1}{\lambda} A_1 = 0\ ,\ (c)\ A_2 - \frac{1}{\mu} A_1 = 0 \quad (58)$$

ангармоническое отношеніе этихъ точекъ будетъ:

$$\frac{1}{\lambda} : \frac{1}{\mu} = \frac{\mu}{\lambda}$$

Слѣдовательно для инволюціи мы должны имѣть:

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\mu}{\lambda} \quad \text{или} \quad \lambda.\lambda' = \mu.\mu' \quad (59)$$

Если примемъ въ соображеніе геометрическое значеніе коэфиціентовъ λ, λ', μ и μ, то найдемъ:

$$\lambda = \frac{ab}{a'b}\quad ,\quad \lambda' = \frac{ab'}{a'b'}\quad ,\quad \mu = \frac{ac}{a'c}\quad ,\quad \mu' = \frac{ac'}{a'c'}$$

откуда (59) сдѣлается:

$$\frac{ab}{a'b} \cdot \frac{ab'}{a'b'} = \frac{ac}{a'c} \cdot \frac{ac'}{a'c'}$$

или

$$\frac{ab \,.\, ab'}{ac \,.\, ac'} = \frac{a'b' \,.\, a'b}{a'c' \,.\, a'c} \quad (60)$$

а это первое изъ условій (87) § 118 инволюціи.

Если положимъ:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\mu'} = k$$

то данныя уравненія (55) сдѣлаются:

$$\begin{array}{l} (a)\ A_1 = 0\ ,\ (b)\ A_1 - \lambda A_2 = 0\ ,\ (c)\ A_1 - k\lambda A_2 = 0 \\ (a')\ A_2 = 0\ ,\ (b')\ A_1 - \lambda' A_2 = 0\ ,\ (c')\ A_1 - \frac{\lambda'}{k} A_2 = 0 \end{array} \quad (61)$$

такую форму имѣютъ уравненія шести инволюціонныхъ точекъ, если двѣ изъ нихъ (a) и (a') приняты за основныя. Изъ этихъ уравненій легко видѣть, что какую бы мы не взяли комбинацію четырехъ точекъ изъ шести, всегда условіе (59) инволюціи будетъ удовлетворено.

Возьмемъ, напримѣръ, такую комбинацію:

$$(a)\ A_1=0\ ,\ (a')\ A_2=0\ ,\ (b)\ A_1-\lambda A_2=0\ ,\ (c)\ A_1-k\lambda A_2=0$$

уравненія сопряженныхъ этой комбинаціи точекъ, будутъ:

$$(a')\ A_2=0\ ,\ (a)\ A_1=0\ ,\ (b)\ A_2-\frac{1}{\lambda'}A_1=0\ ,\ (c')\ A_1-\frac{k}{\lambda'}A_1=0$$

Очевидно, что ангармоническое отношеніе обѣихъ системъ будетъ $\frac{1}{k}$.

Изъ шести точекъ, пять можно взять произвольно, а шестую опредѣлить изъ условія (59) и мы будемъ имѣть шесть инволюціонныхъ точекъ.

§ 162. *Предложеніе.* Если три пары точекъ составляютъ инволюцію, то всегда можно найти четвертую пару точекъ, дѣйствительную или мнимую, которая будетъ сопряжению гармоническою каждой изъ трехъ данныхъ инволюціонныхъ паръ.

Доказательство. Если три пары точекъ составляютъ инволюцію, то форма ихъ уравненій будетъ:

$$\begin{matrix}(a)\ \ A_1=0\ , & (b)\ \ A_1-\lambda A_2=0\ , & (c)\ \ A_1-k\lambda A_2=0\\ (a')\ \ A_2=0\ , & (b')\ \ A_1-\lambda' A_2=0\ , & (c')\ \ A_1-\frac{\lambda'}{k}A_2=0\end{matrix} \qquad (62)$$

Пусть уравненія искомой пары будутъ:

$$A_1-\rho A_2=0\quad ,\quad A_1+\rho A_2=0 \qquad (63)$$

Форма этихъ уравненій потому такая, что эти точки должны быть сопряженно гармоническія точкамъ (a) и (a'). Но эта пара должна быть гармонична и парѣ:

$$A_1-\lambda A_2=0\quad ,\quad A_1-\lambda' A_2=0 \qquad (64)$$

слѣдовательно мы должны имѣть (§ 146):

$$\frac{\lambda-\rho}{\lambda+\rho}:\frac{\lambda'-\rho}{\lambda'+\rho}=\frac{(\lambda-\rho)(\lambda'+\rho)}{(\lambda'-\rho)(\lambda+\rho)}=-1$$

откуда:

$$2\lambda\lambda'=2\rho^2\quad \text{или}\quad \rho^2=\lambda\lambda' \qquad (65)$$

откуда:

$$\rho = \pm \sqrt{\lambda\lambda'} \tag{66}$$

Слѣдовательно искомая пара будетъ:

$$A_1 - \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \tag{67}$$

Легко убѣдиться, что эта пара гармонична и послѣдней данной парѣ. Эти точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря потому, будутъ-ли λ и λ' имѣть одинаковые знаки или разные.

§ 163. *Предложеніе.* Если три пары точекъ такъ связаны между собою, что каждая изъ паръ есть сопряженно гармоническая четвертой парѣ, то три данныя пары составляютъ инволюцію (Обратное).

Доказательство. Возьмемъ за основную пару, ту, которая сопряженно гармонична тремъ даннымъ; пусть эта пара будетъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

то уравненія трехъ данныхъ паръ будутъ:

$$\begin{aligned} A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \nu A_2 = 0 \\ A_1 + \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \mu A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + \nu A_2 = 0 \end{aligned} \tag{68}$$

Чтобы показать, что эти три пары точекъ составляютъ инволюцію, возьмемъ за основную пару:

$$A_1 - \lambda A_2 = A'_1 \quad , \quad A_1 + \lambda A_2 = A'_2$$

тогда данныя пары (68) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} A'_1 = 0 \quad , \quad A'_1 + \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 + \frac{\lambda - \nu}{\lambda + \nu} A'_2 = 0 \\ A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 + \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} A'_2 = 0 \quad , \quad A'_1 + \frac{\lambda + \nu}{\lambda - \nu} A'_2 = 0 \end{aligned} \tag{69}$$

Изъ формы этихъ уравненій видно, что условіе инволюціи (59) удовлетворено.

§ 164. Мы выше видѣли, что пара точекъ:

$$(e) \quad A_1 - \sqrt{\lambda\lambda_1} A_2 = 0 \quad , \quad (f) \quad A_1 + \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \tag{70}$$

есть сопряженно гармоническая тремъ слѣдующимъ парамъ точекъ въ инволюціи:

$$\begin{matrix} (a) & A_1 = 0 & , & (b) & A_1 - \lambda A_2 = 0 & , & (c) & A_1 - k\lambda A_2 = 0 \\ (a') & A_2 = 0 & , & (b') & A_1 - \lambda' A_2 = 0 & , & (c') & A_1 - \frac{\lambda'}{k} A_2 = 0 \end{matrix} \qquad (71)$$

Легко видѣть, что каждая изъ точекъ (70) будетъ составлять инволюцію съ двумя парами изъ (71), имѣя саму себя сопряженною. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ уравненія:

$$\begin{matrix} (a) & A_1 = 0 & , & (b) & A_1 - \lambda A_2 = 0 & , & (e) & A_1 - \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \\ (a') & A_2 = 0 & , & (b') & A_1 - \lambda' A_2 = 0 & , & (e) & A_1 - \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \end{matrix} \qquad (72)$$

условіе инволюціи будетъ (§ 161, 59):

$$\lambda\lambda' = \sqrt{\lambda\lambda'}\sqrt{\lambda\lambda'}$$

слѣдовательно удовлетворено.

Поэтому точки (e) и (f) называютъ *двойными точками* инволюціоннаго ряда.

Одна изъ двойныхъ точекъ можетъ быть на безконечности; для этого необходимо имѣть $\lambda\lambda' = 1$, что даетъ $A_1 - A_2 = 0$ и $A_1 + A_2 = 0$, т. е. другая двойная точка будетъ средина точекъ a и a'.

Уравненія двойныхъ точекъ (e) и (f) (70) можно получить, сдѣлавъ въ послѣдней парѣ уравненій (71) $\lambda k = \frac{\lambda'}{k}$ или $k^2 = \frac{\lambda'}{\lambda}$, откуда $k = \pm\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}$. Подставляя вмѣсто k его выраженія въ послѣднюю пару (71), найдемъ уравненія двойныхъ точекъ (e) и (f).

Двойныя точки (e) и (f) составляютъ инволюцію съ точками (a) и (b'), (a') и (b) взятыми какъ сопряженные изъ трехъ инволюціонныхъ паръ a и a', b и b', c и c', т. е. три пары точекъ:

$$\begin{matrix} (a) & A_1 = 0 & , & (a') & A_2 = 0 & , & (e) & A_1 - \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \\ (b') & A_1 - \lambda' A_2 = 0 & , & (b) & A_1 - \lambda A_2 = 0 & , & (f) & A_1 + \sqrt{\lambda\lambda'} A_2 = 0 \end{matrix} \qquad (73)$$

составляютъ инволюціоный рядъ (§ 161):

Легко видѣть, что:

$$\sqrt{\lambda\lambda} = \frac{ae}{a'e} \quad , \quad -\sqrt{\lambda\lambda'} = \frac{af}{a'f}$$

или:

$$\lambda\lambda' = \frac{ab \cdot ab}{a'b . a'b'} = \frac{ae^2}{a'e^2} \quad , \quad \lambda\lambda' = \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{af^2}{a'f^2}$$

а это суть формулы (§ 125).

§ 165. Положимъ теперь, что одна изъ точекъ инволюціоннаго ряда:

$$\begin{matrix} (a)\ A_1 = 0 \ , & (b)\ A_1 - \lambda A_2 = 0 \ , & (c)\ A_1 - k\lambda A_2 = 0 \\ (a')\ A_2 = 0 \ , & (b')\ A_1 - \lambda' A_2 = 0 \ , & (c')\ A' - \frac{\lambda'}{k} A_2 = 0 \end{matrix} \qquad (74)$$

напримѣръ точка (c), находится на безконечности, въ этомъ случаѣ, мы должны положить $k\lambda = 1$ (§ 82); въ этомъ предположеніи сопряженная точка (c') будетъ:

$$(O) \quad A_1 - \lambda\lambda' A_2 = 0 \qquad (75)$$

Слѣдовательно инволюціонный рядъ будетъ:

$$\begin{matrix} (a)\ A_1 = 0 \ , & (b)\ A_1 - \lambda A_2 = 0 \ , & (\infty)\ A_1 - A_2 = 0 \\ (a')\ A_2 = 0 \ , & (b)\ A_1 - \lambda' A_2 = 0 \ , & (O)\ A_1 - \lambda\lambda' A_2 = 0 \end{matrix}$$

Изъ уравненія (O) будемъ имѣть (§ 123, 89):

$$\lambda\lambda' = \frac{Oa}{Oa'} = \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'}$$

Такъ какъ двойныя точки (e) и (f) суть гармонично сопряженныя съ точками (§ 162):

$$(\infty) \quad A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad (O) \quad A_1 - \lambda\lambda' A_2 = 0$$

то точка (O) находится по срединѣ отрѣзка ef.

Точка (O), какъ мы уже выше видѣли (§ 129), называется *инволюціоннымъ центромъ* ряда точекъ. Если положимъ:

$$\lambda\lambda' = \rho^2$$

то уравненіе центра сдѣлается:

$$A_1 - \rho^2 A_2 = 0$$

Если къ двойнымъ точкамъ e и f инволюціоннаго ряда (74) будемъ строить безчисленное множество паръ точекъ гармонически сопряженныхъ, то получимъ безконечный рядъ точекъ, по-парно сопряженныхъ, каждыя три пары изъ котораго, произвольно выбранныя, составляютъ инволюцію. Та-

кія пары мы получимъ, давая въ рядѣ (74) коэфиціенту k всевозможныя величины отъ $-\infty$ до $+\infty$. Если коэфиціенты сопряженныхъ паръ будутъ λ и λ', μ и μ', ν и ν', ..., то мы будемъ имѣть:

$$\rho^2 = \lambda\lambda' = \mu\mu' = \nu\nu' = \ldots\ldots.$$

§ 166. *Задача.* Даны двѣ пары точекъ:

$$A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda_2 A_2 = 0$$

$$A_1 - \mu_1 A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu_2 A_2 = 0$$

найти третью пару, которая была бы сопряженно гармоническая каждой изъ данныхъ паръ?

Рѣшеніе. Пусть искомая пара будетъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu A_2 = 0$$

Если эта пара гармонична первой парѣ, то мы имѣемъ (§ 146):

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda + \mu) + \lambda_1\mu_1 = 0$$

но она гармонична, по условію, и второй парѣ, слѣдовательно:

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda + \mu) + \lambda_2\mu_2 = 0$$

Эти два уравненія линейны относительно неизвѣстныхъ $\lambda\mu$ и $\lambda + \mu$, слѣдовательно ихъ можно опредѣлить; пусть будетъ:

$$\lambda + \mu = a_1 \quad , \quad \lambda\mu = a_2$$

то λ и μ будутъ корни квадратнаго уравненія:

$$z^2 - a_1 z + a_2 = 0$$

Слѣдовательно искомыя точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя.

§ 167. *Задача.* Найти условіе инволюціи трехъ данныхъ паръ точекъ:

$$(a)\ A_1 - \lambda_1 A_2 = 0 \quad , \quad (b)\ A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \quad , \quad (c)\ A_1 - \lambda_3 A_2 = 0$$

(76)

$$(a')\ A_1 - \mu_1 A_2 = 0 \quad , \quad (b')\ A_1 - \mu_2 A_2 = 0 \quad , \quad (c')\ A_1 - \mu_3 A_2 = 0$$

Рѣшеніе. Мы видѣли (§ 134), что если три пары точекъ составляютъ инволюцію, то есть четвертая пара, сопряженно гармоническая каждой изъ данныхъ паръ, поэтому если эта послѣдняя пара будетъ:

$$(e)\ A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (f)\ A_1 - \mu A_2 = 0$$

то мы будемъ имѣть:

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda + \mu) + \lambda_1\mu_1 = 0$$

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda + \mu) + \lambda_2\mu_2 = 0$$

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_3 + \mu_3)(\lambda + \mu) + \lambda_3\mu_3 = 0$$

Эти три уравненія, линейныя относительно $\lambda\mu$ и $\lambda + \mu$, должны быть совмѣстно удовлетворены значеніями $\lambda\mu$ и $\lambda + \mu$, поэтому мы должны имѣть:

$$\begin{vmatrix} 1 & , & \lambda_1 + \mu_1 & , & \lambda_1\mu_1 \\ 1 & , & \lambda_2 + \mu_2 & , & \lambda_2\mu_2 \\ 1 & , & \lambda_3 + \mu_3 & , & \lambda_3\mu_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (77)$$

Это условіе инволюціи между тремя парами точекъ.

Если развернемъ предъидущій опредѣлитель, то найдемъ:

$$(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_3 - \mu_1) + (\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_3)(\mu_3 - \lambda_1) = 0 \qquad (78)$$

Если примемъ въ соображеніе геометрическое значеніе коэфиціентовъ λ_1, λ_2, λ_3; μ_1, μ_2, μ_3 и тождество § 89, то найдемъ, что это уравненіе есть первое изъ условій (88) § 118 инволюціи, а именно:

$$ab' \,.\, bc' \,.\, ca' = - a'b \,.\, b'c \,.\, c'a$$

§ 168. *Предложеніе.* Всякая прямая пересѣкаетъ три пары прямыхъ линій, проходящихъ черезъ четыре точки, въ шести точкахъ, составляющихъ инволюціонный рядъ.

Доказательство. Пусть уравненія четырехъ точекъ будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \qquad (79)$$

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 будутъ числовыя значенія выраженій (79), когда въ нихъ подставимъ координаты сѣкущей.

Уравненія точекъ пересѣченія сторонъ и діагоналей съ сѣкущею, очевидно, будутъ:

$$(a)\quad \frac{A_1}{a_1}-\frac{A_4}{a_4}=0\quad,\quad (a')\quad \frac{A_2}{a_2}-\frac{A_3}{a_3}=0$$

$$(b)\quad \frac{A_2}{a_2}-\frac{A_4}{a_4}=0\quad,\quad (b')\quad \frac{A_3}{a_3}-\frac{A_1}{a_1}=0 \qquad (80)$$

$$(c)\quad \frac{A_3}{a_3}-\frac{A_4}{a_4}=0\quad,\quad (c')\quad \frac{A_1}{a_1}-\frac{A_2}{a_2}=0$$

Положимъ:

$$\frac{A_1}{a_1}-\frac{A_4}{a_4}=\frac{A'_1}{\lambda}\quad,\quad \frac{A_2}{a_2}-\frac{A_4}{a_4}=\frac{A'_2}{\mu}\quad,\quad \frac{A_3}{a_3}-\frac{A_4}{a_4}=\frac{A'_3}{\nu}$$

λ, μ и ν суть множители, которые даютъ уравненіямъ (a), (b), (c) каноническую форму:

$$x\xi+y\eta+1=0$$

Такимъ образомъ уравненія (80) сдѣлаются:

$$(a)\ A'_2=0\quad,\quad (b)\ A'_2=0\quad,\quad (c)\ A'_3=0$$

$$(a')\ \frac{A'_2}{\mu}-\frac{A'_3}{\nu}=0\quad,\quad (b')\ \frac{A'_3}{\nu}-\frac{A'_1}{\lambda}=0\quad,\quad (c')\ \frac{A'_1}{\lambda}-\frac{A'_2}{\mu}=0$$

откуда:

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{ba'}{ca'}\quad,\quad \frac{\nu}{\lambda}=\frac{cb'}{ab'}\quad,\quad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{ac'}{bc'}$$

перемножая, найдемъ:

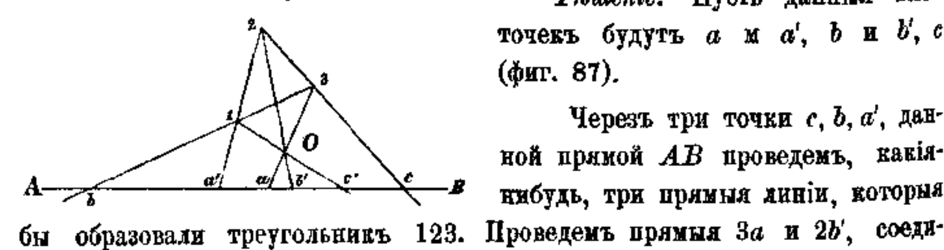
$$\frac{ab'\,.\,bc'\,.\,ca'}{a'b\,.\,b'c\,.\,c'a}=-1 \qquad (81)$$

а это первое изъ условій (88) § 118 инволюціи.

§ 169. На основаніи этого свойства полнаго четыреугольника можно рѣшить слѣдующую задачу:

Задача. По даннымъ пяти точкамъ, на одной прямой линіи, изъ трехъ паръ, составляющихъ инволюцію, построить шестую точку?

Фиг. 87.



Рѣшеніе. Пусть данныя пять точекъ будутъ a и a', b и b', c (фиг. 87).

Черезъ три точки c, b, a', данной прямой AB проведемъ, какія-нибудь, три прямыя линіи, которыя бы образовали треугольникъ 123. Проведемъ прямыя $3a$ и $2b'$, соеди-

нимъ точку ихъ пересѣченія O прямою съ точкою 1; прямая $O1$ встрѣтитъ данную AB въ искомой точкѣ c'. Это построеніе дало четыреугольникъ $O123$, въ которомъ данная прямая AB пересѣкла четыре стороны и двѣ діагонали, а по § 168 шесть точекъ пересѣченія составляютъ инволюціонный рядъ. Построеніе шестой инволюціонной точки, по пяти даннымъ, какъ видимъ, дѣлается только съ помощью прямой линіи.

Инволюціонная связка.

§ 170. Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

суть уравненія двухъ прямыхъ въ нормальной формѣ, то уравненія:

$$\begin{array}{lll} (a)\ \ A_1 = 0 \quad , & (b)\ \ A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , & (c)\ \ A_1 - \mu A_2 = 0 \\ (a')\ \ A_2 = 0 \quad , & (b')\ \ A_1 - \lambda' A_2 = 0 \quad , & (c')\ \ A_1 - \mu' A_2 = 0 \end{array} \qquad (82)$$

будутъ прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія (a) и (a'). Всѣ предложенія относительно инволюціонныхъ свойствъ (82) связки получаются весьма просто изъ свойствъ инволюціоннаго ряда точекъ, если слово *точка* замѣнить словомъ *прямая* во всѣхъ предложеніяхъ относительно точекъ, и если вмѣсто λ, λ', μ и μ' поставимъ ихъ геометрическія значенія:

$$\lambda = \frac{\sin(a, b)}{\sin(a', b)} \quad , \quad \lambda' = \frac{\sin(a, b')}{\sin(a, b')} \quad , \quad \mu = \frac{\sin(a, c)}{\sin(a', c)} \quad , \quad \mu' = \frac{\sin(a, c')}{\sin(a', c')}$$

гдѣ a, b; a, c; ..... означаютъ углы между прямыми a и b, a и c и т. д.

Принимая во вниманіе это геометрическое значеніе коэфиціентовъ мы будемъ имѣть слѣдующіе результаты:

1. Условіе инволюціи связки (82) будетъ (59, § 161).

2. Въ силу чего уравненія инволюціонной связки будутъ имѣть форму (61, § 161).

3. Двойные лучи будутъ выражены уравненіями (67, § 162).

4. О лучахъ на безконечности не можетъ быть и рѣчи, а соотвѣтственные лучи (§ 165) центру и точкѣ на безконечности будутъ (73):

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda\lambda' A_2 = 0$$

5. Если въ двойныхъ лучахъ будемъ имѣть $\lambda\lambda' = 1$, то лучи будутъ:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0$$

это показываетъ, что эти лучи дѣлятъ углы между прямыми (a) и (a') пополамъ, а инволюціонная связка будетъ:

$$(a)\quad A_1 = 0 \quad , \quad (b)\quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad (e)\quad A_1 - A_2 = 0$$

$$(a')\quad A_2 = 0 \quad , \quad (b')\quad A_1\lambda - A_2 = 0 \quad , \quad (f)\quad A_1 + A_2 = 0$$

форма второй пары показываетъ (§ 81, пр. 3), что лучъ (b) дѣлаетъ съ лучемъ (a) такой уголъ, какой лучъ (b) дѣлаетъ съ лучемъ (a').

6. Уравненіе (77) будетъ условіе инволюціи связки, имѣющей форму (76).

§ 171. Заключимъ свойства инволюціонной связки слѣдующими двумя замѣчательными предложеніями:

Предложеніе. Если вершины, какого-нибудь, треугольника соединимъ прямыми линіями съ произвольно взятою точкою въ плоскости треугольника, то стороны треугольника и проведенныя прямыя находятся въ инволюціонной зависимости, т. е. прямыя проведенныя, черезъ какую-нибудь, точку параллельно сторонамъ треугольника и проведеннымъ прямымъ, составляютъ инволюціонную связку.

Доказательство. Пусть уравненія сторонъ треугольника и проведенныхъ черезъ одну точку линій будутъ:

$$(a)\ A_1 = 0 \quad , \quad (b)\ A_2 = 0 \quad , \quad (c)\ A_3 = 0$$

$$(a')\ \frac{A_1}{\lambda} - \frac{A_2}{\mu} = 0 \quad , \quad (b')\ \frac{A_2}{\mu} - \frac{A_3}{\nu} = 0 \quad , \quad (c')\ \frac{A_3}{\nu} - \frac{A_1}{\lambda} = 0$$

Изъ геометрическаго значенія коэфиціентовъ λ, μ, ν будемъ имѣть:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin(a,a')}{\sin(b,a')} \quad , \quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{\sin(b,b')}{\sin(c,b')} \quad , \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{\sin(c,c')}{\sin(a,c')}$$

перемножая, найдемъ:

$$\frac{\sin(a,a') \, . \, \sin(b,b') \, . \, \sin(c,c')}{\sin(b,a') \, . \, \sin(c,b') \, . \, \sin(a,c')} = 1$$

Изъ этого выраженія, соотвѣтствующаго выраженію (81), видимъ, что стороны треугольника и три проведенныя прямыя находятся въ инволюціонной зависимости, т. е. составляютъ углы между собою, которые удовлетворяютъ инволюціонной зависимости. Слѣдовательно, если черезъ, какую-нибудь, точку проведемъ прямыя, параллельно сторонамъ треуголь-

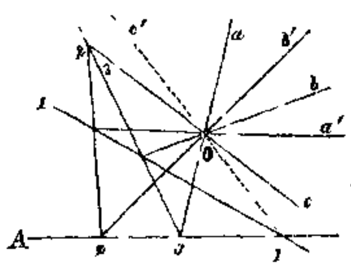
ника и проведеннымъ прямымъ къ вершинамъ, то получимъ инволюціонную связку.

Это свойство треугольника даетъ возможность рѣшить слѣдующую задачу.

Задача. По даннымъ пяти прямымъ изъ трехъ паръ въ инволюціи, проходящихъ черезъ одну точку, провести шестую?

Рѣшеніе. Пусть данныя пары будутъ *Oa*, *Oa'*, *Ob*, *Ob'*, *Oc*; требуется построить *Oc*. Проведемъ, какую-нибудь, прямую линію 11. Точки пересѣченія этой линіи съ прямыми *Oa'* и *Ob* соединимъ съ произвольно взятою точкою на прямой *Oc* (фиг. 88). Эти прямыя будутъ 22 и 33. Соединимъ точки пересѣченія 22 и *Ob'*, 33 и *Oa* прямою *A*, то прямая *A* и 11 пересѣкутся въ точкѣ, находящейся на искомой прямой. Слѣдовательно, соединивъ эту точку съ *O*, найдемъ искомую шестую прямую.

Фиг. 88.



Предложеніе. Если шесть вершинъ четыреугольника соединимъ съ какою-нибудь, точкою взятою въ его плоскости, то шесть прямыхъ будутъ составлять инволюціонную связку.

Доказательство. Пусть уравненія сторонъ четыреугольника будутъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0$$

Если, теперь, a_1, a_2, a_3, a_4 будутъ числовыя значенія предъидущихъ уравненій, когда въ нихъ подставимъ координаты взятой точки, то уравненія шести прямыхъ будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_4}{a_4} = 0$$

$$\frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0$$

Пусть λ, μ, ν, будутъ множители, дающіе нормальную форму первымъ тремъ уравненіямъ:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{A}{\lambda} \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{B}{\mu} \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_4}{a_4} = \frac{C}{\nu}$$

Слѣдовательно предъидущія уравненія сдѣлаются:

$$(a)\ A=0\quad,\quad(b)\ B=0\quad,\quad(c)\ C=0$$

$$(a')\ \frac{B}{\mu}-\frac{C}{\nu}=0\quad,\quad(b')\ \frac{C}{\nu}-\frac{A}{\lambda}=0\quad,\quad(c')\ \frac{A}{\lambda}-\frac{B}{\mu}=0$$

но:

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{\sin(b,a')}{\sin(c,a')}\quad,\quad\frac{\nu}{\lambda}=\frac{\sin(c,b')}{\sin(a,b')}\quad,\quad\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\sin(a,c')}{\sin(b,c')}$$

откуда, перемноживъ:

$$\frac{\sin(b,a')\,.\sin(c,b')\,.\sin(a,c')}{\sin(c,a')\,.\sin(a,b')\,.\sin(b,c')}=1$$

а это показываетъ, что шесть прямыхъ составляютъ инволюціонную связку.

Рѣшить при помощи свойствъ проэктивныхъ рядовъ и связокъ задачи § 84, прим. 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, и т. д. до 26 включительно, и задачи § 85, прим. 2, 3, 4, 5, 6, 7.

ГЛАВА XI.

Геометрическое значеніе однородныхъ уравненій.

§ 172. Если:

$$A_1=0\quad,\quad A_2=0 \tag{1}$$

суть уравненія двухъ прямыхъ въ нормальной формѣ, то уравненіе:

$$A_1-\lambda A_2=0 \tag{2}$$

представляетъ прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія прямыхъ (1). Числовое значеніе A_1, A_2 и λ въ уравненіи (2) было объяснено выше.

Если обратимъ вниманіе на форму уравненія (2), то увидимъ, что оно ничѣмъ не отличается отъ обыкновеннаго уравненія въ декартовыхъ координатахъ:

$$x-\lambda y=0 \tag{3}$$

прямой, проходящей черезъ начало координатъ, т. е. черезъ точку пересѣченія прямыхъ:

$$x=0\quad,\quad y=0$$

разница заключается въ томъ, что въ уравненіи (3) координаты точки на прямой проводятся параллельно осямъ, а въ уравненіи (2) A_1 и A_2 суть пер-

пендикуляры, опущенные на прямыя (1) изъ точекъ прямой (2), какъ бы нибыли наклонены между собою прямыя (1). Но такъ какъ эти перпендикуляры пропорціональны прямымъ, параллельнымъ координатамъ, то уравненія (2) и (3) не имѣютъ между собою разницы—параллельныя могутъ быть замѣщены перпендикулярами и, обратно, значеніе уравненій (2) и (3) неизмѣняется.

Дѣло только въ томъ, что въ уравненіи (3):

$$x = 0 \quad , \quad y = 0$$

суть сами координатныя оси, а въ уравненіи (2):

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

суть прямыя отнесенныя къ координатамъ Декарта, и если эти прямыя принять за координатныя оси, то уравненіе (2) будетъ тождественно съ уравненіемъ (3).

Если вмѣсто λ напишемъ отношеніе $a_1 : -a_0$, то уравненіе (2) приметъ форму:

$$a_0 x + a_1 y = 0 \tag{4}$$

значеніе отношенія было показано въ § 79.

§ 173. Если уравненія (1) представляютъ точки въ нормальной формѣ, то уравненіе (2) будетъ представлять точку на прямой, проходящей черезъ точки (1). Числовое значеніе A_1, A_2 и λ въ уравненіи (2) было объяснено въ § 82:

Если отношеніе λ дано, то дано и положеніе точки (2) на прямой (A_1 A_2). Въ самомъ дѣлѣ, означимъ разстояніе между точками (1) черезъ k, черезъ p и q разстояніе точки (2) отъ точекъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, то соображаясь съ значеніемъ λ, найдемъ:

$$p + q = k \quad , \quad p = q\lambda$$

откуда p и q будутъ опредѣлены.

Если теперь оставимъ въ сторонѣ координаты Декарта, въ которыхъ выражено уравненіе (2), а перпендикуляры A_1 и A_2, опущенные изъ точекъ (1) на прямую (2), означимъ черезъ x и y, то уравненіе (2) приметъ форму:

$$px + qy = 0$$

или для большей общности, полагая $\rho p = a_0$, $\rho q = a_1$ будемъ имѣть:

$$a_0 x + a_1 y = 0 \tag{5}$$

Въ этомъ уравненіи точки, координатами становятся не двѣ прямыя, какъ въ декартовой системѣ, а двѣ точки $x=0$ и $y=0$, которыя мы будемъ называть *координатными.*

Итакъ однородное уравненіе 1-ой степени:

$$a_0x+a_1y=0$$

представляетъ или прямую или точку, смотря потому придаемъ-ли мы уравненіямъ:

$$x=0 \quad , \quad y=0$$

значеніе прямыхъ или точекъ.

§ 174. Послѣ этихъ поясненій легко показать геометрическое значеніе однороднаго уравненія n-ой степени:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\ldots\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=0 \tag{6}$$

Это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n+a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{x}{y}\right)^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right)+a_n=0 \tag{7}$$

которое можетъ быть рѣшено относительно $\frac{x}{y}$. Если его корни означимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$, то уравненіе (7) можно написать въ формѣ:

$$a_0\left(\frac{x}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{x}{y}-\alpha_2\right)\ldots\ldots\left(\frac{x}{y}-\alpha_n\right)=0 \tag{8}$$

или:

$$a_0(x-\alpha_1y)(x-\alpha_2y)\ldots\ldots(x-\alpha_ny)=0 \tag{9}$$

которое, такимъ образомъ, представляетъ n прямыхъ или точекъ:

$$x-\alpha_1y=0 \quad , \quad x-\alpha_2y=0, \ldots, x-\alpha_ny=0 \tag{10}$$

смотря потому будутъ-ли уравненія $x=0$, $y=0$ представлять прямыя или точки.

Если бы мы выразили и корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ отношеніями:

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots\ldots \frac{x_n}{y_n}$$

то уравненія (10) представились-бы въ формѣ:

$$x_1x-y_1y=0 \quad , \quad x_2x-y_2y=0, \ldots, x_nx-y_ny=0 \tag{11}$$

§ 175. Если уравненія:

$$x=0 \quad , \quad y=0 \tag{12}$$

представляютъ прямыя, то:

$$x-y=0 \quad , \quad x+y=0 \tag{13}$$

суть равнодѣлящія углы между прямыми.

Если уравненія (12) суть точки, то (13) суть точки равнодѣлящія разстояніе между точками (12) внутренне или внѣшне (§ 82), изъ коихъ первое изъ уравненій (13) представляетъ точку на безконечности (§ 82).

Уравненія (12) и (13) представляютъ гармоническую связку или рядъ.

Точно также уравненія:

$$x=0 \quad , \quad y=0 \quad , \quad a_0x-a_1y=0 \quad , \quad a_0x+a_1y=0 \tag{14}$$

представляютъ или гармоническую связку или гармоническій рядъ.

Примѣръ. Уравненіе:

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2=0$$

представляетъ двѣ прямыя или двѣ точки. Если корни этого уравненія относительно $\frac{x}{y}$ будутъ α_1, α_2, то уравненія прямыхъ или точекъ будутъ:

$$x-\alpha_1y=0 \quad , \quad x-\alpha_2y=0$$

эти прямыя или точки будутъ дѣйствительныя, совпадающія или мнимыя, смотря потому будетъ-ли:

$$a^2_1-a_0a_2 \gtrless 0$$

§ 176. *Задача.* Найти углы между прямыми:

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2=0 \tag{15}$$

и уравненія равнодѣлящихъ?

Рѣшеніе 1. Предположимъ, что оси $x=0$, $y=0$ прямоугольны. Означая корни даннаго уравненія черезъ α_1 и α_2, оно распадается на два:

$$x-\alpha_1y=0 \quad , \quad x-\alpha_2y=0 \tag{16}$$

Слѣдовательно задача сводится къ опредѣленію угла между этими послѣдними прямыми. Означимъ черезъ φ_1 и φ_2 углы, которые эти прямыя составляютъ съ осью Y, то будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\alpha_1 \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi_2=\alpha_2$$

Слѣдовательно уголъ между прямыми (16) будетъ:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 . \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1 + \alpha_1 \alpha_2}$$

но изъ свойствъ квадратнаго уравненія (15) имѣемъ:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{2a_1}{a_0} \quad , \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_2}{a_0}$$

откуда:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \frac{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0}$$

слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0 + a_2}$$

Если черезъ φ' и φ'' означимъ эти углы:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0 + a_2} \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi'' = -\frac{2\sqrt{a_1^2 - a_0 a_2}}{a_0 + a_2}$$

то, очевидно, $\varphi' + \varphi'' = \pi$.

Чтобы найти уравненіе равнодѣлящихъ углы между прямыми (15), то замѣтивъ, что если ω есть уголъ, который равнодѣлящая составляетъ съ осью Y, имѣемъ:

$$2\omega = \varphi_1 + \varphi_2$$

откуда:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2 \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg}^2 \omega} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 . \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2}$$

подставляя значенія для $\alpha_1 + \alpha_2$ и $\alpha_1 \alpha_2$, найдемъ:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg}^2 \omega} = -\frac{2a_1}{a_0 - a_2}$$

откуда:

$$a_1 \operatorname{tg}^2 \omega - (a_0 - a_2) \operatorname{tg} \omega - a_1 = 0$$

корни этого уравненія будутъ давать двѣ равнодѣлящія. Если вмѣсто $\operatorname{tg} \omega$, поставимъ $\frac{x}{y}$, то уравненіе равнодѣлящихъ будетъ:

$$a_1 x^2 - (a_0 - a_2) xy - a_1 y^2 = 0 \tag{17}$$

Очевидно корни этого уравненія всегда дѣйствительные, будутъ-ли данныя уравненіемъ (15) прямыя дѣйствительныя или мнимыя.

Рѣшеніе 2. Эту послѣднюю задачу можно еще рѣшить слѣдующимъ образомъ:

Пусть прямыя:

$$x - \mu_1 y = 0 \quad , \quad x - \mu_2 y = 0 \tag{18}$$

будутъ сопряженно-гармоническія съ прямыми (16), то мы имѣемъ (§ 146):

$$\mu_1\mu_2 - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2 = 0$$

Если уравненія (18) суть равнодѣлящія углы между прямыми (16), то онѣ должны быть перпендикулярны и, слѣдовательно:

$$\mu_1\mu_2 = -1$$

откуда:

$$-2 - (\mu_1 + \mu_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_1\alpha_2 = 0$$

изъ этого уравненія найдемъ:

$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{2 - 2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{a_0 - a_2}{a_1}$$

имѣя $\mu_1 + \mu_2$ и $\mu_1\mu_2$ найдемъ уравненіе:

$$a_1\mu^2 - (a_0 - a_2)\mu - a_1 = 0$$

Замѣщая μ черезъ $\frac{x}{y}$, найдемъ уравненіе (17).

Задача. Даны уравненія двухъ прямыхъ:

$$a_0 x + a_1 y = 0 \quad , \quad b_0 x + b_1 y = 0$$

Найти уравненіе равнодѣлящихъ?

Рѣшеніе. Перемноживъ эти уравненія, найдемъ уравненіе:

$$a_0 b_0 x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) xy + a_1 b_1 y^2 = 0$$

Если сравнимъ это уравненіе съ уравненіемъ (15), найдемъ уравненіе равнодѣлящихъ, соотвѣтствующее уравненію (17):

$$(a_0 b_1 + a_1 b_0) x^2 - 2(a_0 b_0 - a_1 b_1) xy - (a_0 b_1 + a_1 b_0) y^2 = 0 \tag{19}$$

Если данныя уравненія будутъ двѣ мнимыя сопряженныя прямыя, то равнодѣлящія будутъ дѣйствительныя.

§ 177. Если уравненія:

$$x=0 \quad , \quad y=0$$

будутъ точки, то уравненіе:

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2=0 \tag{20}$$

будетъ представлять двѣ точки, коихъ уравненія будутъ:

$$x-\alpha_1 y=0 \quad , \quad x-\alpha_2 y=0$$

если α_1 и α_2 суть корни уравненія (20).

Задача. Найти уравненіе точекъ дѣлящихъ разстояніе между точками (20) пополамъ?

Рѣшеніе. Точка дѣлящая внѣшне это разстояніе находится на безконечности.

Условіе, чтобы точки:

$$x-\mu_1 y=0 \quad , \quad x-\mu_2 y=0 \tag{21}$$

были сопряженно-гармоническія съ точками (20) есть:

$$\mu_1\mu_2-\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1\alpha_2=0 \tag{22}$$

Если эти точки суть равнодѣлящія, то одна изъ нихъ, напримѣръ вторая, должна находится на безконечности, а слѣдовательно ея уравненіе должно быть:

$$x-y=0$$

т. е. $\mu_2=1$. Въ силу чего условіе (22) дѣлается:

$$\mu_1-\frac{1}{2}(\mu_1+1)(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1\alpha_2=0$$

откуда имѣемъ:

$$a_0\mu_1+(\mu_1+1)a_1+a_2=0$$

или:

$$(a_0+a_1)\mu_1+a_1+a_2=0$$

замѣщая μ_1 черезъ $\frac{x}{y}$, найдемъ уравненіе искомой равнодѣлящей:

$$(a_0+a_1)x+(a_1+a_2)y=0 \tag{23}$$

Задача 1. Даны уравненія двухъ точекъ:

$$a_0x + a_1y = 0 \quad , \quad b_0x + b_1y = 0$$

найти уравненіе равнодѣлящей?

Рѣшеніе Какъ второе рѣшеніе задачи о прямыхъ (§ 176).

Отв. $(a_0b_1 + b_0a_1 + 2a_0b_0)x + (a_0b_1 + b_0a_1 + 2a_1b_1)y = 0$

Задача 2. Найти выраженіе для ангармоническаго отношенія четырехъ точекъ:

$$a_0x + a_1y = 0 \quad , \quad b_0x + b_1y = 0$$

$$c_0x + c_1y = 0 \quad , \quad d_0x + d_1y = 0$$

Рѣшеніе. Если сравнимъ эти уравненія съ уравненіями § 145, то найдемъ:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4} = \frac{c_0a_1 - a_0c_1}{d_0a_1 - a_0d_1} : \frac{c_0b_1 - b_0c_1}{d_0b_1 - d_1b_0} \tag{24}$$

Если это отношеніе равно -1, то точки будутъ гармоническія.

Задача. Найти условіе, чтобы точки:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2 = 0 \tag{25}$$

были сопряженно-гармоническія?

Рѣшеніе. Если корни перваго уравненія назовемъ черезъ λ_1, λ_2, а втораго черезъ λ_3, λ_4, то надобно только найти условіе гармоничности четырехъ точекъ:

$$x - \lambda_1y = 0 \quad , \quad x - \lambda_3y = 0$$

$$x - \lambda_2y = 0 \quad , \quad x - \lambda_4y = 0$$

Но условіе гармоничности этихъ точекъ есть (§ 146):

$$\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 = 0$$

Но изъ уравненій (25) имѣемъ:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_2}{a_0} \quad , \quad \lambda_3\lambda_4 = \frac{b_2}{b_0} \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2a_1}{a_0} \quad , \quad \lambda_3 + \lambda_4 = -\frac{2b_1}{b_0}$$

слѣдовательно условіе гармоничности будетъ:

$$a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1 = 0 \tag{26}$$

Примѣръ. Показать, что уравненія:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad , \quad x^2 + 2a_1xy - y_2 = 0$$

представляютъ гармоническія точки.

Задача. Найти зависимость между коэфиціентами уравненія четвертой степени, чтобы точки, которыя оно представляетъ, были гармоническія?

Рѣшеніе. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4 = 0 \tag{27}$$

Уравненіе взято съ биноміальными коэфиціентами. Пусть его корни будуть α_1, α_2, α_3, α_4, то уравненія точекъ, которыя представляетъ уравненіе (27), будутъ:

$$x - \alpha_1 y = 0 \;,\quad x - \alpha_2 y = 0 \;,\quad x - \alpha_3 y = 0 \;,\quad x - \alpha_4 y = 0$$

Чтобы эти точки были гармоническія необходимо имѣть:

$$\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4 = 0$$

Но такъ какъ три точки опредѣляютъ четвертую гармоническую, а соединеній изъ четырехъ точекъ по три есть три, то мы должны имѣть еще слѣдующія уравненія:

$$\alpha_1\alpha_3 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) + \alpha_2\alpha_4 = 0$$

$$\alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_4 = 0$$

первое уравненіе можно написать въ формѣ:

$$2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4) - (\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4) = 0$$

Но мы знаемъ, что:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{6a_2}{a_0}$$

подставляя вмѣсто:

$$\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_4$$

его величину изъ предъидущаго тождества, найдемъ:

$$a_0(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4) - 2a_2 = 0$$

Точно также найдемъ и для остальныхъ двухъ соединеній:

$$a_0(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4) - 2a_2 = 0$$

$$a_0(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_3\alpha_2) - 2a_2 = 0$$

перемножая получимъ симметрическую функцію корней уравненія, которую легко вычислить въ коэфиціентахъ:

$$a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a^2_3 - a_4a^2_1 - a^3_2 = 0 \tag{28}$$

Это и есть не только необходимое, но и достаточное условіе для гармоничности четырехъ точекъ, выраженныхъ уравненіемъ (27).

Задача. Найти зависимость между коэфиціентами уравненія 4-ой степени, чтобы точки, которыя оно представляетъ, были эквіангармоническія?

Рѣшеніе. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4 = 0 \tag{29}$$

Въ § 95 мы назвали эквіангармоническимъ такое положеніе четырехъ точекъ, при которомъ три основныя ангармоническія отношенія равны, т. е. когда:

$$(abcd) = (acdb) = (adbc)$$

Въ этомъ случаѣ ангармоническое отношеніе есть одинъ изъ мнимыхъ корней уравненія $x^3 + 1 = 0$.

Если эквіангармоническія точки представляемыя уравненіемъ суть:

$$x - \alpha_1 y = 0 \quad , \quad x - \alpha_2 y = 0 \quad , \quad x - \alpha_3 y = 0 \quad , \quad x - \alpha_4 y = 0$$

то мы должны имѣть:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_4} : \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_4} = \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{\alpha_1 - \alpha_2} : \frac{\alpha_3 - \alpha_4}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

равенство третьяго ангармоническаго отношенія $(adbc)$ есть слѣдствіе равенства первыхъ двухъ. Предъидущее уравненіе можно написать въ формѣ:

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)}$$

или:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_1 - \alpha_4)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2 = 0$$

Это уравненіе послѣ перемноженія будетъ симметрическая функція корней даннаго уравненія, слѣдовательно легко можетъ быть вычисленна въ функціи его коэфиціентовъ, а именно:

$$a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 = 0 \tag{30}$$

§ 178. Легко видѣть, что уравненія:

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 = 0 \quad , \quad b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2 = 0 \tag{31}$$

и

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 + \lambda (b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2) = 0 \tag{32}$$

гдѣ λ можетъ получать всевозможныя значенія, представляютъ рядъ точекъ образующихъ инволюціонный рядъ или инволюціонную связку прямыхъ линій.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \tag{33}$$

будетъ пара точекъ сопряженно-гармоническихъ къ обѣимъ парамъ точекъ (31), то мы будемъ имѣть (§ 177, 26):

$$a_0 c + a_2 a - 2a_1 b = 0 \quad , \quad b_0 c + b_2 a - 2b_1 b = 0 \tag{34}$$

Легко видѣть теперь, что точки (33) суть сопряженно-гармоническія и каждой парѣ точекъ (32). Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что условіе:

$$(a_0 + \lambda b_0) c + (a_2 + \lambda b_2) a - 2(a_1 + \lambda b_1) b = 0$$

удовлетворяется независимо отъ λ, такъ какъ его можно написать въ формѣ:

$$a_0c + a_2a - 2a_1b + \lambda(b_0c + b_2a - 2b_1b) = 0$$

которое удовлетворяется въ силу (34).

Чтобы получить двойныя точки (35) этого инволюціоннаго ряда надобно исключить a, b, c изъ уравненій (33) и (34), что даетъ:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (35)$$

ГЛАВА XII.

Трилинейныя координаты.

§ 179. Мы видѣли, что когда точка дается координатами, т. е. двумя уравненіями, то прямая линія дается уравненіемъ, и, обратно, если прямая линія дается координатами, то точка дается уравненіемъ. Въ первомъ случаѣ мы будемъ говорить: координаты точекъ, а во второмъ координаты линій.

Въ § 36 мы видѣли, какъ пряобразуются координаты точекъ.

1. Когда координаты переносятся, оставаясь параллельными; если назовемъ старыя координаты точки черезъ x и y, новыя черезъ x' и y', координаты новаго начала назовемъ черезъ a и b, то мы имѣемъ:

$$x = a + x' \quad , \quad y = b + y'$$

откуда:

$$x = x - a \quad , \quad y' = y - b$$

2. Если начало, оставалось тоже, а поворачивались оси на уголъ α, то мы имѣли при прямоугольной системѣ:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad , \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

откуда:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \quad , \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

3. Если при поворачиваніи осей переносится и начало, то мы имѣемъ:

$$x = a + x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \quad , \quad y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

откуда:

$$x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha \quad , \quad y' = -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha$$

4. Наконецъ, самое общее преобразованіе дается формулами (4) § 36.

$$x = \frac{x'\sin(\theta - \alpha) + y'\sin(\theta - \beta)}{\sin\theta} \quad , \quad y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta}$$

Таковы формулы для преобразованія координатъ точекъ.

§ 180. Посмотримъ, какъ преобразуются координаты линій.

1. Если x и y суть координаты точки, то ея уравненіе (§ 62, 2) будетъ:

$$x\xi + y\eta + 1 = 0$$

перенесемъ начало координатъ въ точку (a, b) и означимъ новыя координаты точки черезъ (x', y'), то:

$$x = a + x' \quad , \quad y = b + y'$$

подставляя въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$x\xi + y\eta + 1 = x'\xi + y'\eta + a\xi + b\eta + 1 = 0$$

или:

$$x'\frac{\xi}{a\xi + b\eta + 1} + y'\frac{\eta}{a\xi + b\eta + 1} + 1 = 0$$

если ξ, η' будутъ новыя координаты линіи, то:

$$\xi' = \frac{\xi}{a\xi + b\eta + 1} \quad , \quad \eta' = \frac{\eta}{a\xi + b\eta + 1} \tag{1}$$

опредѣляя изъ этихъ уравненій ξ и η черезъ ξ' и η', найдемъ:

$$\xi = \frac{\xi'}{-a\xi' - b\eta' + 1} \quad , \quad \eta = \frac{\eta'}{-a\xi' - b\eta' + 1} \tag{2}$$

таковы формулы для преобразованія координатъ линій, когда переносится начало, неизмѣняя направленія координатъ.

Легко видѣть, что:

$$a\xi + b\eta + 1 = 0$$

есть уравненіе новаго начала.

2. Оставимъ начало тоже, а поворотимъ координаты на уголъ α, то:

$$x\xi + y\eta + 1 = (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\xi + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\eta + 1 = 0$$

или:

$$x'(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) + y'(-\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha) + 1 = 0$$

Если новыя координаты линіи будутъ ξ', η', то:

$$\xi = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha \quad , \quad \eta' = -\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha$$

откуда:

$$\xi = \xi' \cos\alpha - \eta' \sin\alpha \quad , \quad \eta = \xi' \sin\alpha + \eta' \cos\alpha$$

3. Совмѣстное преобразованіе, поворотъ координатъ и перенесеніе начала, дастъ:

$$x\xi + y\eta + 1 = (x'\cos\alpha - y\sin\alpha)\xi + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\eta + a\xi + b\eta + 1 = 0$$

обозначая новыя координаты черезъ ξ', η', найдемъ:

$$\xi' = \frac{\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha}{a\xi + b\eta + 1} \quad , \quad \eta' = \frac{-\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha}{a\xi + b\eta + 1}$$

откуда:

$$\xi = \frac{\xi'\cos\alpha - \eta'\sin\alpha}{-(a\cos\alpha + b\sin\alpha)\xi' + (a\sin\alpha - b\cos\alpha)\eta' + 1}$$

$$\eta = \frac{\xi'\sin\alpha - \eta'\cos\alpha}{-(a\cos\alpha + b\sin\alpha)\xi' + (a\sin\alpha - b\cos\alpha)\eta' + 1}$$

Таковы формулы для преобразованія координатъ линій. Изъ формы этихъ уравненій видимъ, что онѣ имѣютъ характеръ отличный отъ координатъ точекъ; между тѣмъ по аналитическому смыслу онѣ должны бы имѣть туже форму и характеръ, такъ какъ мы уже выше показали, что между точкой и прямой линіей нѣтъ разницы въ аналитическомъ смыслѣ; причина этому та, что декартовы координаты суть только частный случай болѣе общей системы, которая называется *трилинейной*. Причина этого заключается еще въ томъ, что мы относимъ, какъ положеніе точки, такъ и положеніе прямой, къ двумъ прямымъ, а слѣдуетъ относить положеніе прямой къ двумъ точкамъ.

Въ трилинейной системѣ координатъ такая взаимность является сама собою и формулы для преобразованія въ обѣихъ системахъ тождественны по формѣ.

§ 181. Возьмемъ три прямыя линіи, образующія треугольникъ, пусть ихъ уравненія будутъ:

$$\begin{aligned} &1)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ &2)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ &3)\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Такъ какъ эти три прямыя образуютъ треугольникъ, т. е. не пересѣкаются въ одной точкѣ, то опредѣлитель:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \lesseqgtr 0$$

Означивъ миноры этого опредѣлителя черезъ A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3, уравненія точекъ (2,3), (1,3), (1,2), т. е. вершинъ треугольника, будутъ (§ 71):

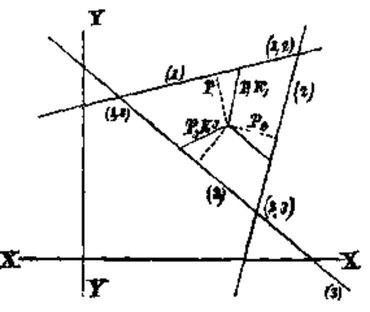
$$
\begin{aligned}
&(2,3)\ A_1\xi + B_1\eta + C_1 = 0 \\
&(1,3)\ A_2\xi + B_2\eta + C_2 = 0 \qquad (4) \\
&(1,2)\ A_3\xi + B_3\eta + C_3 = 0
\end{aligned}
$$

Положеніе каждой точки въ трилинейной системѣ координатъ, отнесемъ къ тремъ прямымъ (3), а положеніе каждой прямой къ тремъ точкамъ (4), т. е. къ вершинамъ треугольника, который называется *координатнымъ*.

Пусть разстоянія, какой-нибудь, точки (x, y) на плоскости отъ сторонъ координатнаго треугольника будутъ p_1, p_2, p_3 (фиг. 89).

Эти три элемента состоятъ, очевидно, въ извѣстной зависимости, такъ какъ для опредѣленія положенія точки относительно координатнаго треугольника, достаточно двухъ изъ нихъ, слѣдовательно три элемента будутъ равносильны двумъ, если мы будемъ принимать во вниманіе не ихъ величину, а только ихъ отношенія. Такъ какъ координатный треугольникъ данъ, то можно всегда опредѣлить точно и числовыя величины элементовъ p_1, p_2, p_3, но въ этомъ, въ трилинейной системѣ координатъ, не представляется надобности; даже вмѣсто разстояній p_1, p_2, p_3 можно брать разстоянія точки въ произвольномъ направленіи, т. е. помножить p_1, p_2, p_3 на постоянные коэфиціенты, напримѣръ, k_1, k_2, k_3.

Фиг. 89.



Если означимъ черезъ x_1, x_2, x_3 такія величины, что:

$$\rho x_1 = p_1 k_1 \quad , \quad \rho x_2 = p_2 k_2 \quad , \quad \rho x_3 = p_3 k_3$$

гдѣ ρ есть коэфиціентъ пропорціональности, совершенно произвольный, и примемъ x_1, x_2, x_3 за координаты точки (x, y), то трилинейныя координаты точки будутъ: *три числа имѣющія между собою отношенія равныя отношеніямъ разстояній точки отъ сторонъ треугольника, помноженныхъ, каждое, на произвольный, но постоянный коэфиціентъ, т. е. отсчитываемыя въ произвольномъ, но постоянномъ направленіи.*

Легко видѣть, что уравненія сторонъ координатнаго треугольника будутъ:

$$(1)\ x_1 = 0 \quad , \quad (2)\ x_2 = 0 \quad , \quad (3)\ x_3 = 0$$

а координаты вершинъ:

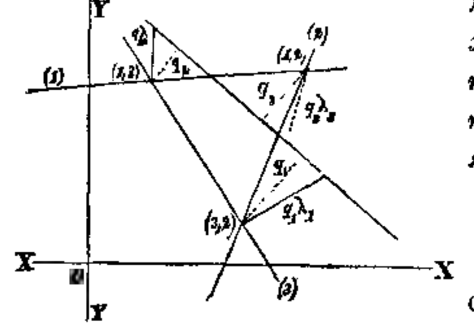
$$(1,2)\quad x_1=0\ ,\ x_2=0\ ;\ (1,3)\quad x_1=0\ ,\ x_3=0\ ;\ (2,3)\quad x_2=0\ ,\ x_3=0$$

Въ этихъ трехъ случаяхъ, въ первомъ x_3, во второмъ x_2, въ третьемъ x_1, могутъ имѣть совершенно произвольныя величины, исключая нуля. Точно также мы опредѣлимъ трилинейныя координаты линіи. Пусть q_1, q_2, q_3 будутъ разстоянія прямой, данной координатами ξ, η, отъ вершинъ координатнаго треугольника, пусть эти разстоянія будутъ отсчитываться не по перпендикулярамъ q_1, q_2 q_3, а въ извѣстномъ опредѣленномъ направленіи, каждое, т. е. q_1, q_2, q_3 помножаются на коэфиціенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Если черезъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 назовемъ такія величины, что (фиг. 90):

$$\sigma\xi_1=q_1\lambda_1\quad,\quad\sigma\xi_2=q_2\lambda_2\quad,\quad\sigma\xi_3=q_3\lambda_3$$

и назовемъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 координатами прямой (ξ,η), то трилинейными координатами прямой будутъ: *три числа имѣющія, между собою, отношенія равныя отношеніямъ разстояній прямой отъ вершинъ треугольника, помноженныхъ, каждое, на произвольный, но постоянный коэфиціентъ, т. е. отсчитываемыя въ произвольномъ, но постоянномъ направленіи.*

Фиг. 90.



Очевидно, что:

$$\xi_1=0\quad,\quad\xi_2=0\quad,\quad\xi_3=0$$

суть уравненія вершинъ треугольника, а:

$$\xi_1=0\ ;\ \xi_2=0\ ;\ \xi_1=0\ ,\ \xi_3=0\ ;\ \xi_2=0\ ,\ \xi_3=0$$

суть координаты сторонъ треугольника. Въ каждомъ изъ этихъ трехъ случаевъ: въ первомъ ξ_3, во второмъ ξ_2, въ третьемъ ξ_1, могутъ имѣть произвольныя величины, исключая нуля.

§ 182. Опредѣливъ, такимъ образомъ, трилинейныя координаты точки и прямой, мы будемъ имѣть, если напишемъ уравненія (3) и (4) § 181, въ нормальной формѣ:

$$\rho x_1=p_1k_1=k_1\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\qquad\sigma\xi_1=\lambda_1q_1=\lambda_1\frac{A_1\xi+B_1\eta+C_1}{C_1\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

$$\rho x_2=p_2k_2=k_2\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\qquad\sigma\xi_2=\lambda_2q_2=\lambda_2\frac{A_2\xi+B_2\eta+C_2}{C_2\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

$$\rho x_3=p_3k_3=k_3\frac{a_3x+b_3y+c_3}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}}\qquad\sigma\xi_2=\lambda_3q_3=\lambda_3\frac{A_3\xi+B_3\eta+C_3}{C_3\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

Такъ какъ k и λ суть величины совершенно произвольныя, то мы можемъ ихъ такъ выбрать, чтобы:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \xi x + \eta y + 1 = 0$$

то есть, чтобы уравненія прямой или точки представлялись въ формѣ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

Если это прямая, то ея координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3; если-же это уравненіе точки, то ея координаты будутъ x_1, x_2, x_3

Для этого положимъ:

$$k_1 = \sqrt{a^2_1 + b^2_1} \quad , \quad k_2 = \sqrt{a^2_2 + b^2_2} \quad , \quad k_3 = \sqrt{a^2_3 + b^2_3}$$

$$\lambda_1 = C_1 \quad , \quad \lambda_2 = C_2 \quad , \quad \lambda_3 = C_3$$

а общій дѣлитель $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ введемъ въ коэфиціентъ пропорціональности σ, что даетъ:

$$\begin{array}{ll|l}
\rho x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 & & \sigma\xi_1 = A_1\xi + B_1\eta + C_1 \\
\rho x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 & & \sigma\xi_2 = A_2\xi + B_2\eta + C_2 \\
\rho x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 & & \sigma\xi_3 = A_3\xi + B_3\eta + C_3
\end{array} \qquad (5)$$

таковы формулы, служащія для перехода отъ трилинейныхъ координатъ къ декартовымъ. Если эти уравненія рѣшимъ относительно x, y, то найдемъ формулы для обратнаго перехода, отъ декартовыхъ координатъ къ трилинейнымъ:

$$\begin{array}{l|l}
x = \dfrac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3} & \xi = \dfrac{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3}{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3} \\
y = \dfrac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3} & \eta = \dfrac{b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3}{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3}
\end{array} \qquad (6)$$

Легко теперь видѣть, что:

$$\rho\sigma(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = R(\xi x + \eta y + 1) = 0$$

Слѣдовательно уравненіе:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

есть совмѣстное представленіе прямой и точки, т. е. что точка скользитъ по прямой, коей координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3, или, что прямая вращается около точки, коей координаты суть x_1, x_2, x_3.

Изъ всего сказаннаго выше видно, что въ трилинейной системѣ координатъ существуетъ *полная соотвѣтственность*:

Положеніе точки опредѣляется, относительно *сторонъ* координатнаго треугольника, разстояніями ея, отсчитываемыми въ извѣстномъ, опредѣленномъ направленіи, отъ сторонъ треугольника.

Положеніе прямой опредѣляется относительно *вершинъ* координатнаго треугольника, разстояніями ея, отсчитываемыми въ извѣстномъ, опредѣленномъ направленіи, отъ вершинъ треугольника.

Вслѣдствіи этого формулы (5) и (6) для преобразованіи тождественны по формѣ.

§ 183. Остается показать, что система декартовыхъ координатъ есть частный случай трилинейной.

Для этого преобразуемъ координатный треугольинкъ въ другой, въ которомъ бы стороны $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ были перпендикулярны, что легко дѣлается простымъ преобразованіемъ (фиг. 91).

Пусть x и y будутъ разстоянія точки O отъ $x_1 = 0$ и отъ $x_2 = 0$; пусть p будетъ ея разстояніе отъ стороны $x_3 = 0$, то мы будемъ имѣть, если q будетъ разстояніе стороны $x_3 = 0$ отъ вершины $\xi_3 = 0$:

Фиг. 91.

$$\rho x_1 = k_1 x \quad , \quad \rho x_2 = k_2 y \quad , \quad \rho x_3 = k_3 p$$

Полагая $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = \frac{1}{q}$, найдемъ:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = \frac{p}{q}$$

Положимъ теперь, что сторона $x_3 = 0$ удаляется неопредѣленно на безконечное разстояніе, оставаясь параллельна сама себѣ; въ этомъ предположеніи $\frac{p}{q}$, очевидно, будетъ стремится къ единицѣ и въ предѣлѣ мы будемъ имѣть $\frac{p}{q} = 1$, откуда:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1$$

поэтому, чтобы перейти отъ трилинейной системы координатъ къ декартовой надобмо только положить въ уравненіи:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

помноживъ его на ρ,

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1$$

что даетъ:

$$\xi_1 x + \xi_2 y + \xi_3 = 0$$

въ которомъ, если положимъ, умноживъ на σ,

$$\sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = 1$$

найдемъ:

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

т. е. координаты ξ_1 и ξ_2 дѣлаются координатами прямой. Теперь видимъ къ какому замѣчательному результату мы пришли, взявъ (§ 62) за координаты прямой не отрѣзки, дѣлаемые ею на координатныхъ осяхъ, а величины обратныя этимъ отрѣзкамъ, взятыя отрицательно.

§ 184. Такъ какъ x, y и ξ, η въ трилинейныхъ координатахъ суть линейныя функціи съ общимъ знаменателемъ, то степень уравненія относительно перемѣнныхъ не можетъ ни повысится, ни понизится введеніемъ новыхъ перемѣнныхъ, но характеръ уравненія, этимъ введеніемъ, измѣняется: оно дѣлается, по приведеніи къ одному знаменателю, однороднымъ между тремя перемѣнными.

Такъ, напримѣръ, уравненіе второй степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

если вмѣсто x и y поставимъ ихъ выраженія (6) § 182, по приведеніи къ одному знаменателю, дѣлается:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

§ 185. Одно изъ самыхъ замѣчательныхъ уравненій прямой, которое играетъ весьма важную роль въ изслѣдованіяхъ свойствъ кривыхъ линій, есть уравненіе, полученное, приравнивая нулю знаменатель первыхъ двухъ уравненій (6) § 182:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = 0 \tag{7}$$

для всѣхъ точекъ этой прямой (7), и только для этой, мы имѣемъ $x = \infty$ и $y = \infty$, слѣдовательно на ней находятся всѣ безконечно удаленныя точки на плоскости. Мы будемъ называть эту прямую *безконечно-удаленною*. Введеніе этой прямой въ изслѣдованія свойствъ кривыхъ линій даетъ возможность выразить много предложеній, перенося на эту прямую разсужденія, какъ на прямую, находящуюся дѣйствительно передъ глазами. Напримѣръ, изъ этого вытекаетъ, что всякая прямая, какъ мы уже выше упомянули, имѣетъ только одну точку на безконечности, такъ какъ двѣ прямыя могутъ пересѣчься только въ одной точкѣ.

§ 186. Остается показать, какъ преобразовать одну систему трилинейныхъ координатъ въ другую также трилинейную. Пусть x_1, x_2, x_3;

ξ_1, ξ_2, ξ_3, будутъ координаты точки или линіи въ одной системѣ, а y_1, y_2, y_3; η_1, η_2, η_3, координаты точки или линіи въ другой системѣ. Пусть уравненіе прямой линіи въ первой системѣ будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0 \tag{8}$$

а во второй, той-же прямой:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \tag{9}$$

Координаты y_1, y_2, y_3 второй системы должны быть линейныя функціи координатъ первой системы; пусть онѣ будутъ:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \rho y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \rho y_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \tag{10}$$

Если эти выраженія подставимъ въ (9) и сравнимъ съ (8), то найдемъ:

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + a_{31}\eta_3 \\ \sigma\xi_2 &= a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{32}\eta_3 \\ \sigma\xi_3 &= a_{13}\eta_1 + a_{23}\eta_2 + a_{33}\eta_3 \end{aligned} \tag{11}$$

Составимъ опредѣлитель изъ элементовъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = R \tag{12}$$

онъ не долженъ быть равенъ нулю, ибо въ противномъ случаѣ прямыя, образующія второй координатный треугольникъ, пересѣкутся въ одной точкѣ. Если миноръ соотвѣтственный элементу $a_{i,k}$ назовемъ черезъ $A_{i,k}$, то изъ уравненій (10) и (11), найдемъ:

$$\begin{aligned} \mu x_1 &= A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3 \\ \mu x_2 &= A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3 \\ \mu x_3 &= A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3 \end{aligned} \tag{13}$$

м:

$$\begin{aligned} \nu\eta_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 \\ \nu\eta_2 &= A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 \\ \nu\eta_3 &= A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 \end{aligned} \tag{14}$$

Изъ уравненій (10) и (14), (11) и (13) ясно видно геометрическое значеніе коэфиціентовъ подстановленій $a_{i,k}$, $A_{i,k}$. Въ самомъ дѣлѣ:

$$y_1 = 0 \; , \; y_2 = 0 \; , \; y_3 = 0 \; ; \; \eta_1 = 0 \; , \; \eta_2 = 0 \; , \; \eta_3 = 0$$

суть уравненія сторонъ и вершинъ втораго координатнаго треугольника, отнесенныхъ къ первому. Эти уравненія суть:

сторонъ:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$$

$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \quad 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

вершинъ:

$$A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 = 0$$

$$A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 = 0$$

$$A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_2 = 0$$

откуда видимъ, что координаты:

новыхъ сторонъ:

$$a_{11} \; , \; a_{12} \; , \; a_{13}$$
$$a_{21} \; , \; a_{22} \; , \; a_{23}$$
$$a_{31} \; , \; a_{32} \; , \; a_{33}$$

новыхъ вершинъ:

$$A_{11} \; , \; A_{12} \; , \; A_{13}$$
$$A_{21} \; , \; A_{22} \; , \; A_{23}$$
$$A_{31} \; , \; A_{32} \; , \; A_{33}$$

Уравненія сторонъ и вершинъ стараго координатнаго треугольника, отнесенныя къ новому, очевидно, будутъ:

старыхъ сторонъ:

$$A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 = 0$$

$$A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 = 0$$

$$A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 = 0$$

старыхъ вершинъ:

$$a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + a_{21}\eta_3 = 0$$

$$a_{12}\eta_1 + a_{32}\eta_2 + a_{22}\eta_3 = 0$$

$$a_{13}\eta_1 + a_{23}\eta_2 + a_{33}\eta_3 = 0$$

Откуда видимъ, что координаты:

старыхъ сторонъ:

$$A_{11} \quad A_{21} \quad A_{31}$$
$$A_{12} \quad A_{22} \quad A_{32}$$
$$A_{13} \quad A_{23} \quad A_{33}$$

старыхъ вершинъ:

$$a_{11} \quad a_{21} \quad a_{21}$$
$$a_{12} \quad a_{22} \quad a_{32}$$
$$a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33}$$

Новая система координатъ, т. е. трилинейная, въ особенности удобна для изслѣдованій, въ которыхъ идетъ дѣло о положеніи, а не о числовой зависимости, поэтому тамъ гдѣ будутъ изслѣдоваться теоремы относительно положеній, мы будемъ всегда прибѣгать къ этой системѣ координатъ.

§ 187. Рѣшимъ еще слѣдующіе вопросы въ этой системѣ координатъ.

Найти уравненіе прямой, проходящей черезъ точки:

$$(y_1, y_2, y_3) \;\; ; \;\; (z_1, z_2, z_3)$$

Найти уравненіе точки пересѣченія двухъ прямыхъ:

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \;\; ; \;\; (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$$

Пусть x_1, x_2, x_3 будутъ скользящія координаты прямой, то ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

Но данныя точки находятся, по условію, на прямой, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0$$

$$\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 = 0$$

Откуда уравненіе искомой прямой будетъ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & , & x_2 & , & x_3 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 \\ z_1 & , & z_2 & , & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

Пусть координаты, вращающейся прямой около искомой точки, будутъ ξ_1, ξ_2, ξ_3, то уравненіе точки будетъ:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0$$

Но точка находится и на данныхъ прямыхъ, слѣдовательно мы имѣемъ:

$$x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 = 0$$

$$x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 = 0$$

Откуда уравненіе искомой точки будетъ:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & , & \xi_2 & , & \xi_3 \\ \eta_1 & , & \eta_2 & , & \eta_3 \\ \zeta_1 & , & \zeta_2 & , & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (15')$$

Легко видѣть, что:

координаты прямой (15) будутъ:

$$\sigma\xi_1 = y_2 z_3 - z_2 y_3$$
$$\sigma\xi_2 = y_3 z_1 - z_3 y_1 \qquad (16)$$
$$\sigma\xi_3 = y_1 z_2 - z_1 y_2$$

координаты точки (15′) будутъ:

$$\rho x_1 = \eta_2\zeta_3 - \zeta_2\eta_3$$
$$\rho x_2 = \eta_3\zeta_1 - \zeta_3\eta_1 \qquad (16')$$
$$\rho x_2 = \eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2$$

Уравненія (15) и (15′) можно разложить на слѣдующія, которыя представляютъ съ помощью параметра λ, или скользящую точку по прямой или вращающуюся прямую около точки (§ 73):

Скользящая точка:

$$\rho x_1 = y_1 + \lambda z_1$$
$$\rho x_2 = y_2 + \lambda z_2 \qquad (17)$$
$$\rho x_2 = y_3 + \lambda z_3$$

Вращающаяся прямая:

$$\sigma\xi_1 = \eta_1 + \lambda\zeta_1$$
$$\sigma\xi_2 = \eta_2 + \lambda\zeta_2 \qquad (17')$$
$$\sigma\xi_2 = \eta_3 + \lambda\zeta_3$$

Эти уравненія получатся изъ (15) и (15′) если въ нихъ элементы третьей горизонтали помноживъ на λ, сложимъ съ элементами второй и приравняемъ элементамъ первой, помноженнымъ на коэфиціенты пропорціональности ρ и σ.

Помножимъ уравненія (17) на ξ_1, ξ_2, ξ_3, а уравненія (17′) на x_1, x_2, x_3 и сложимъ, то найдемъ:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0$$

Это уравненіе одной изъ скользящихъ точекъ по прямой (15), гдѣ:

$$A_1 = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_2$$
$$A_2 = z_1\xi_1 + z_2\xi_2 + z_3\xi_2$$

$$A'_1 + \lambda A'_2 = 0$$

Это уравненіе одной изъ вращающихся прямыхъ около точки (15′), гдѣ:

$$A'_1 = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3$$
$$A'_2 = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3$$

Параметръ λ, помноженный на нѣкоторый коэфиціентъ имѣетъ тоже геометрическое значеніе, какое онъ имѣетъ и въ прямолинейной системѣ координатъ, въ чемъ легко убѣдиться изъ уравненій (17) и (17') и (6) § 182. Изъ нихъ мы имѣемъ:

$$x = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + \lambda(A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3)}{C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \lambda(C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3)}$$

$$y = \frac{B_1y_1 + B_2y_2 + B_3y_3 + \lambda(B_1z_1 + B_2z_2 + B_3z_3)}{C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \lambda(C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3)}$$

$$\xi = \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3 + \lambda(a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + a_3\zeta_3)}{c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 + \lambda(c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + c_3\zeta_3)}$$

$$\eta = \frac{b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3 + \lambda(b_1\zeta_1 + b_2\zeta_2 + b_3\zeta_3)}{c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3 + \lambda(c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2 + c_3\zeta_3)}$$

Откуда уравненія скользящей точки (x, y) или вращающейся прямой (ξ, η) будутъ имѣть форму:

$$P + \lambda Q = 0 \qquad\qquad R + \lambda S = 0$$

гдѣ P и Q суть линейныя функціи отъ (ξ, η), а R и S линейныя функціи отъ x, y. Такъ какъ эти уравненія въ декартовой системѣ линейны относительно параметра λ, то изъ этого и слѣдуетъ его геометрическое значеніе.

Изъ этого заключаемъ, что всѣ выводы, основанные на геометрическомъ значеніи параметра λ, не зависятъ отъ системы координатъ; всѣ теоремы относительно ангармоніи и проэктивности сохраняютъ тѣже аналитическія выраженія.

§ 188. *Примѣчаніе.* Первый зародышъ трилинейной системы координатъ заключается въ предположеніи, что уравненіе всякой прямой можетъ быть выражено съ помощью уравненій трехъ прямыхъ, не пересѣкающихся въ одной точкѣ, а уравненіе точки можетъ быть выражено съ помощью уравненій трехъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой линіи.

Пусть будутъ уравненія трехъ данныхъ:

прямыхъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \qquad (18) \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

точекъ:

$$\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + C_1 &= 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2 &= 0 \qquad (18') \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

а уравненія, какой-нибудь, четвертой:

прямой:

$$ax + by + c = 0 \qquad (19)$$

точки:

$$A\xi + B\eta + C = 0 \qquad (19')$$

Помножимъ уравненія (18) на неопредѣленные множители λ, μ, ν, а уравненія (18') на ρ, δ, ω и, сложивъ, приравняемъ уравненіямъ (19) и (19'), найдемъ:

$$\begin{aligned} &\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \\ &\mu(a_2x + b_2y + c_2) + \\ &\nu(a_3x + b_3y + c_2) = \\ &= ax + by + c = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rho(A_1\xi + B_1\eta + C_1) + \\ &\delta(A_2\xi + B_2\eta + C_2) + \\ &\omega(A_3\xi_3 + B_3\eta + C_3) = \\ &= A\xi + B\eta + c = 0 \end{aligned}$$

Откуда, приравнивая коэфиціенты при x, y и ξ, η, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu = a \\ b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu = b \\ c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu = c \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1\rho + A_2\delta + A_3\omega = A \\ B_1\rho + B_2\delta + B_3\omega = B \\ C_1\rho + C_2\delta + C_3\omega = C \end{aligned}\right\} \quad (20')$$

Такъ какъ, по условію, данныя прямыя не пересѣкаются въ одной точкѣ, а данныя точки не лежатъ на одной прямой линіи, то изъ (20) и (20') λ, μ, ν; ρ, δ, ω можно опредѣлить; слѣдовательно прямая (19) и точка (19') выразятся въ формахъ:

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = 0 \qquad\qquad \rho\xi_1 + \delta\xi_2 + \omega\xi_3 = 0$$

гдѣ x_1, x_2, x_3; ξ_1, ξ_2, ξ_3 суть числовыя значенія уравненій (18) и (18'), когда въ нихъ подставляются координаты точекъ внѣ прямой и координаты прямой внѣ точки. Слѣдовательно ихъ геометрическое значеніе тоже что и въ трилинейной системѣ координатъ.

ГЛАВА XIII.

Инваріанты и коваріанты въ геометріи.

§ 189. Методъ координатъ Декарта или обобщенный методъ трилинейныхъ координатъ, съ помощью которыхъ изслѣдуются свойства кривыхъ линій, не есть нѣчто неразрывно связанное съ кривыми линіями, нѣчто необходимое, а есть инструментъ, которымъ отдѣлывается вещь—это лѣса при постройкѣ зданія. Ни инструментъ съ вещью, съ помощью котораго она была сдѣлана, ни лѣса съ зданіемъ, съ помощью которыхъ оно было

выстроено, не имѣютъ ничего общаго; вещь сдѣлана, зданіе построено, инструментъ и лѣса отбрасываются прочь—остается вещь и зданіе.

Такая вообще роль координатъ въ геометріи; съ помощью ихъ находятся свойства кривыхъ линій, которыя разъ найдены,—координаты отбрасываются прочь и мы имѣемъ передъ глазами образъ кривой со всѣми ея свойствами, какъ зданіе со всѣми подробностями, послѣ снятія лѣсовъ.

Свойства кривыхъ линій даются функціями, составленными, извѣстнымъ образомъ, изъ коэфиціентовъ уравненія кривой или изъ уравненій системы кривыхъ линій или кривыми линіями, составленными, извѣстнымъ образомъ, изъ перемѣнныхъ и коэфиціентовъ уравненія или уравненій; эти послѣднія кривыя, такъ сказать, рождаются кривою, всегда ее сопровождаютъ, т. е. выражаютъ извѣстныя ея свойства.

Слово кривая или система кривыхъ линій мы здѣсь употребляемъ въ самомъ обширномъ смыслѣ, разумѣя и прямую или систему прямыхъ линій, точку или систему точекъ. Свойства кривой или кривыхъ линій, выраженныя извѣстною зависимостью между коэфиціентами уравненія или уравненій, или между коэфиціентами и перемѣнными, не должны, по свойству координатъ, зависить отъ системы координатъ, поэтому не должны измѣнятся при переходѣ отъ одной системы координатъ къ другой, а такой переходъ совершается линейнымъ преобразованіямъ, и все измѣненіе, которое могутъ потерпѣть такія функціи, состоитъ въ пріобрѣтеніи числоваго множителя, зависящаго только отъ системы координатъ.

Функціи, составленныя только изъ коэфиціентовъ, имѣющія выше сказанныя свойства, называются *инваріантами* кривой или кривыхъ линій.

Функціи, составленныя изъ коэфиціентовъ и перемѣнныхъ, т. е. кривыя линіи, имѣющія такія же свойства, называются *коваріантами* кривой или системы кривыхъ линій.

§ 190. *Формою* называютъ однородную, цѣлую раціональную функцію нѣсколькихъ перемѣнныхъ. *Двоичною формою* называютъ форму съ двумя перемѣнными, таковы:

$$a_0x+a_1y \quad , \quad a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2 \quad , \quad a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3 \qquad (1)$$

и т. д. Это суть двоичныя формы первой, второй, третьей и т. д. степеней. Такія формы изображаются символами:

$$(a_0, a_1)(x, y) \quad , \quad (a_0, a_1, a_2)(x, y) \quad , \quad (a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y) \text{ и т. д.} \qquad (2)$$

Коэфиціенты въ формахъ a_0, a_1, a_2, ... могутъ быть сопровождаемы, какъ

выше, биноміальными, численными коэфиціентами. Формы о трехъ перемѣнныхъ называются *троичными*, первой, второй, третьей и т. д. степеней. Такъ напримѣръ форма:

$$a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \qquad (3)$$

будетъ троичная отъ перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, второй степени. Двоичныя формы, приравненныя нулю, представляютъ систему точекъ или прямыхъ (§ 173). Троичныя формы представляютъ кривыя; четверичныя формы представляютъ поверхности. Формы большаго числа перемѣнныхъ не имѣютъ геометрическаго представленія.

Линейнымъ преобразованіемъ формъ называютъ преобразованіе, въ которомъ количества перемѣнныя замѣщаются другими линейно связанными съ первыми. Двоичныя формы отъ x и y, преобразовываются подстановленіями:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y' \qquad (4)$$

α, β, γ, δ называются коэфиціентами линейнаго преобразованія; опредѣлитель, составленный изъ коэфиціентовъ преобразованія:

$$\begin{vmatrix} \alpha , & \beta \\ \gamma , & \delta \end{vmatrix} = \Delta \qquad (5)$$

называется *модулемъ преобразованія.*

Двоичная форма:

$$f(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n; x, y)$$

такимъ подстановленіемъ, преобразовывается въ:

$$f(A_0, A_1, A_2, \ldots A_n; x'y') = f(a_0, a_1, \ldots, a_n; x, y) \qquad (6)$$

гдѣ коэфиціенты A_0, $A_1 \ldots$ суть функціи отъ коэфиціентовъ a_0, $a_1 \ldots$ и отъ коэфиціентовъ преобразованія α, β, γ, δ.

Такъ, напримѣръ, форма:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

сдѣлается:

$$A_0x'^2 + 2A_1x'y' + A_2y'^2 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

гдѣ:

$$A_0 = a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha\gamma + a_2\gamma^2$$

$$A_1 = a_0\alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2\gamma\delta \qquad (7)$$

$$A_2 = a_0\beta^2 + 2a_1\beta\delta + a_2\delta^2$$

Преобразованіе (4) геометрически представляетъ измѣненіе основныхъ точекъ или основныхъ прямыхъ, т. е. координатъ. Основными точками или прямыми въ формѣ $f(a_0, a_1 \ldots, a_n; x, y)$ были $x=0$, $y=0$, линейнымъ же преобразованіемъ (4) эти точки или прямыя замѣщаются другими $x'=0$, $y'=0$; старыя, т. е. $x=0$, $y=0$, выражаются относительно новыхъ уравненіями:

$$\alpha x' + \beta y' = 0 \quad , \quad \gamma x' + \delta y' = 0$$

Если рѣшимъ уравненія (4) относительно x', y', то найдемъ, означая $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$:

$$\Delta x' = \delta x - \beta y \quad , \quad \Delta y' = -\gamma x + \alpha y$$

приравнивая эти выраженія нулю, найдемъ уравненія:

$$\delta x - \beta y = 0 \quad , \quad \gamma x - \alpha y = 0 \tag{8}$$

которыя представляютъ новыя, основныя, точки или прямыя $x'=0$ и $y'=0$, отнесенныя къ старымъ.

Линейное преобразованіе троичной формы:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

будетъ:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 \\ \rho x_2 &= \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 \\ \rho x_3 &= \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 \end{aligned} \tag{9}$$

Слѣдовательно послѣ преобразованія мы будемъ имѣть:

$$f(x'_1, x'_2, x'_3) = f(x_1, x_2, x_3)$$

Опредѣлитель, составленный изъ элементовъ α:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} , & \alpha_{12} , & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} , & \alpha_{22} , & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} , & \alpha_{22} , & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \Delta \tag{10}$$

называется *опредѣлителемъ преобразованія*. Его взаимный есть:

$$\begin{vmatrix} A_{11} , & A_{12} , & A_{13} \\ A_{21} , & A_{22} , & A_{23} \\ A_{31} , & A_{32} , & A_{33} \end{vmatrix} = \Delta' \tag{11}$$

Рѣшая уравненія (9) относительно x'_1, x'_2, x'_3, найдемъ:

$$\begin{aligned} \delta x'_1 &= A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3 \\ \delta x'_2 &= A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3 \\ \delta x'_3 &= A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Уравненія $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ суть стороны координатнаго треугольника, слѣдовательно уравненія:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x'_1 + \alpha_{12}x'_2 + \alpha_{13}x'_3 &= 0 \\ \alpha_{21}x'_1 + \alpha_{22}x'_2 + \alpha_{23}x'_3 &= 0 \\ \alpha_{31}x'_1 + \alpha_{32}x'_2 + \alpha_{33}x'_3 &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

суть уравненія тѣхъ-же сторонъ только отнесенныхъ къ новому координатному треугольнику $x'_1 = 0$, $x'_2 = 0$, $x'_3 = 0$. Приравнивая нулю уравненія (12), мы найдемъ:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3 &= 0 \\ A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3 &= 0 \\ A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

уравненія сторонъ новаго координатнаго треугольника, отнесеннаго къ старому (§ 186).

Въ параллель съ координатами x_1, x_2, x_3, часто преобразовываются другія координаты ξ_1 ξ_2 ξ_3 въ ξ'_1 ξ'_2 ξ'_3 уравненіями (10) и (11) § 186:

$$\begin{aligned} \mu\xi'_1 &= \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{21}\xi_2 + \alpha_{31}\xi_3 \\ \mu\xi'_2 &= \alpha_{12}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{32}\xi_3 \\ \mu\xi'_3 &= \alpha_{13}\xi_1 + \alpha_{23}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3 \end{aligned} \tag{15}$$

такія координаты называются обратными x_1, x_2, x_3, откуда:

$$\begin{aligned} \nu\xi_1 &= A_{11}\xi'_1 + A_{12}\xi'_2 + A_{13}\xi'_3 \\ \nu\xi_2 &= A_{21}\xi'_1 + A_{22}\xi'_2 + A_{23}\xi'_3 \\ \nu\xi_3 &= A_{31}\xi'_1 + A_{32}\xi'_2 + A_{33}\xi'_3 \end{aligned} \tag{16}$$

координаты x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; ξ'_1, ξ_2, ξ'_3; ξ_1, ξ_2, ξ_3, связаны, какъ извѣстно, уравненіемъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \xi'_1 x'_1 + \xi'_2 x'_2 + \xi'_3 x'_3 \qquad (17)$$

Это уравненіе представляетъ или прямую или точку, въ первомъ случаѣ x_1, x_2, x_3 суть координаты скользящей точки по прямой (17), а во второмъ ξ_1 ξ_2 ξ_3 суть координаты вращающейся около точки (17) прямой, а x_1, x_2, x_3 координаты этой точки. Стороны координатнаго треугольника суть $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, а его вершины $\xi_1=0$, $\xi_2=0$, $\xi_3=0$; $x'_1=0$, $x'_2=0$, $x'_3=0$ суть уравненія сторонъ новаго координатнаго треугольника, а $\xi'_1=0$, $\xi'_2=0$, $\xi'_3=0$ суть уравненія его вершинъ.

§ 191. Слѣдовательно линейное преобразованіе формы соотвѣтствуетъ переходу отъ одной системы координатъ къ другой.

Внутреннія свойства системы точекъ или прямыхъ, кривой или системы кривыхъ, поверхности или системы поверхностей, не должны зависить отъ системы координатъ, а зависятъ отъ извѣстныхъ связей между коэфиціентами формъ. Эта связь, выражающая внутреннія, прирожденныя, свойства формы не должна измѣнятся при переходѣ отъ одной системы координатъ къ другой—координатная система это случайный придатокъ формъ. Слѣдовательно, для каждой формы должны существовать такія функціи, цѣлыя раціональныя, которыя неизмѣняются линейнымъ преобразованіемъ; все измѣненіе, которое онѣ могутъ претерпѣть заключается въ пріобрѣтеніи числоваго множителя.

Такъ, напримѣръ, если форма будетъ:

$$f(a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots; x_1, x_2, x_3) \qquad (18)$$

то $\Phi(a_0, a_1, a_2 \ldots)$ функція коэфиціентовъ a_0, a_1, $a_2 \ldots\ldots$, которая въ линейномъ преобразованіи имѣетъ свойство:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, \ldots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1 \ldots) \qquad (19)$$

называется *инваріантомъ* формы (18). Δ есть опредѣлитель преобразованія (5, 10).

Система формъ, имѣющихъ извѣстную зависимость между собою, имѣетъ инваріанты.

Пусть формы будутъ:

$$f_1(a_0, a_1, a_2, \ldots; x_1, x_2, \ldots), f_2(b_0, b_1, \ldots; x_1, x_2, \ldots), f_3(c_0, c_1, \ldots; x_1, x_2, \ldots) \quad (20)$$

Если зависимость между коэфиціентами формъ будетъ:

$$\Phi(A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots, C_0, C_1, \ldots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, c_0, c_1, \ldots) \quad (21)$$

то это будетъ инваріантъ системы.

Рядомъ съ формою или системою формъ всегда существуютъ другія формы, имѣющія необходимую связь съ данными, связь, которая не зависитъ отъ координатной системы или линейнаго преобразованія. Если такая форма существуетъ для формы (18), то мы имѣемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, \ldots; x'_1, x'_2 \ldots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1, \ldots; x_1, x_2, \ldots) \qquad (22)$$

Такія формы называются *коваріантами* формы (18) или системы формъ (20).

Наконецъ рядомъ съ формою (18) или системою формъ (20) существуютъ формы характера (22), но въ которыхъ перемѣнныя преобразуются обратнымъ преобразованіемъ въ то время, когда формы преобразуются прямо, т. е., если x_1, x_2, x_3 переходятъ въ x'_1, $x'_2, \ldots$, то другія перемѣнныя ξ_1, ξ_2, ξ_3 переходятъ въ ξ'_1, ξ_2, ξ'_3 (см. 15, 16) и мы имѣемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, \ldots; \xi'_1, \xi'_2, \ldots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1, \ldots; \xi_1, \xi_2, \ldots) \qquad (23)$$

Такія функціи называются *контраковаріантами.*

Бываютъ формы, которыя заключаютъ и перемѣнныя x_1, x_2, $x_3, \ldots$ и ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \ldots$; первыя преобразуются прямо, а вторыя обратно; при такомъ преобразованіи форма имѣетъ свойство инваріанта:

$$\Phi(A_0, A_1, \ldots; x'_1, x'_2, \ldots \xi'_1, \xi'_2, \ldots) = \Delta^\lambda \Phi(a_0, a_1, \ldots; x_1, x_2, \ldots \xi_1, \xi_2, \ldots) \quad (24)$$

такъ напримѣръ форма:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \qquad (25)$$

вовсе неизмѣняется, т. е. числовой множитель равенъ единицѣ. Формы характера (24) называются *эвектантами.*

§ 192. Пояснимъ сказанное примѣрами:

Пр. 1. Двоичная форма первой степени:

$$a_0 x + a_1 y = 0 \qquad (26)$$

представляетъ или точку на прямой, соединяющей *основныя координатныя* точки $x = 0$, $y = 0$ или прямую, проходящую черезъ пересѣченіе координатъ $x = 0$, $y = 0$. Очевидно, что эта форма не можетъ имѣть инваріанта или коваріанта, такъ какъ она выражаетъ только, что точка или прямая существуютъ.

Пр. 2. Двѣ двоичныя формы первой степени:

$$a_0 x + a_1 y = 0 \quad , \quad b_0 x + b_1 y = 0 \qquad (27)$$

представляютъ или двѣ точки на прямой $x = 0$, $y = 0$, или двѣ прямыя, проходящія черезъ точку $x = 0$, $y = 0$. Коэфиціенты a_0, a_1, b_0, b_1 могутъ имѣть такую, между собою, зависимость, что точки или прямыя совпадаютъ. Это будетъ очевидно тогда, когда коэфиціенты a_0, a_1 пропорціональны коэфиціентамъ b_0, b_1, т. е. когда:

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & , & a_1 \\ b_0 & , & b_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (28)$$

Мы говоримъ, что эта функція есть инваріантъ (27). Въ самомъ дѣлѣ, если точки или прямыя (27) совпадаютъ, то это совпаденіе независитъ отъ основныхъ, т. е. координатныхъ точекъ или прямыхъ. Слѣдовательно, если положеніе точекъ (27) отнесемъ къ какимъ-нибудь другимъ двумъ точкамъ, какъ основнымъ, то условіе (28) должно быть удовлетворено коэфиціентами новыхъ уравненій точекъ (27). Если $x'=0$, $y'=0$ будутъ другія основныя точки на той-же прямой, то старыя точки выразятся уравненіями:

$$x=\alpha x'+\beta y' \quad , \quad y=\gamma x'+\delta y' \tag{29}$$

подставляя въ уравненія (27), найдемъ:

$$A_0x'+A_1y'=0 \quad , \quad B_0x'+B_1y'=0 \tag{30}$$

гдѣ:

$$A_0=a_0\alpha+a_1\gamma \quad , \quad A_1=a_0\beta+a_1\delta \quad , \quad B_0=b_0\alpha+b_1\gamma \quad , \quad B_1=b_0\beta+b_1\delta$$

такъ какъ точки (27) послѣ преобразованія не перестаютъ совпадать, то мы должны имѣть:

$$\begin{vmatrix} A_0 & , & A_1 \\ B_0 & , & B_1 \end{vmatrix}=0$$

или, подставляя вмѣсто A и B ихъ выраженія, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} A_0 & , & A_1 \\ B_0 & , & B_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0\alpha+a_1\gamma & , & a_0\beta+a_1\delta \\ b_0\alpha+b_1\gamma & , & b_0\beta+b_1\delta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha & , & \gamma \\ \beta & , & \delta \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_0 & , & a_1 \\ b_0 & , & b_1 \end{vmatrix} \tag{31}$$

Слѣдовательно функція (28), линейнымъ преобразованіемъ (29), неизмѣнилась, а только пріобрѣла числовой множитель:

$$\begin{vmatrix} \alpha & , & \gamma \\ \beta & , & \delta \end{vmatrix}$$

который называется *модулемъ преобразованія.*

Слѣдовательно (28) есть инваріантъ формъ.

Пр. 3. Двоичная форма второй степени:

$$a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2=0 \tag{32}$$

какъ мы видѣли въ § 172 представляетъ или двѣ точки или двѣ прямыя. Какую внутреннюю зависимость могутъ имѣть точки (32) между собою и только между собою? Очевидно, единственная такая зависимость—это ихъ совпаденіе. Условіе этого совпаденія должно выразится связью между коэфиціентами формы. Эта функція связи не должна зависить отъ положенія основныхъ точекъ, т. е не должна измѣнятся, когда форма будетъ линейно преобразована подстановленіями:

$$x=\alpha x'+\beta y' \quad , \quad y=\gamma x'+\delta y' \tag{33}$$

Мы знаемъ, что точки (32) совпадутъ, когда существуетъ слѣдующая зависимость между коэфиціентами:

$$a_0a_2-a_1^2=0 \tag{34}$$

Мы говоримъ, что это инваріантъ формы (32). Въ самомъ дѣлѣ, подставивъ (33) въ (32), найдемъ:

$$A_0x'^2+2A_1x'y'+A_2y'^2=0 \tag{35}$$

гдѣ:

$$A_0 = a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha\gamma + a_2\gamma^2$$

$$A_1 = a_0\alpha\beta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + a_2\gamma\delta$$

$$A_2 = a_0\beta^2 + 2\,a_1\,\beta\delta + a_2\delta^2$$

Условіе совпаденія точекъ (35) будетъ:

$$A_0A_2 - A^2_1 = \begin{vmatrix} \alpha & , & \gamma \\ \beta & , & \delta \end{vmatrix}^2 (a_0a_2 - a^2_1)$$

Слѣдовательно функція (34) въ линейномъ преобразованіи пріобрѣла только числовой коэфиціентъ. Функція (34) есть единственный инваріантъ формы (32); онъ служитъ основаніемъ всѣхъ изслѣдованій, касающихся формы, во всѣхъ отрасляхъ анализа.

Пр. 4. Двоичныя формы второй степени:

$$a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 = 0 \quad , \quad b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2 = 0 \tag{36}$$

представляютъ четыре точки на одной прямой, или четыре прямыя, проходящія черезъ одну точку. Основныя точки или прямыя суть $x = 0$, $y = 0$. Эти четыре точки могутъ быть сопряженно гармоническими и одна точка одной формы можетъ совпадать съ одною изъ точекъ другой формы. Зависимость между коэфиціентами, существующая въ этихъ случаяхъ, не должна зависить отъ линейнаго преобразованія; слѣдовательно эти функціи коэфиціентовъ будутъ инваріанты формъ (36).

Пусть точки или прямыя формъ будутъ:

$$\begin{aligned} x - \lambda_1 y = 0 \quad &, \quad x - \lambda_3 y = 0 \\ x - \lambda_2 y = 0 \quad &, \quad x - \lambda_4 y = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 суть корни уравненій (36). Если эти уравненія (36) представляютъ гармоническій рядъ или связку, то мы будемъ имѣть (§ 146, 14):

$$\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3\lambda_4 = 0$$

но:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_2}{a_0} \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2a_1}{a_0} \quad , \quad \lambda_3 + \lambda_4 = -\frac{2b_1}{b_0} \quad , \quad \lambda_3\lambda_4 = \frac{b_2}{b_0}$$

подставляя, найдемъ:

$$a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \tag{38}$$

Послѣ линейнаго преобразованія, уравненія (36) сдѣлаются:

$$A_0x'^2 + 2A_1x'y' + A_2y'^2 = 0 \quad , \quad B_0x'^2 + 2B_1x'y' + B_2y'^2 = 0$$

гдѣ A и B будутъ имѣть формы (35) и мы найдемъ:

$$A_0B_2 - 2A_1B_1 + A_2B_0 = \begin{vmatrix} \alpha & , & \gamma \\ \beta & , & \delta \end{vmatrix}^2 (a_0b_2 - 2a_1b_1 + a_2b_0) \tag{39}$$

Слѣдовательно (38) есть инваріантъ формъ (36).

Если одна точка одной изъ формъ (36) совпадаетъ съ одной изъ точекъ или прямыхъ другой формы, то мы должны имѣть, какъ результатъ исключенія $\frac{x}{y}$ слѣдующую зависимость между коэфиціентами формъ:

$$(a_0b_2-a_2b_2)^2 \quad 4(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1)$$

эта зависимость есть инваріантъ, такъ какъ совпаденіе точекъ не зависитъ отъ линейнаго преобразованія.

Уравненіе (§ 178, 35):

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 \tag{40}$$

представляющее двойныя точки или прямыя инволюціоннаго ряда (31, 32) есть, очевидно, коваріантъ.

И въ самомъ дѣлѣ, послѣ преобразованія, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} x'^2 & x'y' & y'^2 \\ A_2 & -A_1 & A_0 \\ B_2 & -B_1 & B_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\ , & \gamma \\ \beta\ , & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ a_2 & -a_1 & a_0 \\ b_2 & -b_1 & b_0 \end{vmatrix} \tag{41}$$

Изъ этого примѣра видимъ, какимъ образомъ, извѣстная связь между точками, прямыми, или вообще кривыми, сопровождается всегда другими функціями тѣсно связанными съ данными. Замѣтимъ еще, что условіе параллельности прямыхъ линій:

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0$$

именно:

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 \tag{42}$$

есть инваріантъ.

Условіе, что три прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ:

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{43}$$

$$a_0x+b_3y+c_3=0$$

именно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_0 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \tag{44}$$

или, что три точки лежатъ на одной прямой линіи, есть инваріантъ.

Условіе (28) § 177, выражающее, что четыре точки представляемыя уравненіемъ 4-ой степени суть гармоническія, есть инваріантъ, также точно какъ и условіе (30) § 177 выражающее, что четыре точки уравненія 4-ой степени эквіангармоничны.

Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы составить ясное понятіе объ инваріантахъ и коваріантахъ и о той роли, которую они должны играть въ анализѣ.

13*

Въ настоящее время существуетъ цѣлый отдѣлъ анализа: теорія формъ, въ которомъ излагаются способы разысканія инваріантовъ формъ, ихъ число, зависимость между ними; это одна изъ самыхъ интересныхъ и трудныхъ частей анализа. Эта часть анализа обязана своимъ возникновеніемъ англійскому математику Булю.

§ 193. Въ этомъ параграфѣ мы укажемъ на нѣкоторые инваріанты или коваріанты, которые имѣютъ каждая форма или система формъ.

Если $f(a_0, a_1, a_2, \ldots; x, y)$ двоичная форма нѣкоторой степени, $\Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ ея инваріантъ, то по свойству инваріанта мы должны имѣть:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, \ldots) = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}^{\lambda} . \Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots) \tag{45}$$

гдѣ $A_0, A_1, A_2, \ldots$ суть значенія коэфиціентовъ $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ въ которые они переходятъ послѣ линейнаго преобразованія:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

Если $\Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots; x, y)$ есть коваріантъ, то мы имѣемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, \ldots; x', y') = \begin{vmatrix} \blacksquare & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}^{\lambda} \Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots; x, y) \tag{46}$$

Если форма $f(a_0, a_1, \ldots; x, y, z)$ будетъ троичная, то линейное преобразованіе будетъ:

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \ , \ y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \ , \ z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' \tag{47}$$

а инваріанты опредѣляются тѣми же уравненіями (45) и (46).

Пусть f_1 и f_2 будутъ двѣ, какія-нибудь, двоичныя формы; мы говоримъ, что опредѣлитель:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} \ , & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \ , & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{48}$$

который называется *функціональнымъ* или *опредѣлителемъ Якоби*, всегда есть инваріантъ или коваріантъ формъ, какія бы эти формы нибыли.

Пусть F_1 и F_2 будутъ формы f_1 и f_2, послѣ линейнаго преобразованія:

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad , \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

Легко видѣть, что:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x'} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f_1}{\partial y} \gamma$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y'} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \beta + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta$$

точно также найдемъ:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f_2}{\partial y} \gamma$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \beta + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta$$

откуда имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x'} , & \frac{\partial F_1}{\partial y'} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x'} , & \frac{\partial F_2}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f_1}{\partial y} \gamma , & \frac{\partial f_1}{\partial x} \beta + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f_2}{\partial y} \gamma , & \frac{\partial f_2}{\partial x} \beta + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta \end{vmatrix}$$

а по правилу перемноженія опредѣлителей, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x'} , & \frac{\partial F_1}{\partial y'} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} , & \frac{\partial F_2}{\partial y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha , & \gamma \\ \beta , & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} , & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} , & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

а это показываетъ, что опредѣлитель Якоби есть инваріантъ или коваріантъ.

Пр. 1. Пусть данныя формы будутъ:

$$f_1 = a_1x + b_1y \quad , \quad f_2 = a_2x + b_2y$$

изъ нихъ имѣемъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = a_1 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = b_1 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = a_2 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = b_2$$

откуда опредѣлитель Якоби будетъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 , & b_1 \\ a_2 , & b_2 \end{vmatrix}$$

который, какъ уже извѣстно, есть инваріантъ:

Пр. 2. Пусть данныя формы будутъ:

$$f_1 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 \quad , \quad f_2 = b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2$$

откуда:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x} = a_0x + a_1y \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial y} = a_1x + a_2y$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x} = b_0x + b_1y \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial y} = b_1x + b_2y$$

Слѣдовательно опредѣлитель Якоби будетъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} , & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} , & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_0x + a_1y \quad , & a_1x + a_2y \\ b_0x + b_1y \quad , & b_1x + b_2y \end{vmatrix} \tag{49}$$

а это коваріантъ формъ, который уже нашли выше (41).

Пр. 3. Легко также показать, что функціональный опредѣлитель трехъ троичныхъ формъ f_1, f_2, f_3 есть также инваріантъ или коваріантъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} , & \frac{\partial f_1}{\partial y} , & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} , & \frac{\partial f_2}{\partial y} , & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} , & \frac{\partial f_3}{\partial y} , & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{50}$$

§ 194. Если f есть двоичная форма, какой бы то нибыло степени, то опредѣлитель:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} , & \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} , & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \tag{51}$$

который называется *Гессевскимъ*, есть инваріантъ или коваріантъ. Если возьмемъ производныя по x и y формы f, то будемъ имѣть двѣ формы, которыхъ опредѣлитель Якоби есть ничто иное какъ Гессевскій опредѣлитель, слѣдовательно (51) есть инваріантъ или коваріантъ формы f.

Пр. 1. Пусть данная форма будетъ:

$$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

то будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a_0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 2a_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a_2$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a_0 , & 2a_1 \\ 2a_1 , & 2a_2 \end{vmatrix} = 4\,(a_0a_2 - a^2_1)$$

инваріантъ, найденный уже выше (34).

Пр. 2. Пусть f будетъ двоичная форма третей степени:

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

то:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,(a_0x + a_1y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 6(a_1x + a_2y) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6\,(a_2x + a_3y)$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} a_0x + a_1y , & a_1x + a_2y \\ a_1x + a_2y , & a_2x + a_3y \end{vmatrix} \tag{52}$$

есть коваріантъ.

§ 195. Если f есть троичная форма, то легко, такимъ же образомъ, показать, что Гессевскій опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} \tag{53}$$

есть инваріантъ или коваріантъ формы.

Пр. 1. Пусть f будетъ троичная форма второй степени:

$$f = a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \tag{54}$$

откуда:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2_1} = 2a_{11} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2a_{12} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 2a_{13}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 2a_{23} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_2} = 2a_{22} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_3} = 2a_{33}$$

Слѣдовательно опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} , & a_{12} , & a_{13} \\ a_{21} , & a_{22} , & a_{23} \\ a_{31} , & a_{32} , & a_{33} \end{vmatrix} \tag{55}$$

есть инваріантъ. Этотъ опредѣлитель, какъ увидимъ ниже, играетъ важную роль въ коническихъ сѣченіяхъ.

§ 196. Есть еще два инваріанта или коваріанта, которые имѣетъ всякая двоичная форма, или формы, какой бы то ни было степени.

Пусть будутъ двѣ двоичныя формы:

$$f_1(a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots; x, y) \quad \text{и} \quad f_2(b_0,\ b_1,\ b_2, \ldots; x, y) \qquad (56)$$

Эти двѣ формы, приравненныя нулю, представляютъ два ряда точекъ на одной прямой линіи или двѣ связки, проходящія черезъ одну точку. Если одна изъ точекъ одной формы совмѣщается съ одной изъ точекъ другой формы, то между коэфиціентами формъ должна существовать извѣстная зависимость, независимо отъ положенія основныхъ точекъ или отъ линейнаго преобразованія. Эту зависимость получаютъ, если между формами (56) исключимъ $\frac{x}{y}$. Результатъ такого исключенія есть функція, цѣлая раціональная, отъ коэфиціентовъ $a_0,\ a_1, \ldots; b_0,\ b_1, \ldots$. Очевидно, это будетъ инваріантъ двухъ формъ.

Пр. 1. Пусть данныя формы будутъ:

$$f_1 = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

$$f_2 = b_0x^2 + 2b_1xy + b_2y^2$$

результатъ исключенія будетъ инваріантъ:

$$(a_0b_2 - a_2b_0)^2 - 4(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) \qquad (57)$$

Пр. 2. Если дана двоичная форма f, то производныя ея будутъ также двоичныя формы:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}$$

Результатъ исключенія $\frac{y}{x}$ изъ этихъ формъ будетъ инваріантъ производныхъ или инваріантъ начальной формы f, который называется *дискриминантомъ* или *призначной*. Пусть двоичная форма будетъ:

$$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(a_0x + a_1y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(a_1x + a_2y)$$

результатъ исключенія x и y будетъ дискриминантъ формы:

$$\begin{vmatrix} a_0 & , & a_1 \\ a_1 & , & a_2 \end{vmatrix} = a_0a_2 - a_1^2$$

какъ уже видѣли выше.

Пр. 3. Если форма троичная:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$$

ея дискриминантъ получится изъ уравненій:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

исключая x_1, x_2, x_3, что дастъ:

$$\Delta - \begin{vmatrix} a_{11} \ , & a_{22} \ , & a_{13} \\ a_{21} \ , & a_{22} \ , & a_{23} \\ a_{31} \ , & a_{32} \ , & a_{33} \end{vmatrix}$$

инваріантъ уже выше найденный (55).

Пр. 4. Дискриминантъ формы:

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

получится изъ уравненій:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3(ax^2 + 2bxy + cy^2) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(bx^2 + 2cxy + dy^2) = 0$$

исключеніе x, y даетъ дискриминантъ двоичной формы третей степени:

$$\begin{vmatrix} a \ , & 2b \ , & c \ , & 0 \\ 0 \ , & a \ , & 2b \ , & c \\ b \ , & 2c \ , & d \ , & 0 \\ 0 \ , & b \ , & 2c \ , & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) \qquad (58)$$

Дискриминантъ есть условіе, что форма имѣетъ равные корни. Замѣтимъ, что инваріантъ или коваріантъ коваріанта формы или формъ есть инваріантъ или коваріантъ начальной формы или формъ.

§ 197. Теперь остается сказать нѣсколько словъ о числѣ инваріантовъ двоичныхъ формъ. Мы уже выше сказали, что двоичная форма первой степени $a_0x + a_1y$ не имѣетъ инваріанта, такъ какъ она представляетъ или одну точку или одну прямую.

Форма втораго порядка:

$$f = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2 \qquad (59)$$

имѣетъ только одинъ инваріантъ—это дискриминантъ:

$$I_{2,2} = a_0a_2 - a^2_1 \qquad (60)$$

Форма третьяго порядка:

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 \qquad (61)$$

имѣетъ также только одинъ инваріантъ—дискриминантъ (58):

$$I_{3,4}=(a_0a_3-a_1a_2)^2-4(a_0a_2-a^2_1)(a_1a_3-a^2_2) \qquad (62)$$

Что эти двѣ формы имѣютъ по одному инваріанту, это легко показать слѣдующимъ образомъ. Преобразуемъ формы (59) и (61) подстановленіемъ:

$$x=\alpha x'+\beta y' \quad , \quad y=\gamma x'+\delta y'$$

Эти формы сдѣлаются:

$$F=A_0x'^2+2A_1x'y'+A_2y'^2$$

$$F=A_0x'^3+3A_1x'^2y'+3A_2x'y'^2+A_3y'^3$$

такъ какъ въ коэфиціенты A_0, A_1,... входятъ четыре совершенно произвольныя величины α, β, γ, δ, то формы f можно преобразовать въ совершенно произвольныя формы F, для этого надобно опредѣлить четыре величины α, β, γ, δ, въ первомъ случаѣ изъ трехъ уравненій, а во второмъ изъ четырехъ. Слѣдовательно коэфиціенты A_0, A_1,.... могутъ быть выбраны совершенно произвольно, т. е. не существуетъ никакой зависимости между коэфиціентами начальныхъ формъ и коэфиціентами преобразованныхъ.

Положимъ теперь, что наши формы имѣютъ по два инваріанта φ_1 и φ_2, слѣдовательно имѣемъ, по свойству инваріантовъ:

$$\varphi_1(A_0, A_1, A_2)=\rho^\lambda\varphi_1(a_0, a_1, a_2)$$

$$\varphi_2(A_0, A_1, A_2)=\rho^\mu\varphi_2(a_0, a_1, a_2)$$

для формы втораго порядка (59), и

$$\varphi_1(A_0, A_1, A_2, A_3)=\rho^\lambda\varphi_1(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

$$\varphi_2(A_0, A_1, A_2, A_3)=\rho^\mu\varphi_2(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

для формы третьяго порядка (61).

Возвысимъ первыя изъ этихъ уравненій въ степень μ, а вторыя въ степень λ и раздѣляя результаты, найдемъ:

$$\Phi(A_0, A_1, A_2)=\Phi(a_0, a_1, a_2)$$

$$\Phi(A_0, A_1, A_2, A_3)=\Phi(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

т. е. мы бы имѣли зависимость между совершенно произвольными коэфиціентами a_0, a_1, a_2,... и A_0, A_1, A_2... .

Форма четвертаго порядка имѣетъ пять коэфиціентовъ, слѣдовательно, исключая четыре величины α, β, γ, δ изъ пяти уравненій, мы найдемъ зависимость между a и A такого рода:

$$\Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \Phi_1(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4) \qquad (63)$$

слѣдовательно форма четвертаго порядка должна имѣть два основные инваріанта. Форма пятаго порядка имѣетъ ихъ три, а форма шестаго порядка— четыре. Всякая форма имѣетъ безчисленное множество инваріантовъ, но всѣ они суть функціи основныхъ. Такъ напр. всякая степень инваріанта $a_0a_2 - a^2_1$ есть инваріантъ формы втораго порядка. Инваріанты свойства (63) называются *абсолютными инваріантами* формы, такъ какъ эти функціи вовсе неизмѣняются линейнымъ преобразованіемъ.

ГЛАВА XIV.

Кривыя втораго порядка и втораго класса.

§ 198. Въ началѣ настоящаго сочиненія мы уже познакомились съ четырьмя кривыми: кругомъ, эллипсомъ, гиперболой и параболой. Всѣ эти кривыя выражаются уравненіями второй степени и были уже извѣстны древнимъ геометрамъ; кривыя эти носили у нихъ названіе *коническихъ сѣченій*, такъ какъ всѣ онѣ получаются пересѣченіемъ конуса плоскостью въ извѣстномъ направленіи. Въ настоящей главѣ мы изслѣдуемъ геометрическія мѣста, представляемыя общимъ уравненіемъ второй степени между координатами, и покажемъ, что такимъ уравненіемъ выражаются только четыре коническія сѣченія, названныя выше, кругъ, эллипсъ, гипербола, парабола, и двѣ прямыя.

Самое общее уравненіе второй степени между двумя перемѣнными координатами имѣетъ форму:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

Это уравненіе, какъ видимъ, содержитъ шесть числовыхъ коэфиціентовъ, отъ которыхъ зависитъ, какъ ниже увидимъ, родъ коническаго сѣченія. Такъ какъ на одинъ изъ коэфиціентовъ можно всѣ члены, или лучше сказать всѣ коэфиціенты, раздѣлить, то числовыхъ коэфиціентовъ будетъ только пять. Слѣдовательно одинъ изъ коэфиціентовъ въ уравненіи (1), не нарушая общности, можетъ быть сдѣланъ равнымъ единицѣ.

§ 199. Чтобы наши изслѣдованія были самаго общаго характера, мы отнесемъ положеніе кривой къ координатному треугольнику, котораго уравненія сторонъ, въ декартовыхъ координатахъ, пусть будутъ:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Трилинейныя координаты, какой-нибудь, точки x_1, x_2, x_3, будутъ (§ 182):

$$\begin{aligned} \rho x_1 = a_1x + b_1y + c_1 \\ \rho x_2 = a_2x + b_2y + c_2 \\ \rho x_3 = a_3a + b_3y + c_3 \end{aligned} \tag{3}$$

а декартовы, выраженныя въ трилинейныхъ, будутъ (§ 182):

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3}, \quad y = \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3}{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3} \tag{4}$$

Значеніе коэфиціентовъ A, B, C извѣстно (§ 181):

Если эти выраженія для x и y подставимъ въ уравненіе (1) то оно послѣ всѣхъ приведеній получитъ слѣдующую однородную форму:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \tag{5}$$

Дальнѣйшія изслѣдованія покажутъ выгоду писать коэфиціенты въ уравненіи съ *двойными индексами*. Правило для нихъ есть слѣдующее: коэфиціентъ у $x_i x_k$ всегда $a_{i,k}$.

Прежде чѣмъ приступимъ къ изслѣдованію свойствъ коническихъ сѣченій покажемъ нѣкоторыя замѣчательныя свойства функціи (5) или троичной формы втораго порядка (§ 190). Функцію (5) можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{aligned} f = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\,x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\,x_2 + \\ + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)\,x_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Если теперь замѣтимъ, что:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{7}$$

$(a_{i,k}=a_{k\,i})$, то уравненіе (5) или (6) приметъ форму:

$$2f=x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}=0 \qquad (8)$$

Мы увидимъ ниже, что всѣ изслѣдованія свойствъ кривыхъ втораго порядка, основаны на различныхъ значеніяхъ, которыя можно придавать формѣ (8).

Функція (5) можетъ быть написана въ слѣдующей простой символической формѣ:

$$f=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2 \qquad (9)$$

если условимся, послѣ возвышенія въ степень, замѣщать коэфиціентъ $a_k a_i$ черезъ $a_{k,i}$; такъ, напримѣръ, $a^2_1=a_1a_1$ замѣщается черезъ a_{11}, a_1a_2 замѣщается черезъ a_{12} и т. д.

Замѣтимъ еще одно изъ весьма важныхъ свойствъ выраженія (9). Это свойство заключается въ слѣдующемъ:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial x_3} \qquad (10)$$

т. е. что эта функція не измѣняется, замѣняя однѣ перемѣнныя x_1, x_2, x_3 другими y_1, y_2, y_3. Это свойство легко провѣрить подстановленіемъ въ (10) выраженій (7) вмѣсто:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

§ 200. Если въ тождествахъ (7) положимъ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=\sigma\xi_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}=\sigma\xi_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}=\sigma\xi_3 \qquad (11)$$

то онѣ сдѣлаются:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=\sigma\xi_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=\sigma\xi_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{23}x_3&=\sigma\xi_3 \end{aligned} \qquad (12)$$

откуда, рѣшая эти уравненія относительно x, найдемъ:

$$\begin{aligned} A_{11}\xi_1+A_{21}\xi_2+A_{31}\xi_3&=\rho x_1\\ A_{12}\xi_1+A_{22}\xi_2+A_{32}\xi_3&=\rho x_2\\ A_{13}\xi_1+A_{03}\xi_2+A_{33}\xi_3&=\rho x_3 \end{aligned} \qquad (13)$$

Если первое изъ уравненій (12) помножимъ на x_1, второе на x_2, третее на x_3 и сложимъ, то будемъ имѣть:

$$f(x) = \sigma(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \tag{14}$$

Помножимъ точно также первое изъ уравненій (13) на ξ_1, второе на ξ_2, третее на ξ_3 и складывая, найдемъ ($A_{i,k} = A_{k,i}$):

$$A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 =$$

$$= \rho(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \tag{15}$$

Означая первую часть этого уравненія черезъ $f'(\xi)$, найдемъ:

$$f'(\xi) = \rho(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \tag{16}$$

Изъ уравненій (14) и (16), найдемъ:

$$f(x) = \frac{\sigma}{\rho} f'(\xi) \tag{17}$$

Изъ уравненій (13) и (15), имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \xi_1} = \rho x_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \xi_2} = \rho x_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \xi_2} = \rho x_3 \tag{18}$$

Изъ выраженій (11) и (18) видимъ, что функціи $f(x)$ и $f'(\xi)$ переходятъ одна въ другую подстановленіями совершенно подобными, поэтому онѣ называются *взаимными функціями*.

Если къ уравненіямъ (12) присовокупимъ уравненіе (8), которое въ силу положеній (11) можно написать въ формѣ:

$$\sigma\xi_1 x_1 + \sigma\xi_2 x_2 + \sigma\xi_3 x_3 = f(x) \tag{19}$$

то изъ четырехъ уравненій (12) и (19), исключая x_1, x_2, x_3, 1, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -\sigma\xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -\sigma\xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -\sigma\xi_3 \\ \sigma\xi_1 & \sigma\xi_2 & \sigma\xi_3 & -f(x) \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

или:

$$\Delta f(x) + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sigma\xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sigma\xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sigma\xi_3 \\ \sigma\xi_1 & \sigma\xi_2 & \sigma\xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

откуда:

$$f(x) = -\frac{\sigma^2}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

гдѣ Δ есть извѣстный опредѣлитель или инваріантъ функціи (5) § 195, 55.

Если къ уравненіямъ (13) присовокупимъ уравненіе:

$$2f'(\xi) = \xi_1 \frac{\partial f'}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial f'}{\partial \xi_2} + \xi_2 \frac{\partial f'}{\partial \xi_3} \tag{22}$$

которое въ силу положеній (18) можно написать въ формѣ:

$$\rho x_1 \xi_1 + \rho x_2 \xi_2 + \rho x_3 \xi_3 = f'(\xi) \tag{23}$$

то изъ четырехъ уравненій (13) и (22) найдемъ, какъ выше:

$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & -\rho x_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & -\rho x_2 \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & -\rho x_3 \\ \rho x_1, & \rho x_2, & \rho x_3, & -f'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

откуда:

$$f'(\xi) = -\frac{\rho^2}{\Delta'} \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, & x_1 \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, & x_2 \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, & x_3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & 0 \end{vmatrix} \tag{24}$$

гдѣ Δ' есть взаимный опредѣлитель опредѣлителя Δ и связанъ съ нимъ зависимостью $\Delta' = \Delta^2$.

Элементы опредѣлителя:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11} , & A_{12} , & A_{13} \\ A_{21} , & A_{22} , & A_{23} \\ A_{31} , & A_{32} , & A_{33} \end{vmatrix} \tag{25}$$

выражаются въ элементахъ опредѣлителя Δ, слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{ll} A_{11} = a_{22}a_{33} - a^2_{23} & A_{23} = A_{32} = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \\ A_{22} = a_{11}a_{33} - a^2_{13} & A_{13} = A_{31} = a_{12}a_{13} - a_{22}a_{13} \\ A_{33} = a_{11}a_{22} - a^2_{12} & A_{12} = A_{21} = a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12} \end{array} \tag{26}$$

Если коэфиціенты пропорціональности σ и ρ въ уравненіяхъ (21) и (24), внесемъ въ перемѣнныя, то найдемъ:

$$f(x) = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} , \quad f'(\xi) = -\frac{1}{\Delta'}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{27}$$

Изъ этихъ выраженій ясно видна взаимность между функціями f и f'.

§ 201. Если положимъ:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1} = \sigma\eta_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2} = \sigma\eta_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3} = \sigma\eta_3 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_1} = \sigma\zeta_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_2} = \sigma\zeta_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_3} = \sigma\zeta_3 \end{array} \tag{28}$$

и соотвѣтственно:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_1} = \rho y_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_2} = \rho y_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_3} = \rho y_3 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \zeta_1} = \rho z_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \zeta_2} = \rho z_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \zeta_3} = \rho z_3 \end{array} \tag{29}$$

то легко найти, исходя изъ выраженія:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}$$

что:

$$\rho\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)=\sigma\left(\zeta_1\frac{\partial f'}{\partial \eta_1}+\zeta_2\frac{\partial f'}{\partial \eta_2}+\zeta_3\frac{\partial f}{\partial \eta_3}\right) \quad (30)$$

или, внося коэфиціенты пропорціональности ρ и σ въ перемѣнныя:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=\zeta_1\frac{\partial f'}{\partial \eta_1}+\zeta_2\frac{\partial f'}{\partial \eta_2}+\zeta_3\frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \quad (30')$$

§ 202. Мы видѣли, что уравненіе второй степени (5) заключаетъ пять числовыхъ коэфиціентовъ, относительно которыхъ уравненіе имѣетъ линейную форму, слѣдовательно, если будетъ дана точка координатами, черезъ которую должна проходить кривая (5), то эти координаты должны удовлетворять уравненіе (5), подставивъ ихъ въ это уравненіе мы будемъ имѣть одно линейное уравненіе между пятью коэфиціентами. Если кривая должна проходить, напримѣръ, черезъ точку $y_1\, y_2\, y_3$, то мы должны имѣть:

$$f(y_1y_2y_3)=a_{11}y^2_1+a_{22}y^2_2+a_{33}y^2_3+2a_{12}y_1y_2+2a_{13}y_1y_3+2a_{23}y_2y_3=0 \quad (31)$$

Слѣдовательно, если даны пять точекъ, черезъ которыя должна проходить кривая, то мы будемъ имѣть пять линейныхъ уравненій, подобныхъ уравненію (1), изъ которыхъ можно опредѣлить всѣ пять коэфиціентовъ. Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Черезъ пять, произвольно выбранныхъ, точѐкъ въ одной плоскости можно провести *одну только* кривую втораго порядка и эта кривая пятью точками вполнѣ опредѣляется во всѣхъ ея частяхъ.

Кривую втораго порядка или степени мы будемъ всегда называть ***коническимъ сѣченіемъ.***

§ 203. Пять точекъ, опредѣляющія коническое сѣченіе, могутъ быть такъ сгруппированы, что кривая будетъ состоять изъ пары прямыхъ линій.

Чтобы это показать, пусть пять точекъ, опредѣляющія коническое сѣченіе, будутъ:

$$(y_1\ y_2\ y_3)\ ,\ (z_1\ z_2\ z_3)\ ,\ (u_1\ u_2\ u_3)\ ,\ (v_1\ v_2\ v_3)\ ,\ (w_1\ w_2\ w_3) \quad (32)$$

такъ какъ черезъ эти точки должно проходить коническое сѣченіе, то эти координаты должны удовлетворять уравненію (5), слѣдовательно подстановленіе ихъ въ это уравненіе даетъ пять уравненій подобныхъ урав-

ненію (31). Исключая изъ этихъ пяти уравненій и шестаго (5) коэфиціенты $a_{i,k}$, найдемъ уравненіе кривой въ формѣ опредѣлителя:

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = \begin{vmatrix} x^2_1 & x^2_2 & x^2_3 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ y^2_1 & y^2_2 & y^2_3 & y_1y_2 & y_1y_3 & y_2y_3 \\ z^2_1 & z^2_2 & z^2_3 & z_1z_2 & z_1z_3 & z_2z_3 \\ u^2_1 & u^2_2 & u^2_3 & u_1u_3 & u_1u_3 & u_2u_3 \\ v^2_1 & v^2_2 & v^2_3 & v_1v_2 & v_1v_3 & v_2v_3 \\ w^2_1 & w^2_2 & w^2_3 & w_1w_2 & w_1w_3 & w_2w_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (33)$$

Легко видѣть, что этотъ опредѣлитель обращается въ нуль, если перемѣнныя координаты $x_1\ x_2\ x_3$ равны координатамъ одной изъ пяти данныхъ точекъ.

Пусть послѣднія три изъ пяти данныхъ точекъ (32) будутъ находится на одной прямой линіи, коей уравненіе есть:

$$U = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

такъ какъ точки $(u_1\ u_2\ u_3)$, $(v_1\ v_2\ v_3)$, $(w_1\ w_2\ w_3)$ находятся, по условію, на этой прямой, то мы должны имѣть:

$$U_3 = au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad , \quad U_4 = av_1 + bv_2 + cv_3 = 0,$$

$$U_5 = aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0 \qquad (34)$$

Умножимъ первую колонну опредѣлителя (33) на a придадимъ къ ней четвертую и пятую колонны, умноживъ сначала первую изъ нихъ на b, а вторую на c. Означимъ сверхъ того:

$$ay_1 + by_2 + cz_3 = U_1 \ ; \ az_1 + bz_2 + cz_3 = U_2$$

Такая операція даетъ слѣдующее:

$$af(x_1\, y_1\, z_1) = \begin{vmatrix} x_1U & x^2_2 & x^2_3 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ y_1U_1 & y^2_2 & y^2_3 & y_1y_2 & y_1y_3 & y_2y_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1U_1 & w^2_2 & w^2_3 & w_1w_2 & w_1w_3 & w_2w_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (35)$$

Въ этомъ послѣднемъ опредѣлителѣ умножимъ вторую колонну на b и придадимъ къ ней послѣднюю и четвертую, умноживъ сначала первую

на c, а вторую на a. Наконецъ умножимъ третью колонну на c и придадимъ къ ней предпослѣднюю и четвертую, умноживъ сначала первую на a, а вторую на b. Такимъ образомъ получимъ опредѣлитель:

$$abc\,f(x_1\,x_2\,x_3) = \begin{vmatrix} x_1 U & x_2 U & x_3 U & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ y_1 U_1 & y_2 U_1 & y_3 U_1 & y_1y_2 & y_1y_3 & y_2y_3 \\ z_1 U_2 & z_2 U_2 & z_3 U_2 & z_1z_2 & z_1z_3 & z_2z_3 \\ u_1 U_3 & u_2 U_3 & u_3 U_3 & u_1u_2 & u_1u_3 & u_2u_3 \\ v_1 U_4 & v_2 U_4 & v_3 U_4 & v_1v_2 & v_1v_3 & v_2v_3 \\ w_1 U_5 & w_2 U_5 & w_3 U_5 & w_1w_2 & w_1w_3 & w_2w_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (36)$$

Этотъ опредѣлитель раздѣленъ на четыре квадрата и такъ какъ, по условію, три данныя точки лежатъ на прямой $U=0$, то мы имѣемъ $U_3=0$, $U_4=0$, $U_5=0$, слѣдовательно всѣ элементы, внизу на лѣво стоящаго квадрата, равны нулю; а потому, по свойству опредѣлителей, опредѣлитель (36) распадается на произведеніе:

$$abcf(x_1\,x_2 x_3) = \begin{vmatrix} x_1 U & x_2 U & x_3 U \\ y_1 U_1 & y_2 U_1 & y_3 U_1 \\ z_1 U_2 & z_2 U_2 & z_3 U_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1u_2 & u_1u_3 & u_3u_3 \\ v_1v_2 & v_1v_3 & v_2v_3 \\ w_1w_2 & w_1w_3 & w_2w_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (37)$$

или:

$$abc\,f(x_1 x_2 x_3) = UU_1\,U_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1u_2 & u_1u_3 & u_2u_3 \\ v_1v_2 & v_1v_3 & v_2v_3 \\ w_1w_2 & w_1w_3 & w_2w_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (38)$$

Изъ этого послѣдняго уравненія видимъ, что $f(x_1\,x_2 x_2)=0$ распадается на два линейные множителя:

$$U = ax_1 + bx_3 + cx_3 = 0 \;,\; \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Изъ коихъ первый есть прямая, на которой находятся три точки $(u_1\;u_2\;u_3)$, $(v_1\;v_2\;v_3)$, $(w_1\;w_2\;w_3)$, а второй есть прямая, проходящая черезъ остальныя двѣ точки $(y_1\;y_2\;y_3)$ и $(z_1\;z_1\;z_3)$. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если изъ пяти данныхъ точекъ, опредѣляющихъ коническое сѣченіе, три лежатъ на одной прямой линіи, то коническое сѣ-

ченіе обращается въ пару прямыхъ линій. Какимъ же условіемъ связаны коэфиціенты уравненія (5), когда оно распадается на два линейные, раціональные, множителя?

Если уравненіе (5) распадается на два линейные множителя, то его форма будетъ:

$$f = u.v$$

гдѣ u и v суть линейныя функціи относительно перемѣнныхъ x_1 x_2 x_3.

Изъ этого уравненія имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = u\frac{\partial v}{\partial x_1} + v\frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = u\frac{\partial v}{\partial x_2} + v\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = u\frac{\partial v}{\partial x_3} + v\frac{\partial u}{\partial x_3}$$

Если въ эти уравненія подставимъ координаты точки пересѣченія прямыхъ:

$$u = 0 \quad \text{и} \quad v = 0$$

то будемъ имѣть:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

Если изъ этихъ уравненій исключимъ x_1 x_2 x_3, то найдемъ слѣдующую зависимость между коэфиціентами уравненія (5):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (39)$$

для симметріи мы писали вмѣсто $a_{k,i}$, $a_{i,k}$ и впредь будемъ предполагать, что $a_{k,i} = a_{i,k}$.

§ 204. Двѣ кривыя линіи, выраженныя уравненіями въ декартовыхъ координатахъ пересѣкаются въ тѣхъ точкахъ, коихъ координаты удовлетворяютъ оба уравненія. Слѣдовательно число точекъ пересѣченія кривыхъ линій будетъ равно числу паръ координатъ, удовлетворяющихъ оба уравненія кривыхъ. Если одна изъ кривыхъ есть коническое сѣченіе, а другая есть прямая линія, то опредѣливъ изъ послѣдняго y, если подставимъ въ уравненіе коническаго сѣченія, то получимъ квадратное урав-

неніе относительно x. Двумъ корнямъ x_1, x_2 этаго уравненія будутъ соотвѣтствовать двѣ ординаты y_1 и y_2, слѣдовательно прямая линія пересѣкаетъ коническое сѣченіе въ двухъ точкахъ.

Легко найти уравненія этихъ точекъ. Пусть:

$$f(x_1\ x_2\ x_3) = 0 \quad , \quad ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \tag{40}$$

будутъ уравненія коническаго сѣченія и прямой. Если означимъ черезъ $y_1\ y_2\ y_3$ координаты одной изъ точекъ пересѣченія коническаго сѣченія съ прямою, то уравненіе этой точки будетъ:

$$y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 = 0 \tag{41}$$

Такъ какъ координаты $(y_1\ y_2\ y_3)$ должны удовлетворять уравненія (40) и (41), то исключая эти величины изъ уравненій (40) и (41), найдемъ:

$$f(b\xi_3 - c\xi_2\ ,\ c\xi_1 - a\xi_3\ ,\ a\xi_2 - b\xi_1) = 0 \tag{42}$$

Это уравненіе представляетъ пару точекъ, такъ какъ легко видѣть съ помощью критеріума (39), что оно распадается на два линейные множителя относительно линейныхъ координатъ $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$.

§ 205. Остается рѣшить вопросъ относительно числа точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій.

Пусть уравненія коническихъ сѣченій въ трилинейныхъ координатахъ будутъ:

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ f_1 &= b_{11}x^2_1 + b_{22}x^2_2 + b_{33}x^2_3 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$f = a_0x^2_3 + a_1x_3 + a_2 = 0$$

$$f_1 = b_0x^2_3 + b_1x_3 + b_2 = 0$$

гдѣ a_0 и b_0 не заключаютъ ни x_1 ни x_2, a_1 и b_1 суть функціи первой степени относительно x_1 и x_2, a_2 и b_2 суть функціи второй степени относительно тѣхъ-же перемѣнныхъ.

Если изъ этихъ уравненій опредѣлимъ x^2_3 и x_3, то найдемъ:

$$x^2_3 = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_0b_1 - a_1b_0} \qquad x_3 = \frac{b_0a_2 - a_0b_2}{a_0b_1 - a_1b_0}$$

откуда:

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_0b_1 - a_1b_0} = \left(\frac{a_0b_2 - a_2b_0}{a_0b_1 - a_1b_0}\right)^2$$

или:

$$(a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 \tag{44}$$

уравненіе, очевидно, однородное четвертой степени относительно x_1 и x_2, слѣдовательно разлагается на четыре линейные множителя:

$$x_1 - \alpha_1 x_2 = 0 \quad , \quad x_1 - \alpha_2 x_2 = 0 \quad , \quad x_1 - \alpha_3 x_2 = 0 \quad , \quad x_1 - \alpha_4 x_2 = 0$$

которые представляютъ прямыя, соединяющія вершину $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ координатнаго треугольника съ точками пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій. Отвуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе: два коническія сѣченія пересѣкаются всегда въ четырехъ точкахъ.

§ 206. Четыре данныя точки не вполнѣ опредѣляютъ коническое сѣченіе. Возьмемъ два коническихъ сѣченія:

$$f_1(x_1x_2x_3) = 0 \quad , \quad f_2(x_1x_2x_3) = 0 \tag{45}$$

которыя, какъ мы выше видѣли, пересѣкаются въ четырехъ точкахъ. Если возьмемъ уравненіе:

$$f_1(x_1x_2x_3) - \lambda f_2(x_1x_2x_3) = 0 \tag{46}$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэфиціентъ, то это уравненіе представляетъ цѣлый рядъ коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре точки пересѣченія кривыхъ (45), такъ какъ координаты этихъ четырехъ точекъ, удовлетворяя уравненія (45) удовлетворяютъ и уравненіе (46). Давая коэфиціенту λ всевозможныя значенія, мы получимъ цѣлый рядъ коническихъ сѣченій, который мы будемъ называть *связкой коническихъ сѣченій*, проходящихъ черезъ четыре точки, подобно тому, какъ мы назвали связкой прямыхъ, прямыя проходящія черезъ одну точку.

Легко видѣть изъ уравненія (46), что черезъ каждую, произвольно взятую, точку на плоскости проходитъ одно изъ коническихъ сѣченій связки (46). Въ самомъ дѣлѣ, пусть $y_1\ y_2\ y_3$ будетъ, какая-нибудь, произвольно взятая точка. Если коническое сѣченіе (46) должно проходить черезъ эту точку, то ея координаты должны удовлетворять уравненію (46), слѣдовательно найдемъ:

$$f_1(y_1y_2y_3) - \lambda f_2(y_1y_2y_3) = 0$$

откуда:

$$\lambda = \frac{f_1(y_1y_2y_3)}{f_2(y_1y_2y_3)}$$

подставляя въ (46), найдемъ:

$$f_2(y_1y_2y_3)\,f_1(x_1x_2x_3) - f_1(y_1y_2y_3)\,f_2(x_1x_2x_3) = 0$$

уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ четыре точки пересѣченія $f_1=0$ и $f_2=0$ и черезъ пятую точку $(y_1y_2y_3)$.

Пересѣченіе коническаго сѣченія съ прямою. Поляры и касательныя.

§ 207. Первая задача, рѣшеніе которой служитъ ключемъ къ изслѣдованію свойствъ коническихъ сѣченій или кривыхъ, есть слѣдующая, которую мы уже рѣшили въ § 204, а здѣсь мы ее изслѣдуемъ подробно.

Задача. Опредѣлить точки пересѣченія коническаго сѣченія съ прямою, проходящею черезъ двѣ данныя точки $(y_1y_2y_3)$, $(z_1z_2z_3)$?

Рѣшеніе. Координаты, какой-нибудь, точки на прямой, проходящей черезъ точки $(y_1y_2y_3)$, $(z_1z_2z_3)$ выражаются уравненіями (§ 187, 17):

$$\rho x_1 = y_1 + \lambda z_1 \quad , \quad \rho x_2 = y_2 + \lambda z_2 \quad , \quad \rho x_3 = y_3 + \lambda z_3 \tag{47}$$

Если $x_1x_2x_3$ суть координаты точекъ пересѣченія прямой (47) съ коническимъ сѣченіемъ:

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = 0 \tag{48}$$

то онѣ должны удовлетворять уравненіе (48), слѣдовательно мы должны имѣть:

$$\{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \lambda(a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3)\}^2 = 0 \tag{49}$$

или:

$$(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3)^2 + 2\lambda(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3)(a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3) +$$

$$+ \lambda^2(a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3)^2 = 0$$

или:

$$R\lambda^2 + 2Q\lambda + P = 0 \tag{50}$$

гдѣ:

$$R = (a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3)^2 \quad , \quad P = (a_1y_1 + a_2y_2 + a_2y_3)^2$$

$$Q = (a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3)(a_1z_1 + a_2z_2 + a_0z_3)$$

Если развернемъ эти уравненія съ условіями сказанными въ § 199, то

найдемъ, что R и P суть ничто иное какъ уравненіе коническаго сѣченія, въ которое подставлены координаты $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$, а:

$$Q=\frac{1}{2}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \text{ или } Q=\frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right) \quad (51)$$

Если рѣшимъ уравненіе (50), найдемъ для λ двѣ величины:

$$\lambda_1=\frac{-Q+\sqrt{Q^2-PR}}{R} \quad , \quad \lambda_2=\frac{-Q-\sqrt{Q^2-PR}}{R} \quad (52)$$

Слѣдовательно прямая, проходящая черезъ точки $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$, пересѣкаетъ коническое сѣченіе въ двухъ точкахъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, коихъ выраженія получатся изъ (47), подставляя вмѣсто λ его значенія (52):

$$\begin{aligned}
\rho x_1&=Ry_1-(Q-\sqrt{Q^2-RP})z_1 \quad , \quad \rho x'_1=Ry_1-(Q+\sqrt{Q^2-RP})z_1 \\
\rho x_2&=Ry_2-(Q-\sqrt{Q^2-RP})z_2 \quad , \quad \rho x'_2=Ry_2-(Q+\sqrt{Q^2-RP})z_2 \quad (53) \\
\rho x_3&=Ry_3-(Q-\sqrt{Q^2-RP})z_3 \quad , \quad \rho x'_3=Ry_3-(Q+\sqrt{Q^2-RP})z_3
\end{aligned}$$

гдѣ общій знаменатель R внесенъ въ коэфиціентъ пропорціональности ρ.

Такимъ образомъ на данной прямой мы будемъ имѣть четыре точки: $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ и двѣ точки данныя предъидущими выраженіями, т. е. точки пересѣченія коническаго сѣченія съ прямою.

Ангармоническое отношеніе этихъ четырехъ точекъ будетъ или $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, если ихъ означимъ черезъ α_1 и α_2, т. е.:

$$\alpha_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \quad \alpha_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

откуда:

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{\lambda^2_1+\lambda^2_2}{\lambda_1\lambda_2} \quad , \quad \alpha_1\alpha_2=1$$

Такъ какъ λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (50), то имѣемъ:

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{2Q}{R} \quad , \quad \lambda_1\lambda_2=\frac{P}{R}$$

слѣдовательно:

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{4Q^2-2PR}{PR}$$

Имѣя сумму количествъ α_1 и α_2 и ихъ произведеніе составимъ квадратное уравненіе, коего количества эти суть корни, именно:

$$\alpha^2 - \frac{4Q^2 - 2PR}{PR}\alpha + 1 = 0$$

или:

$$(1+\alpha)^2\ PR - 4Q^2\alpha = 0 \tag{54}$$

корни этого уравненія дадутъ непосредственно ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ $(y_1y_2y_3)$, $(z_1z_2z_3)$ и точекъ (53).

§ 208. Если въ уравненіи (54) мы фиксируемъ одну изъ точекъ, напримѣръ $(y_1y_2y_3)$, дадимъ опредѣленное числовое значеніе ангармоническому отношенію α и будемъ вращать сѣкущую, выбирая на ней, во всѣхъ ея положеніяхъ, такую точку $(z_1z_2z_3)$, чтобы она удовлетворяла уравненію (54), то мы получимъ геометрическое мѣсто точекъ, коихъ ангармоническое отношеніе съ точкою $(y_1y_2y_3)$ и двумя точками пересѣченія сѣкущихъ съ коническимъ сѣченіемъ (48), имѣетъ данное опредѣленное числовое значеніе. Такъ какъ уравненіе (54), относительно $z_1z_2z_3$ второй степени, то это геометрическое мѣсто есть также *коническое сѣченіе.*

Давая α различныя значенія получимъ систему коническихъ сѣченій относительно точки $(y_1y_2y_3)$. Измѣняя положеніе точки $(y_1y_2y_3)$ на плоскости получимъ такую-же систему коническихъ сѣченій для каждой точки плоскости.

Особеннаго вниманія заслуживаютъ, относительно каждой точки плоскости, тѣ изъ системы коническихъ сѣченій, для которыхъ ангармоническое отношеніе $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$.

1. Положимъ $\alpha = 1$, то уравненіе (54) сдѣлается:

$$PR - Q^2 = 0 \tag{55}$$

Разсматривая выраженія (53) мы видимъ, что при условіи (55) точки пересѣченія прямой съ коническимъ сѣченіемъ совпадаютъ, т. е. прямая проходящая черезъ точки $(y_1y_2y_3)$ и $(z_1z_2z_3)$ касается коническаго сѣченія. Слѣдовательно точка $(z_1z_2z_3)$ можетъ находится только на этой прямой. И дѣйствительно, если къ уравненію (55) приложимъ критеріумъ § 203, 39, то увидимъ, что это уравненіе, второй степени относительно $z_1z_2z_3$, разлагается на два линейные множителя, т. е. представляетъ тотъ случай, въ которомъ коническое сѣченіе распадается на два линейные множителя (§ 203). Слѣдовательно уравненіе (55) представляетъ двѣ касательныя, проведенныя къ коническому сѣченію черезъ точку $(y_1y_2y_3)$. Ниже мы еще возвратимся къ этому уравненію.

2. Несравненно важнѣе, для изслѣдованія свойствъ коническаго сѣченія, тотъ случай, въ которомъ $\alpha = -1$.

Если $\alpha = -1$, то уравненіе (55) дѣлается:

$$Q^2 = 0 \quad \text{или} \quad Q = 0 \tag{56}$$

т. е.

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad \text{или} \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0 \tag{57}$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ $(z_1 z_2 z_3)$ есть прямая линія, такъ какъ уравненіе (57) есть линейная функція относительно перемѣнныхъ $z_1 z_2 z_3$. Но при $\alpha = -1$ четыре точки $(y_1 y_2 y_3)$, $(z_1 z_2 z_3)$ и двѣ точки пересѣченія прямой, проходящей черезъ точку $(y_1 y_2 y_3)$, съ коническимъ сѣченіемъ, суть гармоническія. Слѣдовательно прямая (57) есть геометрическое мѣсто гармоническихъ точекъ къ тремъ точкамъ: $(y_1 y_2 y_3)$ и къ двумъ точкамъ пересѣченія прямой, проходящей черезъ точку $(y_1 y_2 y_3)$, съ коническимъ сѣченіемъ.

Эта прямая, играющая самую важную роль въ изслѣдованіи свойствъ коническихъ сѣченій, носитъ названіе *поляры* точки $(y_1 y_2 y_3)$, относительно коническаго сѣченія, а точка $(y_1 y_2 y_3)$ называется ея *полюсомъ*.

Точки, коихъ координаты удовлетворяютъ уравненію (57) называются *гармоническими полюсами*.

Изъ этого видимъ, *что всякая прямая, проведенная черезъ полюсъ, пересѣкаясь съ коническимъ сѣченіемъ и полярой, даетъ четыре гармоническія точки:* полюсъ и три точки пересѣченія ея съ коническимъ сѣченіемъ и полярой.

Нѣкоторыя прямыя, проходящія черезъ полюсъ встрѣчаютъ коническое сѣченіе въ двухъ мнимыхъ сопряженныхъ точкахъ, а какъ такія точки имѣютъ всегда пару дѣйствительныхъ гармонически сопряженныхъ точекъ, то предъидущее предложеніе не перестаетъ существовать и въ томъ случаѣ, когда прямая, проходящая черезъ точку $(y_1 y_2 y_3)$, не встрѣчаетъ коническое сѣченіе.

§ 209. Изъ свойства функціи Q или уравненія поляры точки $(y_1 y_2 y_3)$:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0 \tag{58}$$

что она неизмѣняется замѣщеніемъ y-овъ z-ами и обратно (§ 199, 10) непосредственно вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Если точка $(y_1y_2y_3)$ находится на полярѣ точки $(z_1z_2z_3)$, то поляра точки $(z_1z_2z_3)$ проходитъ черезъ точку $(y_1y_2y_3)$.

Предложеніе 2. Если точка $(z_1z_2z_3)$ скользитъ по полярѣ точки $(y_1y_2y_3)$, то поляра точки $(z_1z_2z_3)$ вращается около точки $(y_1y_2y_3)$.

Предложеніе 3. Если прямая вращается около одной изъ своихъ точекъ, то ея полюсъ скользитъ по полярѣ, точки вращенія.

Легко видѣть, что поляра (58) точки $(y_1y_2y_3)$ есть коваріантъ формы (48), такъ какъ связь ея съ кривою не зависитъ отъ положенія координатъ.

§ 210. *Касательная.* Поляра пересѣкаетъ коническое сѣченіе въ двухъ точкахъ (§ 204). Если одну изъ этихъ точекъ соединимъ съ полюсомъ прямою линіею, то на этой прямой должны находится четыре гармоническія точки (§ 209) 1 и 2 и имъ сопряженныя 3 и 4. Но вторая и третяя совпадаютъ, слѣдовательно совпадаетъ съ ними и четвертая (§ 95). Откуда слѣдуетъ, что прямая, соединяющая полюсъ съ точкою пересѣченія поляры съ коническимъ сѣченіемъ, пересѣкаетъ кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т. е. она есть *касательная* къ кривой въ точкѣ пересѣченія поляры съ кривою. Если соединимъ полюсъ съ другою точкою пересѣченія поляры съ кривою -прямою, то эта прямая будетъ другая касательная къ кривой, проведенная черезъ полюсъ. Изъ этого видимъ, что изъ данной точки, къ кривой втораго порядка можно провести двѣ касательныя линіи, которыя проходятъ черезъ точки пересѣченія поляры данной точки съ кривою (§ 208).

Изъ этого послѣдняго свойства слѣдуетъ, что если какая-нибудь, точка скользитъ по касательной, то ея поляра вращается около точки касанія, которая, слѣдовательно, есть полюсъ касательной (§ 209, пред. 2). Другими словами: *поляра, какой-нибудь, точки на кривой есть касательная къ кривой въ этой точкѣ.*

Слѣдовательно, если точка $(y_1y_2y_3)$ находится на кривой, т. е. удовлетворяетъ уравненіе (48):

$$f(y_1y_2y_3)=0 \tag{59}$$

то уравненіе касательной къ кривой въ этой точкѣ будетъ:

$$y_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial z_3}=0 \tag{60}$$

или если перемѣнныя координаты $z_1z_2z_3$ поставимъ внѣ:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=0 \tag{61}$$

Если теперь замѣтимъ, что (§ 199, 8):

$$y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=2f=0$$

то будемъ имѣть, вычитая это уравненіе изъ (61):

$$(z_1-y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}+(z_2-y_2)\frac{\partial f}{\partial y_2}+(z_3-y_3)\frac{\partial f}{\partial y_3}=0 \tag{62}$$

таково уравненіе касательной къ кривой, въ данной на кривой точкѣ $(y_1y_2y_3)$, въ трилинейныхъ координатахъ. Но въ большей части случаевъ необходимо имѣть уравненіе касательной въ декартовыхъ координатахъ; чтобы получить это уравненіе надобно перейти отъ трилинейной системы къ декартовой, какъ было показано въ § 183, т. е. положить:

$$\rho z_1=x \quad , \quad \rho z_2=y \quad , \quad \rho z_3=1$$

$$\rho y_1=x_1 \quad , \quad \rho y_2=y_1 \quad , \quad \rho y_3=1$$

откуда уравненіе (62) касательной сдѣлается:

$$(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(y-y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}=0 \tag{63}$$

Пр. Найти уравненіе касательной въ точкѣ (2,1) къ кривой:

$$f=3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0$$

Мы имѣемъ $x_1=2$, $y_1=1$, слѣдовательно:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=6x_1+4y_1-7=9 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_1}=4x_1+10y_1-8=6$$

откуда уравненіе касательной будетъ:

$$9x+6y=28$$

§ 211. *Нормальная линія.* Нормальной линіей называютъ прямую перпендикулярную къ касательной въ точкѣ ея касанія. Изъ уравненія касательной (63) видимъ, что тангенсъ угла α, который она составляетъ съ осью абсциссъ, есть (§ 49, 54):

$$tg\,\alpha=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial y_1}}$$

Слѣдовательно уравненіе нормальной линіи будетъ (§ 49):

$$(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}-(y-y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}=0 \tag{64}$$

Пр. Найти уравненіе нормальной линіи въ точкѣ (2,1) къ кривой:

$$f = 3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$$

Мы имѣемъ, какъ выше:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 9 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 6$$

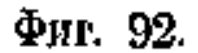
слѣдовательно уравненіе нормальной линіи будетъ:

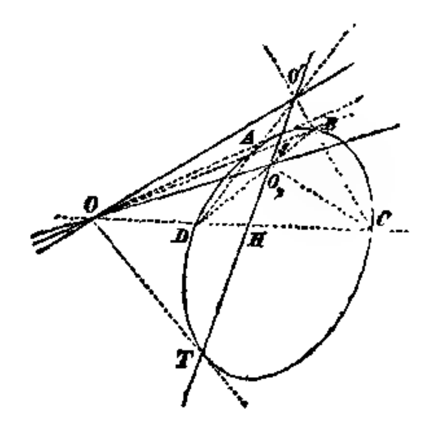
$$6x - 9y = 11$$

§ 212. *Построеніе поляры.* Свойства поляры и полюса, изложенныя выше, даютъ способъ построить поляру, по данному полюсу.

Для этого черезъ полюсъ проведемъ двѣ, какія-нибудь, сѣкущія къ данному коническому сѣченію и на каждой изъ нихъ построимъ четвертую гармоническую точку къ полюсу и двумъ точкамъ пересѣченія сѣкущихъ съ кривою. Прямая, проходящая черезъ, такимъ образомъ, построенныя, точки и будетъ искомая поляра. Построить эти точки можно съ помощью свойствъ полнаго четыреугольника слѣдующимъ образомъ:

Пусть O будетъ данный полюсъ (фиг. 92), $ABCD$ данное коническое сѣченіе.


Фиг. 92.



Черезъ точку O проведемъ двѣ, въ произвольномъ направленіи, сѣкущія OB и OC, которыя пересѣкаются съ кривою въ точкахъ A, B, C, D. Если эти точки соединимъ прямыми линіями AC, AD, DB, BC, то образуется полный четыреугольникъ, коего стороны OB, OC, AD и BC, а діагонали AC, BD, OO'. По свойству четыреугольника $O'O$, $O'A$, $O'O_2$, $O'B$ есть гармоническая связка, слѣдовательно O, A, G, B и O, D, H, C суть гармоническія точки. Если точки G и H суть гармоническія съ точками O, A, B и O, D, C, то прямая GH есть поляра точки O.

Легко видѣть изъ свойствъ этого четыреугольника, что OO_2 есть поляра точки O', а OO' есть поляра точки O_2. Такимъ образомъ мы построили треугольникъ $OO'O_2$ въ которомъ каждая изъ вершинъ есть полюсъ противулежащей стороны. Такой треугольникъ называется ***полярнымъ треугольникомъ*** относительно даннаго коническаго сѣченія.

Такъ какъ точки пересѣченія поляры съ коническимъ сѣченіемъ суть точки касанія касательныхъ проведенныхъ изъ полюса, то это свойство даетъ способъ проводить касательныя къ коническому сѣченію изъ точекъ внѣ кривой.

Построеніе, этимъ способомъ, какъ поляры данной точки, такъ и касательныхъ изъ данной точки къ коническому сѣченію дѣлается, какъ видно, съ помощью только прямой линіи, т. е. линейки.

§ 213. Во всемъ предъидущемъ мы предположили, что всякая прямая имѣетъ свой полюсъ, относительно даннаго коническаго сѣченія. Чтобы это доказать напишемъ уравненіе поляры точки $(y_1 y_2 y_3)$ въ формѣ:

$$\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 = 0 \tag{65}$$

$\eta_1 \eta_2 \eta_3$ суть координаты поляры. Но уравненіе поляры, коей полюсъ есть $(y_1 y_2 y_3)$:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \tag{66}$$

если это уравненіе тождественно съ уравненіемъ (65), то мы должны имѣть:

$$\begin{aligned} \sigma\eta_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \sigma\eta_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \sigma\eta_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3} \end{aligned} \tag{67}$$

Изъ этихъ уравненій можно опредѣлить координаты $y_1 y_2 y_3$ полюса, данной поляры (65), если опредѣлитель:

$$\Delta \gtrless 0 \tag{68}$$

Случай, когда этотъ опредѣлитель равенъ нулю мы теперь исключаемъ; мы выше видѣли, что въ этомъ случаѣ коническое сѣченіе представляетъ пару прямыхъ линій.

Рѣшая уравненіе (67) относительно y_1, y_2, y_3 найдемъ, если положимъ $\frac{\Delta}{\sigma} = \rho$:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3 \\ \rho y_2 &= A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + A_{23}\eta_3 \\ \rho y_3 &= A_{31}\eta_1 + A_{32}\eta_2 + A_{33}\eta_3 \end{aligned} \tag{69}$$

§ 214. Уравненія (67) и (69) выражають зависимость между координатами полюса и поляры. Если полюсъ находится на полярѣ, то его поляра есть касательная къ коническому сѣченію (§ 210).

Обратно, полюсъ только въ томъ случаѣ находится на полярѣ, когда онъ находится на коническомъ сѣченіи. Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$\eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 = 0$$

будетъ уравненіе поляры, коей полюсъ есть точка $(y_1 y_2 y_3)$. Если эта точка находится на полярѣ, то мы должны имѣть:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \tag{70}$$

Помножая первое изъ уравненій (67) на y_1, второе на y_2, третее на y_3 и складывая, найдемъ:

$$\sigma(\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3) = a_{11} y^2_1 + a_{22} y^2_2 + a_{33} y^2_3 + 2a_{12} y_1 y_2 + 2a_{13} y_1 y_3 + 2a_{23} y_2 y_3$$

Но такъ какъ въ силу условія (70) первая часть этого уравненія равна нулю, то равна нулю также и вторая, которая есть коническое сѣченіе $f(x)=0$, въ которое вставлены координаты полюса.

Изъ этого слѣдуетъ, что если полюсъ $(y_1 y_2 y_3)$ скользитъ по коническому сѣченію, то поляра его $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ касается коническаго сѣченія. Чтобы получить зависимость между координатами поляръ, когда полюсъ скользитъ по кривой, надобно изъ уравненій (67), съ присовокупленіемъ къ нимъ уравненія (70), исключить $y_1 y_2 y_3$. Результатъ исключенія будетъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \eta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \eta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \eta_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{71}$$

которое есть ничто иное какъ взаимная функція $f'(\xi)$ функціи $f(x)$, въ которую вставлена η вмѣсто ξ (§ 200). Слѣдовательно взаимная функція функціи $f(x)$, приравненная нулю, даетъ ту зависимость между координатами поляръ, въ силу которой поляра касается во всѣхъ своихъ положеніяхъ коническаго сѣченія $f(x)=0$.

Слѣдовательно:

$$f'(\xi) = 0$$

есть уравненіе коническаго сѣченія въ линейныхъ координатахъ.

Въ § 200, 17 мы видѣли, что:

$$f(x) = f'(\xi)$$

откуда видимъ, что если координаты точки обращаютъ въ нуль первую часть, т. е. если точка находится на коническомъ сѣченіи, то координаты касательной должны обращать въ нуль вторую часть и обратно.

Изъ уравненія § 200, 24 видимъ, что уравненіе коническаго сѣченія въ формѣ опредѣлителя будетъ:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (72)$$

Пр. 1. Найти уравненія эллипса или гиперболы въ линейныхъ координатахъ, если ихъ уравненія даны въ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Опредѣлитель Δ будетъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

слѣдовательно:

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0$$

$$A_{11} = \mp\frac{1}{b^2} \quad , \quad A_{22} = -\frac{1}{a^2} \quad , \quad A_{33} = +\frac{1}{a^2b^2}$$

откуда уравненіе эллипса будетъ:

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - 1 = 0$$

а гиперболы:

$$a^2\xi^2 - b^2\eta^2 - 1 = 0$$

Пр. 2. Найти уравненіе параболы въ линейныхъ координатахъ, если ея уравненіе есть:

$$y^2 - 2px = 0$$

Откуда слѣдуетъ, что:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

а:

$$A_{11} = A_{33} = A_{12} = A_{23} = 0 \quad , \quad A_{22} = -p^2 \quad , \quad A_{13} = p$$

Слѣдовательно уравненіе параболы будетъ:

$$p\eta^2 - 2\xi = 0$$

ГЛАВА XV.

Кривыя втораго порядка въ линейныхъ координатахъ.

Прямая и полюсъ.

§ 215. Въ предъидущей главѣ мы показали, какимъ образомъ данное коническое сѣченіе $f(x_1x_2x_3)=0$ выразить уравненіемъ въ линейныхъ координатахъ $f'(\xi_1\xi_2\xi_3)=0$, въ которомъ перемѣнныя ξ, удовлетворяющія этому уравненію суть координаты прямой, которая во всѣхъ своихъ положеніяхъ касается коническаго сѣченія, а коэфиціенты суть миноры $A_{i,k}$ опредѣлителя Δ (§ 203, 39).

Слѣдовательно каждое уравненіе втораго порядка въ линейныхъ координатахъ есть коническое сѣченіе, къ изслѣдованію свойствъ котораго можно приложить всѣ тѣ способы, которые были приложены къ уравненію $f(x_1x_2x_3)=0$.

§ 216. Пусть данное уравненіе въ линейныхъ координатахъ будетъ:

$$f'(\xi_1\xi_2\xi_3)=A_{11}\xi^2_1+A_{22}\xi^2_2+A_{33}\xi^2_3+2A_{12}\xi_1\xi_2+2A_{13}\xi_1\xi_3+2A_{23}\xi_2\xi_3=0 \quad (1)$$

Будемъ сначала разсматривать функцію f' независимо отъ функціи f, а $A_{i,k}$ независимо отъ $a_{i,k}$.

Шесть коэфиціентовъ, въ этомъ уравненіи, опредѣляютъ родъ коническаго сѣченія, изъ нихъ, очевидно, одинъ можетъ быть сдѣланъ равнымъ единицѣ, слѣдовательно собственно пять коэфиціентовъ опредѣляютъ родъ и свойства коническаго сѣченія.

Если координаты прямой линіи удовлетворяютъ уравненію (1), то эта прямая есть касательная къ кривой. Слѣдовательно, если будетъ дана прямая координатами, какъ касательная къ кривой (1), то мы будемъ имѣть линейное уравненіе между коэфиціентами даннаго коническаго сѣченія (1). Откуда слѣдуетъ, что пять, произвольно выбранныхъ, касательныхъ опредѣляютъ коническое сѣченіе. Пусть эти пять касательныхъ будутъ даны координатами:

$$(\eta_1\eta_2\eta_3)\ ,\ (\zeta_1\zeta_2\zeta_3)\ ,\ (\gamma_1\gamma_2\gamma_3)\ ,\ (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)\ ,\ (\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3)$$

Подставляя эти координаты въ уравненіе (1) будемъ имѣть:

$$f'(\eta_1\eta_2\eta_3)=0\ ,\ f'(\zeta_1\zeta_2\zeta_3)=0\ ,\ f'(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)=0\ ,\ f'(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)=0\ ,\ f'(\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3)=0$$

Присоединяя къ этимъ уравненіямъ шестое (1) будемъ имѣть шесть

линейныхъ уравненій между коэфиціентами A, изъ которыхъ исключивъ эти коэфиціенты, найдемъ коническое сѣченіе въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} \xi^2_1 & \xi^2_2 & \xi^2_3 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 \\ \eta^2_1 & \eta^2_2 & \eta^2_3 & \eta_1\eta_2 & \eta_1\eta_3 & \eta_2\eta_3 \\ \zeta^2_1 & \zeta^2_2 & \zeta^2_3 & \zeta_1\zeta_2 & \zeta_1\zeta_3 & \zeta_2\zeta_3 \\ \gamma^2_1 & \gamma^2_2 & \gamma^2_3 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_2\gamma_3 \\ \varepsilon^2_1 & \varepsilon^2_2 & \varepsilon^2_3 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_3 & \varepsilon_2\varepsilon_3 \\ \varkappa^2_1 & \varkappa^2_2 & \varkappa^2_3 & \varkappa_1\varkappa_2 & \varkappa_1\varkappa_3 & \varkappa_2\varkappa_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

къ которому касаются пять данныхъ прямыхъ.

Положимъ, что послѣднія три касательныя, т. е. данныя координатами $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varkappa_1\varkappa_1\varkappa_3$, проходятъ черезъ одну точку, коей уравненіе есть:

$$U = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0 \qquad (3)$$

Слѣдовательно имѣемъ:

$$U_3 = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 = 0 \quad , \quad U_4 = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = 0 \quad , \quad U_5 = a\varkappa_1 + b\varkappa_3 + c\varkappa_3 = 0$$

Означимъ черезъ U_1, U_2, ... U_5, числовыя значенія уравненія (3), когда въ него подставимъ послѣдовательно координаты η, ζ, γ, ε, $\varkappa$.

Поступая съ опредѣлителемъ (2), какъ поступили съ опредѣлителемъ § 203, найдемъ:

$$abcf'(\xi_1\xi_2\xi_3) = UU_1U_2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_2\gamma_3 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_3 & \varepsilon_2\varepsilon_3 \\ \varkappa_1\varkappa_2 & \varkappa_1\varkappa_3 & \varkappa_2\varkappa_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

изъ котораго видимъ, что если изъ пяти данныхъ касательныхъ къ коническому сѣченію три проходятъ черезъ одну точку, то коническое сѣченіе обращается въ двѣ точки, изъ которыхъ одна есть:

$$U = a_1\xi_1 + b_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0$$

пересѣченіе трехъ касательныхъ, а другая:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0$$

есть пересѣченіе остальныхъ двухъ. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если изъ пяти данныхъ касательныхъ, три пересѣкаются въ одной точкѣ, то коническое сѣченіе есть пара точекъ.

Если уравненіе (1) распадается на два линейные множителя:

$$f' = U.V$$

то разсуждая, какъ въ § 203, найдемъ слѣдующее условіе между коэфиціентами уравненія (1):

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

§ 217. Если будутъ даны уравненія коническаго сѣченія и точки:

$$f'(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0 \quad , \quad a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0 \tag{6}$$

то координаты, удовлетворяющія обоимъ уравненіямъ будутъ координаты прямыхъ, которыя, проходя черезъ данную точку, касаются даннаго коническаго сѣченія. Но такъ какъ изъ уравненій (6) мы получимъ пару координатъ удовлетворяющихъ оба уравненія, то изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Изъ данной точки, внѣ коническаго сѣченія, можно провести къ нему только двѣ касательныя.

Чтобы найти уравненія этихъ касательныхъ, замѣтимъ, что координаты этихъ касательныхъ удовлетворяютъ уравненія:

$$f'(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0 \quad , \quad \text{и} \quad a\xi_1 + \xi b_2 + c\xi_3 = 0$$

слѣдовательно уравненіе касательной будетъ:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0$$

исключая изъ этихъ трехъ уравненій $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, найдемъ:

$$f'(bx_3 - cx_2 \ , \ cx_1 - ax_3 \ , \ ax_2 - bx_3) = 0 \tag{7}$$

уравненіе второй степени, которое въ силу критеріума § 203, 39, распадается на два линейные множителя относительно $x_1 x_2 x_3$, которые будучи приравнены нулю представляютъ искомыя касательныя.

§ 218. Остается рѣшить вопросъ относительно общихъ касательныхъ двумъ даннымъ коническимъ сѣченіямъ.

Пусть данныя коническія сѣченія будутъ:

$$\Phi_1(\xi_1\xi_2\xi_3)=0 \quad , \quad \Phi_2(\xi_1\xi_2\xi_3)=0$$

Если къ этимъ уравненіямъ приложимъ разсужденія и дѣйствія § 205, то найдемъ слѣдующее предложеніе: къ двумъ коническимъ сѣченіямъ можно провести четыре касательныя.

§ 219. Четыре данныя касательныя не опредѣляютъ коническое сѣченіе.

Возьмемъ два коническія сѣченія:

$$\Phi_1(\xi_1\xi_2\xi_3)=0 \quad , \quad \Phi_2(\xi_1\xi_2\xi_3)=0 \tag{8}$$

которыя какъ мы видѣли, имѣютъ четыре общія касательныя. Если составимъ уравненіе:

$$\Phi_1-\lambda\Phi_2=0 \tag{9}$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэфиціентъ, то это уравненіе представляетъ рядъ коническихъ сѣченій, которыя всѣ касаются къ четыремъ общимъ касательнымъ къ кривымъ (8). Къ каждой прямой, произвольно взятой на плоскости, касается одно изъ ряда (9) коническихъ сѣченій. Въ самомъ дѣлѣ, если дано уравненіе прямой, то она будетъ касательная, если ея координаты удовлетворяютъ уравненіе (9). Это условіе опредѣляетъ λ.

Коническія сѣченія, представляемыя уравненіемъ (9), мы будемъ называть *рядомъ*.

§ 220. Теперь остается рѣшить задачу соотвѣтствующую задачѣ § 207 и вывесть слѣдствія изъ нея вытекающія.

Задача. Опредѣлить касательныя къ данному коническому сѣченію, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ $(\eta_1\eta_2\eta_3)$, $(\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$?

Рѣшеніе. Координаты, какой-нибудь, прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія прямыхъ $(\eta_1\eta_2\eta_3)$, $(\zeta_1\zeta_2\zeta_2)$, выражаются уравненіями:

$$\sigma\xi_1=\eta_1+\lambda\zeta_1 \quad , \quad \sigma\xi_2=\eta_2+\lambda\zeta_2 \quad , \quad \sigma\xi_3=\eta_3+\lambda\zeta_2 \tag{10}$$

Если $\xi_1\xi_2\xi_3$ суть координаты касательныхъ къ коническому сѣченію, то будемъ имѣть:

$$\{A_1\eta_1+A_2\eta_2+A_3\eta_3+\lambda(A_1\zeta_1+A_2\zeta_2+A_3\zeta_3)\}^2=0 \tag{11}$$

если уравненіе коническаго сѣченія въ символической формѣ будетъ:

$$(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3)^2 = 0 \tag{12}$$

Уравненіе (11) будетъ второй степени относительно λ:

$$L + 2M\lambda + N\lambda^2 = 0 \tag{13}$$

гдѣ:

$$L = (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3)^2 \quad , \quad N = (A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3)^2 \tag{14}$$

$$M = (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3)(A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3) \tag{15}$$

или, какъ выше было условлено (§ 201, 10):

$$M = \frac{1}{2}\left(\eta_1\frac{\partial f'}{\partial\zeta_1} + \eta_2\frac{\partial f'}{\partial\zeta_2} + \eta_3\frac{\partial f'}{\partial\zeta_3}\right) = \frac{1}{2}\left(\zeta_1\frac{\partial f'}{\partial\eta_1} + \zeta_2\frac{\partial f'}{\partial\eta_2} + \zeta_3\frac{\partial f'}{\partial\zeta_3}\right) \tag{16}$$

Если рѣшимъ уравненіе (13), то найдемъ два значенія для λ:

$$\lambda_1 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{N} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{-M - \sqrt{M^2 - LN}}{N} \tag{17}$$

Слѣдовательно, черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ проходятъ двѣ касательныя къ коническому сѣченію, коихъ координаты будутъ:

$$\begin{aligned}
\sigma\xi_1 &= N\eta_1 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\,\zeta_1 \quad , \quad \sigma\xi'_1 = N\eta_1 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\,\zeta_1 \\
\sigma\xi_2 &= N\eta_2 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\,\zeta_2 \quad , \quad \sigma\xi'_2 = N\eta_2 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\,\zeta_2 \\
\sigma\xi_3 &= N\eta_3 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\,\zeta_3 \quad , \quad \sigma\xi'_3 = N\eta_3 - (M - \sqrt{M^2 - LN})\,\zeta_2
\end{aligned} \tag{18}$$

гдѣ общій знаменатель N вошелъ въ составъ коэфиціента пропорціональности σ.

Такимъ образомъ будемъ имѣть связку изъ четырехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку.

Ангармоническое отношеніе этой связки будетъ $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; если ихъ означимъ черезъ α_1 и α_2, то будемъ имѣть:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

откуда, найдемъ:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2M}{N} \quad , \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{L}{N}$$

слѣдовательно, какъ въ § 207, будемъ имѣть уравненіе опредѣляющее α:

$$(1+\alpha)^2 LN - 4M^2\alpha = 0 \tag{19}$$

корни этого уравненія дадутъ ангармоническое отношеніе связки.

221. Если въ уравненіи (19) мы фиксируемъ одну изъ данныхъ прямыхъ, напримѣръ $(\eta_1\eta_2\eta_3)$, дадимъ опредѣленное числовое значеніе ангармоническому отношенію α и будемъ координаты другой прямой $(\zeta_1\zeta_2\zeta_2)$ такъ измѣнять, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіе (19), то получимъ геометрическое мѣсто прямыхъ, коихъ ангармоническое отношеніе съ прямою $\eta_1\eta_2\eta_3$ и двумя касательными къ коническому сѣченію, проходящими черезъ точку пересѣченія прямыхъ $(\eta_1\eta_2\eta_3)$, $(\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$, имѣетъ опредѣленное числовое значеніе. Такъ какъ уравненіе (19), относительно координатъ $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ второй степени, то геометрическое мѣсто есть коническое сѣченіе въ линейныхъ координатахъ.

Давая α различныя значенія получимъ систему коническихъ сѣченій относительно прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$. Измѣняя положеніе прямой на плоскости получимъ подобныя системы для каждой прямой на плоскости.

Особеннаго вниманія заслуживаютъ, относительно каждой прямой на плоскости, тѣ изъ системы коническихъ сѣченій, для которыхъ ангармоническое отношеніе $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

1. Положимъ $\alpha = 1$, то уравненіе (19) сдѣлается:

$$LN - M^2 = 0 \tag{20}$$

Разсматривая выраженіе (18) видимъ, что при условіи (20) касательныя къ коническому сѣченію совпадаютъ, т. е. точка пересѣченія касательныхъ находится на коническомъ сѣченіи. Если приложимъ критеріумъ § 203 къ уравненію (20), то увидимъ, что оно разлагается на два линейные множителя, которые представляютъ, очевидно, точки пересѣченія прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$ съ коническимъ сѣченіемъ.

2. Второй случай это когда $\alpha = -1$.

Полюсъ. Если $\alpha = -1$, то уравненіе (19) сдѣлается:

$$M^2 = 0 \quad \text{или} \quad M = 0 \tag{21}$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто прямыхъ $(\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$ есть точка, такъ какъ уравненіе (21) есть линейная функція относительно $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$. Но при $\alpha = -1$ двѣ прямыя $(\eta_1\eta_2\eta_3)$, $(\zeta_1\zeta_2\zeta_2)$ и двѣ касательныя, проведенныя черезъ пересѣченіе этихъ прямыхъ къ коническому сѣченію, составляютъ

гармоническую связку; слѣдовательно точка (21) есть геометрическое мѣсто четвертой гармонической прямой къ прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$ и къ двумъ касательнымъ проведеннымъ изъ точекъ, находящихся на прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$.

Эта точка (21) называется *полюсомъ* прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$, а прямая—его *полярой*.

Изъ этого видимъ, *что поляра* $(\eta_1\eta_2\eta_3)$, *двѣ касательныя къ коническому сѣченію, проведенная черезъ какую-нибудь, точку поляры и прямая, проходящая черезъ эту точку и полюсъ, составляютъ гармоническую связку.*

Двѣ прямыя, коихъ координаты удовлетворяютъ уравненіе $M=0$, называются *гармоническими полярами.*

§ 222. Изъ того свойства, что функція M или уравненіе полюса:

$$M=\eta_1\frac{\partial f'}{\partial\zeta_1}+\eta_2\frac{\partial f'}{\partial\zeta_2}+\eta_3\frac{\partial f'}{\partial\zeta_3}=0 \qquad (22)$$

неизмѣняется замѣщеніемъ η черезъ ζ, и обратно, непосредственно вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Если прямая $(\eta_1\eta_2\eta_3)$ проходитъ черезъ полюсъ прямой $(\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$, то эта послѣдняя проходитъ черезъ полюсъ первой.

Предложеніе 2. Если прямая $(\zeta_1\zeta_2\zeta_3)$ вращается около полюса прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$, то ея полюсъ скользитъ по прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$.

Предложеніе 3. Если полюсъ скользитъ по прямой, то его поляра вращается около полюса прямой, по которой скользитъ точка.

§ 223. *Точка на коническомъ сѣченіи.* Мы видѣли, что если полюсъ находится на коническомъ сѣченіи, то поляра его есть касательная (§ 210). Если коническое сѣченіе выражено въ линейныхъ координатахъ, то полюсъ поляры, данной координатами $\eta_1\eta_2\eta_3$, есть:

$$\zeta_1\frac{\partial f'}{\partial\eta_1}+\zeta_2\frac{\partial f'}{\partial\eta_2}+\zeta_3\frac{\partial f'}{\partial\eta_3}=0$$

Если поляра есть касательная, то полюсъ лежитъ на коническомъ сѣченіи, слѣдовательно если $\eta_1\eta_2\eta_3$ суть координаты касательной, то уравненіе точки касанія есть:

$$\zeta_1\frac{\partial f'}{\partial\eta_1}+\zeta_2\frac{\partial f'}{\partial\eta_2}+\zeta_3\frac{\partial f'}{\partial\eta_3}=0$$

§ 224. Въ § 200 мы видѣли, что если будетъ дана троичная форма втораго порядка $f(x)$, то ее можно преобразовать въ другую—взаимную

$f'(\xi)$, или обратно, данную форму $\Phi(\xi)$ можно преобразовать въ взаимную $\Phi'(x)$. Въ этомъ преобразованіи связь между x и ξ есть слѣдующая:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=\xi \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \xi}=x \tag{23}$$

при такой связи всегда имѣемъ:

$$f(x)=f'(\xi) \tag{24}$$

Мы видѣли также еще, что при такой связи:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=\zeta_1\frac{\partial f'}{\partial \eta_1}+\zeta_2\frac{\partial f'}{\partial \eta_2}+\zeta_3\frac{\partial f'}{\partial y_3} \tag{25}$$

гдѣ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}=\zeta \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \zeta}=z$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}=\eta \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta}=y \tag{26}$$

Если координаты x удовлетворяютъ $f(x)=0$, то вслѣдствіи (24) координаты ξ будутъ удовлетворять уравненію $f'(\xi)=0$. Оба эти уравненія представляютъ одно и тоже коническое сѣченіе, первое уравненіе даетъ связь между координатами точекъ на кривой, а второе даетъ связь между координатами касательной къ кривой.

Если $(y_1y_2y_3)$ есть точка, то поляра этой точки или полюса есть:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=0 \tag{27}$$

Если это выраженіе равно нулю, то равно нулю и выраженіе:

$$\zeta_1\frac{\partial f'}{\partial \eta_1}+\zeta_2\frac{\partial f'}{\partial \eta_2}+\zeta_3\frac{\partial f'}{\partial \eta_3}=0 \tag{28}$$

Но это есть уравненіе точки, коей координаты суть:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_1}=y_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_2}=y_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_3}=y_3$$

Слѣдовательно уравненіе (28) представляетъ полюсъ, котораго поляра дана уравненіемъ (27) и координатами:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1}=\eta_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}=\eta_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3}=\eta_2$$

Изъ этого заключаемъ, что уравненія:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=0\quad,\quad \zeta_1\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1}+\zeta_2\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2}+\zeta_2\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_3}=0$$

представляютъ поляру и полюсъ въ коническихъ сѣченіяхъ данныхъ въ координатахъ точекъ или въ линейныхъ координатахъ.

§ 225. Изъ уравненія:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=\zeta_1\frac{\partial f'}{\partial \eta_1}+\zeta_2\frac{\partial f'}{\partial \eta_2}+\zeta_3\frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \tag{29}$$

вытекаютъ слѣдующія предложенія:

1. Поляры двухъ гармоническихъ полюсовъ суть гармоническія поляры (§ 221).

2. Полюсы двухъ гармоническихъ поляръ суть гармоническіе полюсы (§ 208):

§ 226. Изъ того свойства полюса и поляры, что если полюсъ скользитъ по прямой, то его поляра вращается около полюса прямой и, обратно, если прямая вращается около одной изъ ея точекъ, то ея полюсъ скользитъ по полярѣ точки вращенія, слѣдуетъ, что если въ данную прямую, по которой скользитъ полюсъ:

$$\eta_1 x_1+\eta_2 x_2+\eta_3 x_3=0$$

вставимъ координаты полюса:

$$x_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \xi_1}\quad,\quad x_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \xi_2}\quad,\quad x_3=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \xi_3}$$

то получимъ уравненіе полюса, и, обратно, если въ уравненіе точки, около которой вращается прямая, подставимъ координаты поляры:

$$\xi_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\quad,\quad \xi_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\quad,\quad \xi_3=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

то получимъ уравненіе поляры.

Пусть:

$$A_1=0\quad,\quad A_2=0\quad,\quad A_1-\lambda A_2=0\quad,\quad A_1-\mu A_2=0 \tag{30}$$

будутъ уравненія четырехъ прямыхъ, ихъ ангармоническое отношеніе, какъ мы знаемъ, равно $\frac{\lambda}{\mu}$. Если въ уравненія этихъ прямыхъ вставимъ

координаты ихъ полюсовъ относительно коническаго сѣченія, то эти уравненія сдѣлаются уравненіями полюсовъ данныхъ четырехъ прямыхъ. Если черезъ A'_1, A'_2 означимъ то, во что обращаются A_1 и A_2 вышесказаннымъ подстановленіемъ, то уравненія полюсовъ будутъ:

$$A'_1=0 \quad , \quad A'_2=0 \quad , \quad A'_1-\lambda A'_2=0 \quad , \quad A'_1-\mu A'_2=0 \tag{31}$$

и, обратно, если (30) суть уравненія четырехъ точекъ на одной прямой линіи, то подставляя въ нихъ координаты поляръ, получимъ уравненія (31) поляръ. Изъ этого вытекаютъ слѣдующія предложенія:

1. Ангармоническое отношеніе четырехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну точку, равно ангармоническому отношенію ихъ полюсовъ.

2. Ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ, на одной прямой линіи, равно ангармоническому отношенію ихъ поляръ.

3. Полюсы трехъ паръ прямыхъ, составляющихъ инволюціонную связку, составляютъ инволюціонный рядъ.

4. Связка поляръ инволюціоннаго ряда точекъ есть инволюціонная.

§ 227. *Методъ взаимныхъ поляръ.* Пусть будетъ дано коническое сѣченіе, которое назовемъ *основнымъ*, пусть его уравненія въ взаимныхъ формахъ будутъ:

$$f(x)=0 \quad , \quad f'(\xi)=0 \tag{32}$$

Если координаты, какой-нибудь, точки будутъ $y_1 y_2 y_3$, то координаты поляры этой точки относительно основнаго коническаго сѣченія будутъ:

$$\eta_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1} \quad , \quad \eta_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2} \quad , \quad \eta_3=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3} \tag{33}$$

и обратно:

$$y_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_1} \quad , \quad y_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_2} \quad , \quad y_3=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \tag{34}$$

Пусть теперь будетъ дано, какое-нибудь коническое сѣченіе:

$$F(x_1 x_2 x_3)=0 \tag{35}$$

Если заставимъ полюсъ (34) описывать это коническое сѣченіе, то его координаты должны удовлетворять уравненіе (35), т. е.:

$$F(y_1 y_2 y_3)=F\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_1} \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_2} \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_3}\right)=\Phi(\eta_1\eta_2\eta_3)=0 \tag{36}$$

откуда видимъ, что координаты поляры должны удовлетворять предъидущему уравненію, которое, очевидно, второй степени, слѣдовательно, въ то время, какъ полюсъ описываетъ коническое сѣченіе (35), его поляра касается коническаго сѣченія (36). Изъ этого видимъ, что точки на коническомъ сѣченіи (35) суть полюсы касательныхъ къ коническому сѣченію (36).

Легко показать, что, обратно, каждая точка на коническомъ сѣченіи (36) есть полюсъ одной изъ касательныхъ къ коническому сѣченію (35). Въ самомъ дѣлѣ, замѣтимъ, что точка пересѣченія двухъ поляръ есть полюсъ прямой, проходящей черезъ полюсъ данныхъ поляръ. Но пересѣченіе двухъ безконечно близкихъ касательныхъ есть точка на коническомъ сѣченіи (36), слѣдовательно она есть полюсъ прямой, проходящей черезъ двѣ безконечно близкія точки на коническомъ сѣченіи (35), а такая прямая есть касательная къ коническому сѣченію (35). Изъ этого видимъ, что коническія сѣченія:

$$F(y_1 y_2 y_3) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(\eta_1 \eta_2 \eta_3) = 0$$

находятся въ такой взаимной зависимости между собою, что точки на одномъ изъ нихъ суть полюсы касательныхъ къ другому. Поэтому они называются *взаимными коническими сѣченіями*.

Изложенныя свойства полюса и поляры относительно коническаго сѣченія служатъ основаніемъ метода изслѣдованій извѣстнаго въ геометріи подъ именемъ метода *взаимныхъ поляръ*, который мы изложимъ подробнѣе ниже.

§ 228. Если:

$$\Phi_1(x) = 0 \quad , \quad \Phi_2(x) = 0 \tag{37}$$

суть два коническія сѣченія, то:

$$\Phi_1 - \lambda \Phi_2 = 0 \tag{38}$$

есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ четыре точки пересѣченія коническихъ сѣченій (37). Поляра, какой-нибудь точки $(y_1 y_2 y_3)$ относительно связки коническихъ сѣченій будетъ:

$$x_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_3} - \lambda \left(x_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_3} \right) = 0$$

Слѣдовательно она проходитъ черезъ пересѣченіе поляръ коническихъ сѣченій (37) относительно точки $(y_1 y_2 y_3)$.

§ 229. Если:

$$F_1(\xi) = 0 \quad , \quad F_2(\xi) = 0 \tag{39}$$

суть уравненія конических сѣченій въ линейныхъ координатахъ, то:

$$F_1(\xi) - \lambda F_2(\xi) = 0 \tag{40}$$

есть коническое сѣченіе, касающееся четырехъ общихъ касательныхъ къ коническимъ сѣченіямъ (39). Полюсъ, какой-нибудь, прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$ относительно ряда коническихъ сѣченій (40) будетъ:

$$\zeta_1\frac{\partial F_1}{\partial\eta_1} + \zeta_2\frac{\partial F_1}{\partial\eta_2} + \zeta_3\frac{\partial F_1}{\partial\eta_3} - \lambda\left(\zeta_1\frac{\partial F_2}{\partial\eta_1} + \zeta_2\frac{\partial F_2}{\partial\eta_2} + \zeta_3\frac{\partial F_2}{\partial\eta_3}\right) = 0$$

Слѣдовательно онъ скользитъ по прямой, проходящей черезъ полюсы прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$ относительно коническихъ сѣченій (39).

§ 230. Остается показать одно изъ самыхъ замѣчательныхъ свойствъ коническаго сѣченія въ обѣихъ системахъ координатъ.

Фиг. 93.

Двѣ проэктивныя связки, не находящіяся въ положеніи перспективы, пересѣченіями соотвѣтственныхъ лучей, образуютъ геометрическое мѣсто, которое есть коническое сѣченіе.

Пусть:

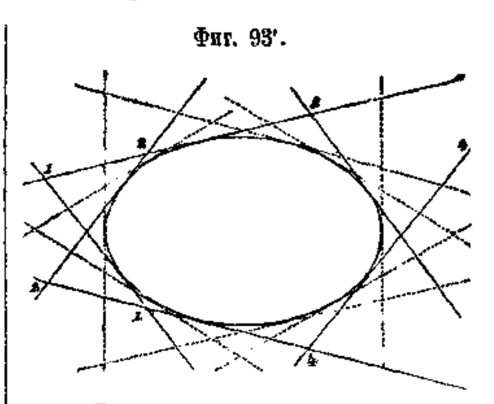
$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \lambda A'_2 = 0$$

будутъ двѣ проэктивныя связки. Координаты точекъ пересѣченія двухъ соотвѣтствующихъ лучей, т. е. тѣ, которыя соотвѣтствуютъ одному и тому-же значенію λ, должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ, слѣдовательно геометрическое мѣсто получится, исключая λ изъ предъидущихъ уравненій, что даетъ:

$$A_1A'_2 - A_2A_1' = 0 \tag{41}$$

такъ какъ это уравненіе относительно x, y второй степени, то геометрическое мѣсто есть коническое сѣченіе.

Фиг. 93'.



Два проэктивные ряда не находящіеся въ положеніи перспективы, образуютъ прямыми, соединяющими соотвѣтственныя точки, обертку, которая есть коническое сѣченіе.

Пусть:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A'_1 - \lambda A'_2 = 0$$

будутъ два проэктивные ряда точекъ. Координаты прямыхъ, проходящихъ черезъ двѣ соотвѣтствующія точки, т. е. тѣ которыя соотвѣтствуютъ одному и тому-же значенію λ, должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ, слѣдовательно геометрическое мѣсто прямыхъ получится, исключая λ изъ предъидущихъ уравненій, что даетъ:

$$A_1A'_2 - A_2A'_1 = 0 \tag{41'}$$

такъ какъ это уравненіе второй степени относительно ξ, η, то геометрическое мѣсто есть коническое сѣченіе.

Изъ уравненія (41) легко видѣть, что кривая проходитъ черезъ вершины связокъ, такъ какъ оно удовлетворяется одновременно, или:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0$$

или:

$$A'_1 = 0 \quad \text{и} \quad A'_2 = 0$$

Изъ уравненія (41') легко видѣть, что прямыя, на которыхъ находятся проэктивные ряды, касаются коническаго сѣченія (фиг. 93'), такъ какъ уравненіе (41') удовлетворяется одновременно или:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0$$

или:

$$A'_1 = 0 \quad , \quad A'_2 = 0$$

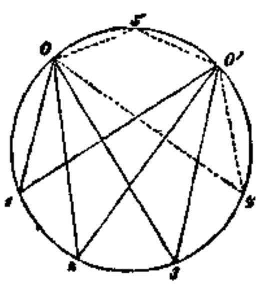
Примѣръ. Если двѣ проэктивныя связки, имѣющія вершины въ точкахъ O и O' (фиг. 94), тождественны, то кривая есть, очевидно, кругъ. Это вытекаетъ изъ равенства угловъ:

$$\angle 102 = \angle 10'2,$$

$$\angle 203 = \angle 20'3,$$

$$\angle 304 = \angle 30'4$$

Фиг. 94.



§ 231. Въ §§ 202 и 216 мы уже видѣли:

Что коническое сѣченіе вполнѣ опредѣляется пятью данными точками.

Что коническое сѣченіе вполнѣ опредѣляется пятью данными касательными.

Изъ этого слѣдуетъ, что если дано коническое сѣченіе, то можно на немъ взять произвольно пять точекъ (пять касательныхъ къ нему), выбрать двѣ изъ нихъ за вершины связокъ (за прямыя рядовъ точекъ) и остальными тремя установить проэктивность связокъ (рядовъ). Геометрическое мѣсто пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей (соотвѣтственныхъ прямыхъ) есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ пять выбранныхъ точекъ (касающееся пяти выбранныхъ касательныхъ), а такъ какъ черезъ пять точекъ проходитъ только одно коническое сѣченіе (къ пяти прямымъ касается только одно коническое сѣченіе), то геометрическое мѣсто и есть данное коническое сѣченіе. Изъ этого слѣдуетъ.

Что каждое коническое сѣченіе есть геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей двухъ проэктивныхъ связокъ.

Что каждое коническое сѣченіе есть геометрическое мѣсто (обвертка) соотвѣтственныхъ прямыхъ двухъ проэктивныхъ рядовъ.

Такъ какъ на коническомъ сѣченіи можно выбрать совершенно произвольно пять точекъ (пять касательныхъ), чтобы съ помощью ихъ описать, какъ показано выше, коническое сѣченіе, то изъ этого слѣдуетъ, что вершины связокъ (прямыхъ, на которыхъ находятся ряды) ничѣмъ не отличаются отъ другихъ точекъ (прямыхъ) коническаго сѣченія, откуда вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Прямыя, соединяющія двѣ данныя точки на коническомъ

Предложеніе 1. На двухъ данныхъ касательныхъ къ коническому сѣченію,

сѣченіи съ другими его точками, образуютъ двѣ проэктивныя связки.

Предложеніе 2. Если точка движется къ коническому сѣченію, то прямыя, соединяющія эту точку съ другими точками коническаго сѣченія, образуютъ связку, которая во время перемѣщенія точки остается проэктивною.

Предложеніе 3. Если четыре данныя точки на коническомъ сѣченіи, соединимъ съ какою-нибудь, пятою точкою, то получимъ связку, коей ангармоническое отношеніе будетъ величина постоянная.

другія его касательныя образуютъ два ряда проэктивныхъ точекъ.

Предложеніе 2. Если касательная къ коническому сѣченію движется, оставаясь касательной, то ряды точекъ пересѣченія ея съ другими касательными останутся всегда проэктивными сами себѣ.

Предложеніе 3. Если четыре касательныя къ коническому сѣченію, пересѣчемъ, какою-нибудь пятою, то ангармоническое отношеніе, полученныхъ точекъ, будетъ всегда величина постоянная.

ГЛАВА XVI.

Прямая на безконечности.

Роды коническихъ сѣченій. Эллипсъ, гипербола и парабола.

§ 232. Мы видѣли выше (§ 185), что всѣ безконечно удаленныя точки на плоскости лежатъ на прямой, коей уравненіе есть:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 = 0$$

поэтому эту прямую называютъ *безконечно удаленною.*

Изслѣдуемъ ея связь съ коническимъ сѣченіемъ. Во первыхъ положимъ, что $\Delta \gtrless 0$.

Мы видѣли, что какая-нибудь, прямая можетъ пересѣчь кривую втораго порядка только въ двухъ точкахъ и эти точки бываютъ обѣ дѣйствительныя, совпадающія и обѣ мнимыя. Перенесемъ это на безконечно удаленную прямую. Эта прямая можетъ пересѣчь коническое сѣченіе въ двухъ дѣйствительныхъ, въ двухъ мнимыхъ и въ двухъ совпадающихъ точкахъ; другихъ случаевъ не представляется. Эти три случая и будутъ характеризовать кривыя втораго порядка. Поэтому мы будемъ называть:

1. Эллипсомъ такую кривую, которая пересѣкается безконечно-удаленною прямою въ двухъ мнимыхъ точкахъ.

2. Гиперболой такую кривую, которая пересѣкается безконечно-удаленною прямою въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ.

3. *Параболой* такую кривую, которой безконечно-удаленная прямая касается.

Слѣдовательно эллипсъ есть кривая, которой всѣ точки находятся въ конечномъ разстоянiи отъ начала —*замкнутая кривая*, гипербола имѣетъ двѣ точки на безконечности и парабола имѣетъ только одну точку на безконечности.

§ 233. Основанiемъ другой классификацiи служитъ положенiе полюса безконечно-удаленной прямой.

Проведемъ черезъ этотъ полюсъ, какую-нибудь, прямую, эта прямая будетъ раздѣлена гармонически: полюсомъ, кривою и безконечно-удаленною прямою—полярой (§ 208); такъ какъ одна изъ четырехъ гармоническихъ точекъ находится на безконечности, то ей сопряженняя, т. е. полюсъ, дѣлитъ разстоянiе между двумя другими пополамъ; слѣдовательно полюсъ безконечно-удаленной прямой дѣлитъ пополамъ всѣ хорды кривой, черезъ него проходящiя. По этой причинѣ эта точка называется *центромъ* кривой втораго порядка. Хорды, проходящiя черезъ центръ, называются *дiаметрами* кривой. Если безконечно-удаленная прямая касается кривой, то ея полюсъ лежитъ на ней, слѣдовательно на безконечности. Поэтому различаютъ два рода кривыхъ.

1. Центральныя кривыя—эллипсъ и гипербола.

2. Неимѣющiя центра кривыя—парабола.

§ 234. Займемся здѣсь только центральными кривыми и для этого разсмотримъ, какой-нибудь, *полярный треугольникъ* (§ 212), т. е. такой треугольникъ, коего вершины суть полюсы противулежащихъ сторонъ относительно кривой втораго порядка. Такихъ треугольниковъ есть *трижды безконечное число*, т. е. онъ заключаетъ *три произвольные параметра*.

Фиг. 95.

Припомнимъ главныя свойства полярнаго треугольника (§ 212).

1 Всѣ прямыя, проходящiя черезъ вершину полярнаго треугольника дѣлятся кривой и противуположной стороной гармонически.

Предложенiе взаимное предъидущему будетъ:

2. Если изъ, какой-нибудь, точки, взятой на сторонѣ полярнаго треугольника, проведены двѣ касательныя къ кривой, то онѣ съ этой стороной и съ прямой, соединяющей взятую точку съ противуположной вершиной, составляютъ гармоническую связку.

§ 235. Возьмемъ теперь за сторону $\gamma\gamma$ (фиг. 95) полярнаго треугольника безконечно-удаленную прямую, тогда двѣ другія стороны полярнаго треугольника будутъ проходить черезъ центръ коническаго сѣченія: это будутъ *сопряженные діаметры* этой кривой. Подъ сопряженными діаметрами мы понимаемъ *такія двѣ прямыя, въ которыхъ безконечно-удаленная точка одной изъ нихъ, есть полюсъ другой.* Два сопряженные діаметра суть гармоническія поляры (§ 221).

Такимъ образомъ гармоническое дѣленіе хордъ, проходящихъ черезъ безконечно-удаленныя вершины полярнаго треугольника, замѣщено дѣленіемъ пополамъ, т. е. *хорды параллельныя одному изъ сопряженныхъ діаметровъ дѣлятся другимъ діаметромъ пополамъ; касательныя въ концахъ одного діаметра параллельны другому.*

Двѣ гармоническія поляры $\beta\beta$ и $\gamma\gamma$ съ касательными af и ag, проведенными изъ точки ихъ пересѣченія a къ кривой, образуютъ гармоническую связку, такъ какъ точки касанія f и g съ полюсами b и c поляръ суть четыре гармоническія точки.

Если вершина связки есть центръ кривой, то мы будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Каждая пара сопряженныхъ діаметровъ составляетъ гармоническую связку съ двумя ассимптотами кривой, т. е. съ двумя касательными проведенными въ точкахъ пересѣченія безконечно-удаленной прямой съ кривою. Всѣ коническія сѣченія, имѣютъ двѣ ассимптоты, т. е. прямыя соединяющія центръ кривой съ безконечно-удаленными точками пересѣченія кривой съ безконечно-удаленною прямою.

Если эти точки дѣйствительныя, то и ассимптоты дѣйствительныя. Слѣдовательно въ гиперболѣ ассимптоты дѣйствительны, а въ эллипсѣ мнимыя. Въ параболѣ ассимптоты совпадаютъ и лежатъ на безконечности. Хотя въ эллипсѣ ассимптоты и мнимыя, но теоремы относящіяся къ нимъ остаются въ силѣ, такъ какъ аналитическія комбинаціи остаются тѣ же. Если одинъ изъ пары сопряженныхъ діаметровъ совпадаетъ съ ассимптотой, то по свойству гармоническаго дѣленія и другой діаметръ пары совпадетъ съ нею, поэтому говорятъ: *что ассимптота есть сама себѣ сопряженный діаметръ.*

Напротивъ, если одинъ изъ пары сопряженныхъ діаметровъ дѣлитъ пополамъ уголъ между ассимптотами, то другой діаметръ пары, по свойству гармоническаго дѣленія, раздѣлитъ пополамъ дополнительный уголъ. *Слѣдовательно кривыя втораго порядка имѣютъ два сопряженные діаметра, пересѣкающіеся подъ прямымъ угломъ; эти діаметры называются осями кривой.*

§ 236. Отъ этихъ геометрическихъ изслѣдованій, изъ которыхъ видимъ, какую важную роль играетъ безконечно-удаленная прямая, перейдемъ къ аналитическимъ Для этого возьмемъ прямоугольныя декартовы координаты; въ этой системѣ координатъ безконечно-удаленная прямая представляется съ весьма замѣчательнымъ характеромъ. Чтобы перейти отъ трилинейной системы координатъ къ декартовой надобно положить:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1$$

$$\sigma \xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma \xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma \xi_3 = 1$$

Уравненія между полюсомъ и полярой дѣлаются:

$$\begin{aligned} \rho\xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \quad , \quad \sigma x = A_{11}\xi + A_{12}\eta + A_{13} \\ \rho\eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \quad , \quad \sigma y = A_{21}\xi + A_{22}\eta + A_{23} \qquad (1) \\ \rho.1 &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \quad , \quad \sigma.1 = A_{31}\xi + A_{32}\eta + A_{33} \end{aligned}$$

гдѣ $a_{i,k} = a_{k,i}$, при этомъ опредѣлитель Δ не равенъ нулю. Если прямая:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

или:

$$\xi x + \eta y = 1$$

удаляется на безконечное разстояніе, то отрѣзки a и b равны безконечности, слѣдовательно:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0$$

Такъ какъ центръ кривой есть полюсъ безконечно-удаленной прямой, то, полагая въ уравненіяхъ (1) $\xi = 0$, $\eta = 0$, найдемъ координаты центра:

$$x = \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a^2_{12}} \quad , \quad y = \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a^2_{12}} \qquad (2)$$

Если бы A_{13}, A_{23}, A_{33} были всѣ равны нулю, то опредѣлитель Δ былъ бы также равенъ нулю, случай, который мы исключаемъ. Слѣдовательно центръ всегда опредѣленъ, исключая когда:

$$A_{33} = 0 \qquad (3)$$

въ этомъ случаѣ центръ кривой находится на *безконечности*—это условіе соотвѣтствуетъ параболѣ.

Розыщемъ теперь зависимость между безконечно-удаленною прямою и кривою, изъ этой зависимости вытечетъ не только аналитическій характеръ параболы (3), но и эллипса и геперболы.

Проведемъ черезъ начало координатъ прямую, составляющую уголъ α съ осью x. Если эта прямая пересѣкаетъ кривую на разстояніи r отъ начала координатъ, то координаты точекъ встрѣчи будутъ:

$$x = r\cos\alpha \quad , \quad y = r\sin\alpha$$

Подставляя эти выраженія въ уравненіе коническаго сѣченія:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{4}$$

найдемъ:

$$r^2(a_{11}\cos^2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha) + 2r(a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha) + a_{33} = 0 \tag{5}$$

Изъ этого квадратнаго уравненія найдемъ двѣ величины для r, которыя могутъ быть дѣйствительныя, равныя и мнимыя.

Въ первомъ случаѣ, прямая, проведенная подъ угломъ α къ оси абсциссъ, встрѣчаетъ коническое сѣченіе въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ, во второмъ она будетъ касатьсл, въ третьемъ случаѣ она его не встрѣчаетъ, тѣмъ не менѣе мы будемъ говорить, что прямая встрѣчаетъ коническое сѣченіе *всегда въ двухъ точкахъ.* Напротивъ, если разстояніе r будетъ дано, то изъ уравненія (5) опредѣлится два значенія для угла α, которыя могутъ быть и дѣйствительными, равными и мнимыми. Въ обоихъ случаяхъ кривая имѣетъ двѣ безконечно-удаленныя точки, мы найдемъ прямыя, проходящія черезъ эти точки, т. е. ассимптоты кривой, полагая въ уравненіе (5) $r = \infty$, что даетъ:

$$a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha.\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 0 \tag{6}$$

откуда:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}} \tag{7}$$

Изъ этого выраженія видимъ, что двѣ ассимптоты будутъ дѣйствительныя, мнимыя или совпадающія, смотря потому будетъ-ли A_{33} величина отрицательная, положительная или нуль.

Слѣдовательно аналитическій признакъ для отличія коническихъ сѣченій есть слѣдующій:

$$\begin{aligned} A_{33} &> 0 \quad \text{эллипсъ.} \\ A_{33} &= 0 \quad \text{парабола.} \\ A_{33} &< 0 \quad \text{гипербола.} \end{aligned} \tag{8}$$

Условіе для параболы найдемъ изъ уравненія въ линейныхъ координатахъ:

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{13}\xi + 2A_{23}\eta + A_{33} = 0 \qquad (9)$$

Если безконечно-удаленная прямая касается коническаго сѣченія, то:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0$$

должны удовлетворять предъидущему уравненію, а это условіе требуетъ, чтобы:

$$A_{33} = 0$$

Изъ выраженія:

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a^2_{12}$$

видимъ, что только коэфиціенты у членовъ втораго измѣренія въ уравненіи (4) a_{11}, a_{22}, a_{12} служатъ къ отличію рода коническаго сѣченія.

Пр. 1. Какой родъ коническихъ сѣченій представляютъ уравненія:

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - 7y - 4 = 0$$

Отв. Здѣсь $A_{33} = 15 - 4 = 11$; эллипсъ.

Пр. 2. $2x^2 + xy - y^2 + 3x + y = 0$

Отв. $A_{33} = -2 - 1 = -3$; гипербола.

Пр. 3. $x^2 - 2xy + y^2 - x - y - 1 = 0$

Отв. $A_{33} = 1 - 1 = 0$; парабола.

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что при $A_{33} = 0$ члены втораго измѣренія въ (4) составляютъ полный квадратъ.

§ 237. Уравненіе (8) опредѣляетъ только направленіе ассимптотъ, но такъ какъ онѣ проходятъ черезъ центръ, то онѣ вполнѣ опредѣлены и мы можемъ написать ихъ уравненія. Приравнивая нулю члены втораго измѣренія въ уравненіи (4), найдемъ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \qquad (10)$$

откуда:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}}{a_{22}}$$

а это есть направленіе прямыхъ, идущихъ къ безконечно-удаленнымъ точкамъ на кривой. Слѣдовательно уравненіе этихъ прямыхъ есть (10). Розысканіе этихъ прямыхъ сводится на розысканіе отношенія координатъ безконечно-удаленныхъ точекъ. Въ самомъ дѣлѣ, сдѣлаемъ уравненіе (4) однороднымъ, полагая $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ вмѣсто x и y. Чтобы получить точки пересѣченія безконечно-удаленной прямой съ коническимъ сѣченіемъ надобно положить $x_3 = 0$, а это именно и даетъ уравненіе (10). Уравненія ассимптотъ получатся, написавъ уравненія прямыхъ, которыя-бы были па-

раллельны прямымъ (10) и проходили черезъ центръ кривой, коего координаты мы нашли выше (2).

Уравненіе (10) будетъ представлять ассимптоты, если начало координатъ находится въ центрѣ кривой.

Пр. 1. Въ кривой:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

которую назвали эллипсомъ, дѣйствительно имѣемъ:

$$A_{33}=\frac{1}{a^2b^2}>0$$

а уравненіе ассимптотъ будетъ:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{bi}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{bi}\right)=0$$

Пр. 2. Въ кривой:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

которую назвали гиперболой, имѣемъ:

$$A_{33}=-\frac{1}{a^2b^2}<0$$

а уравненіе ассимптотъ будетъ:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$$

Пр. 3. Въ кривой:

$$y^2-2px=0$$

которую назвали параболой, имѣемъ:

$$A_{33}=0$$

а уравненіе ассимптотъ будетъ:

$$y^2=0$$

это уравненіе даетъ только направленіе къ безконечно удаленной точкѣ повторенное два раза; а собственно ассимптотъ парабола не имѣетъ.

§ 238. Выше мы видѣли (§ 233), что поляра точки на безконечности есть діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды коническаго сѣченія, проведенныя параллельно прямой, соединяющей центръ съ точкою на безконечности, т. е. съ полюсомъ.

Если уравненіе коническаго сѣченія есть:

$$f = a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (11)$$

то поляра точки $(y_1y_2y_3)$ будетъ (§ 209, 58):

$$x_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0 \quad (12)$$

или:

$$x_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{12}y_3) + x_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3) +$$

$$+ x_3(a_{31}x_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3) = 0 \quad (13)$$

полагая въ этомъ уравненіи $\rho x_1 = x$, $\rho x_2 = y$, $\rho x_3 = 1$; $\rho y_1 = x_1$, $\rho y_2 = y_1$, $\rho y_3 = 1$ будемъ имѣть поляру точки (x_1y_1) въ декартовыхъ координатахъ:

$$x(a_{11}x_1 + a_{13}y_1 + a_{13}) + y(a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}) + a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} = 0 \quad (14)$$

Полагая $x_1 = r_1\cos\alpha_1$, $y_1 = r_1\sin\alpha_1$ это уравненіе сдѣлается:

$$x(a_{11}r_1\cos\alpha_1 + a_{12}r_1\sin\alpha_1 + a_{13}) + y(a_{21}r_1\cos\alpha_1 + a_{22}r_1\sin\alpha_1 + a_{23}) +$$

$$+ a_{31}r_1\cos\alpha_1 + a_{32}r_1\sin\alpha_1 + a_{33} = 0 \quad (15)$$

Если положимъ $r_1 = \infty$, то поляра сдѣлается діаметромъ, дѣлящимъ хорды, проведенныя въ направленіи α_1, именно:

$$x(a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1) + y(a_{21}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1) + a_{31}\cos\alpha_1 + a_{32}\sin\alpha_1 = 0 \quad (16)$$

или:

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31})\cos\alpha_1 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32})\sin\alpha_1 = 0 \quad (17)$$

или еще, если въ уравненіи (11) $\rho x_1 = x$, $\rho x_2 = y$, $\rho x_3 = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha_1 = 0 \quad (18)$$

это и есть уравненіе діаметра.

Если черезъ α означимъ уголъ, который діаметръ составляетъ съ осью абсциссъ, то изъ уравненія (16) найдемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1}{a_{12}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1} = -\frac{a_{11} + a_{12}\operatorname{tg}\alpha_1}{a_{12} + a_{22}\operatorname{tg}\alpha_1} \quad (19)$$

или:

$$a_{22}\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha_1 + a_{12}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1) + a_{11} = 0 \quad (20)$$

Сопряженными діаметрами называются такіе два діаметра, въ которыхъ точка, лежащая на безконечности, на одномъ изъ нихъ, есть полюсъ другаго, или, другими словами, хорды параллельныя одному изъ нихъ, дѣлятся пополамъ другимъ.

Такъ какъ уравненіе (20) симметрично относительно угловъ α и α_1, то изъ этого заключаемъ, что если направленіе хордъ будетъ α, то направленіе діаметра будетъ α_1, слѣдовательно углы α и α_1, связанные уравненіемъ (20) суть углы двухъ сопряженныхъ діаметровъ. Это уравненіе получится, если въ уравненіи (16) положимъ $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ и сдѣлаемъ $r = \infty$.

Это слѣдуетъ изъ опредѣленія сопряженныхъ діаметровъ, какъ поляръ точекъ, лежащихъ на безконечности.

Изъ формы уравненія (18) видно, что всѣ діаметры проходятъ черезъ пересѣченіе двухъ прямыхъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{21}$$

которыя пересѣкаются въ центрѣ кривой (§ 236).

Если $\alpha_1 = 0$, то діаметръ, дѣлящій пополамъ хорды параллельныя оси x, будетъ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, если-же $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, то діаметръ, дѣлящій хорды параллельныя оси y, будетъ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Если въ уравненіи (20) сдѣлаемъ $\alpha_1 = \alpha$, то оно сдѣлается:

$$a_{22}\,\mathrm{tg}^2\alpha + 2a_{12}\,\mathrm{tg}\,\alpha + a_{11} = 0 \tag{22}$$

а это уравненіе, дающее направленіе ассимптотъ (§ 237, 10), показываетъ, что ассимптоту можно разсматривать, какъ діаметръ самъ себѣ сопряженный.

Общія количественныя свойства коническихъ сѣченій.

§ 239. Всѣ выше выведенныя свойства коническихъ сѣченій относятся къ положенію; ниже слѣдующія относятся къ мѣрѣ, т. е. къ количественнымъ свойствамъ.

Предложеніе. Если чрезъ какую-нибудь точку O проведемъ двѣ сѣкущія, встрѣчающія коническое сѣченіе въ точкахъ R_1, R_2, S_1, S_2, то отношеніе:

$$\frac{OR_1 . OR_2}{OS_1 . OS_2}$$

будетъ величина постоянная, гдѣ бы нибыла взята точка O, лишь-бы направленія OR и OS были постоянныя.

Доказательство. Изъ § 236, замѣчая, что OR_1 и OR_2 суть корни уравненія (5), найдемъ:

$$OR_1 . OR_2 = \frac{a_{33}}{a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha.\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha}$$

и точно также:

$$OS_1 . OS_2 = \frac{a_{33}}{a_{11}\cos^2\alpha' + 2a_{12}\sin\alpha'.\cos\alpha' + a_{22}\sin^2\alpha'}$$

откуда:

$$\frac{OR_1 . OR_2}{OS_1 . OS_2} = \frac{a_{11}\cos^2\alpha' + 2a_{12}\sin\alpha'.\cos\alpha' + a_{22}\sin^2\alpha}{a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha.\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha}$$

но вторая часть этого уравненія есть величина постоянная, такъ какъ величины a_{11}, a_{12}, a_{22} при перенесеніи начала координатъ неизмѣняются, а α и α' не измѣняются, потому что направленіе, по условію, остается постояннымъ.

Это предложеніе можетъ быть выражено еще слѣдующимъ образомъ:

Если чрезъ двѣ данныя точки O_1 и O_2 будутъ проведены, какія-нибудь двѣ параллельныя линіи O_1R и O_2S, то отношеніе:

$$\frac{O_1R_1 . O_1R_2}{O_2S_1 . O_2S_2}$$

будетъ величина постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ, числитель и знаменатель предъидущей дроби, очевидно, суть:

$$\frac{a_{33}}{a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha.\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha}, \quad \frac{a'_{33}}{a_{11}.\cos^2\alpha + 2a_{12}\sin\alpha.\cos\alpha + a_{22}\sin^2\alpha}$$

откуда, ихъ отношеніе равно $a_{33} : a'_{33}$ — величина постоянная (a'_{33} новое значеніе коэфиціента a_{33} при перенесеніи начала координатъ изъ точки O_1 въ O_2).

Слѣдствіе 1. Пусть O_2 будетъ центръ кривой, то $O_2S_1 = O_2S_2$, а слѣдовательно $O_2S_1 . O_2S_2$ будетъ квадратъ полудіаметра параллельнаго сѣкущей O_1R. Откуда слѣдуетъ, что произведенія отрѣзковъ двухъ пересѣкающихся хордъ относятся между собою, какъ квадраты имъ параллельныхъ полудіаметровъ.

Слѣдствіе 2. Пусть O_1O_2 будетъ діаметръ коническаго сѣченія, а O_1R и O_2S параллельны діаметру сопряженному O_1O_2, то $O_1R_1 = O_1R_2$ и $O_2S_1 = O_2S_2$.

Если діаметръ O_1O_2 пересѣкаетъ кривую въ точкахъ a и b, то:

$$\frac{O_1R^2}{O_1a.O_1b} = \frac{\overline{O_2S}^2}{O_2a.O_2b}$$

т. е. квадраты полухордъ, сопряженныхъ діаметру O_1O_2, пропорціональны произведеніямъ отрѣзковъ, на которые эти хорды дѣлятъ діаметръ O_1O_2.

§ 240. Предъидущее предложеніе не имѣетъ мѣста въ томъ случаѣ, когда прямая OS_1 параллельна одной изъ прямыхъ встрѣчающихъ кривую, на безконечности, въ этомъ случаѣ отрѣзокъ $OS_2 = \infty$, и только OS_1 встрѣчаетъ кривую въ конечной точкѣ. Мы покажемъ, что въ этомъ случаѣ, отношеніе:

$$\frac{OS_1}{Or_1.Or_2}$$

есть величина постоянная. Для простоты возьмемъ OS за ось x, а OR за ось y.

Такъ какъ ось x параллельна прямой встрѣчающей кривую на безконечности, то въ уравненіи:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{23}$$

коэфиціентъ $a_{11} = 0$, слѣдовательно уравненіе кривой будетъ:

$$2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

полагая $y = 0$, найденный отрѣзокъ на оси x будетъ:

$$OS_1 = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$$

полагая $x = 0$ произведеніе отрѣзковъ на оси y будетъ:

$$OR_1.OR_2 = \frac{a_{33}}{a_{22}}$$

откуда:

$$\frac{OS_1}{OR_1.OR_2} = -\frac{a_{22}}{2a_{13}}$$

Перенесемъ теперь начало координатъ въ точку (x_1, y_1), оставивъ оси параллельными старымъ осямъ, то a_{22} неизмѣнится, а a_{13} сдѣлается $a_{12}y_1 + a_{13}$, слѣдовательно новое отношеніе будетъ:

$$-\frac{a_{22}}{2(a_{12}y_1 + a_{13})}$$

Если кривая будетъ парабола, то $a_{12}=0$, а слѣдовательно это отношеніе будетъ величина постоянная. Если же кривая будетъ гипербола, то это отношеніе будетъ величина постоянная только въ томъ случаѣ, когда y_1 будетъ величина постоянная.

Пр. 1. Составить уравненіе коническаго сѣченія, которое дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ x и y отрѣзки λ_1, λ_2, μ_1, μ_2?

Рѣшеніе. Если въ уравненіи (23) сдѣлаемъ послѣдовательно $x=0$, $y=0$, то найдемъ:

$$x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2=0\quad,\quad y^2-(\mu_1+\mu_2)y+\mu_1\mu_2=0$$

гдѣ:

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{2a_{13}}{a_{11}}\quad,\quad \lambda_1\lambda_2=\frac{a_{33}}{a_{11}}\quad,\quad \mu_1+\mu_2=-\frac{2a_{23}}{a_{22}}\quad,\quad \mu_1\mu_2=\frac{a_{33}}{a_{22}}$$

откуда искомое уравненіе будетъ:

$$\mu_1\mu_2x^2+2a_{12}xy+\lambda_1\lambda_2y^2-\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2)x-\lambda_1\lambda_2(\mu_1+\mu_2)y+\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2=0 \qquad (24)$$

Если коническое сѣченіе есть парабола, то:

$$a^2_{12}=\mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2\quad,\quad a_{12}=\pm\sqrt{\mu_1\mu_2\lambda_1\lambda_2}$$

слѣдовательно чрезъ четыре точки можно провести только двѣ параболы.

Пр. 2. Найти геометрическое мѣсто центровъ коническаго сѣченія, проходящаго чрезъ четыре данныя точки?

Рѣшеніе. Уравненіе (24) представляетъ коническое сѣченіе, проходящее чрезъ четыре данныя точки. Координаты центра опредѣляются уравненіями (§ 236, 1):

$$2\mu_1\mu_2x+2a_{12}y+\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2)=0\quad,\quad 2\lambda_1\lambda_2y+2a_{12}x-\lambda_1\lambda_2(\mu_1+\mu_2)=0$$

такъ какъ a_{12} остается произвольнымъ, то исключеніе его изъ этихъ уравненій и дастъ зависимость между координатами центровъ, именно:

$$2\mu_1\mu_2x^2-2\lambda_1\lambda_2y^2-\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2)x-\lambda_1\lambda_2(\mu_1+\mu_2)y=0$$

это коническое сѣченіе, которое проходитъ чрезъ пересѣченія каждой изъ трехъ паръ линій, которыя можно провесть чрезъ четыре данныя точки и чрезъ средину этихъ линій. Геометрическое мѣсто будетъ гипербола если $\lambda_1\lambda_2$ и $\mu_1\mu_2$ будутъ имѣть, каждая изъ паръ, одинаковые или разные знаки, въ противномъ случаѣ будемъ имѣть эллипсъ. Слѣдовательно эллипсъ будетъ въ томъ случаѣ, когда двѣ точки на одной изъ осей будутъ съ одной стороны начала, а другія двѣ съ противуположныхъ сторонъ. Другими словами, когда четыреугольникъ, образуемый четырьмя данными точками имѣетъ вогнутый уголъ. Это очевидно геометрически, такъ какъ около четыреугольника, имѣющаго вогнутый уголъ, ни эллипсъ, ни парабола, не могутъ быть описаны. Слѣдовательно описанное коническое сѣченіе должно быть гипербола, такъ что нѣкоторыя вершины четыреугольника должны лежать на различныхъ вѣтьвяхъ гиперболы. Откуда видимъ, что въ этомъ случаѣ описанное коническое сѣченіе должно быть всегда гипербола, а такъ какъ центръ гиперболы находится всегда въ конечномъ разстояніи, то геометрическое мѣсто центровъ будетъ эллипсъ. Въ другомъ случаѣ, т. е. если всѣ углы четыреугольника выпуклы, два положенія центра будутъ на *безконечности*, соотвѣтственно двумъ параболамъ, которыя можно описать около даннаго четыреугольника.

Каноническія формы коническихъ сѣченій.

§ 241. Теперь займемся упрощеніемъ общаго уравненія центральнаго коническаго сѣченія:

$$a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \qquad (25)$$

Для этого положимъ, что оно отнесено къ полярному координатному треугольнику. Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ $x_3 = 0$, то получимъ уравненіе:

$$a_{11}x^2_1 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x^2_2 = 0 \qquad (26)$$

которое есть произведеніе двухъ прямыхъ, соединяющихъ съ противуположной вершиной, точки пересѣченія кривой съ прямою $x_3 = 0$. Это уравненіе разлагается на два линейные множителя:

$$x_1 - \alpha x_2 = 0 \quad , \quad x_1 - \beta x_2 = 0$$

Но мы предположили, что координатный треугольникъ есть полярный, слѣдовательно эти линіи суть касательныя, а касательныя со сторонами полярнаго треугольника составляютъ гармоническую связку (§ 210), слѣдовательно $\beta = -\alpha$, и уравненіе (26) сдѣлается:

$$x^2_1 - \alpha^2 . x^2_2 = 0$$

Если это послѣднее уравненіе тождественно съ уравненіемъ (26), то въ уравненіи коническаго сѣченія (25) нѣтъ члена $2a_{12}x_1x_2$. Такое-же разсужденіе покажетъ, что въ уравненіи недостаетъ и членовъ $2a_{13}x_1x_3$, $2a_{23}x_2x_3$. Слѣдовательно уравненіе коническаго сѣченія заключаетъ только квадратные члены, т. е. оно будетъ:

$$a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 = 0 \qquad (27)$$

Въ этой формѣ уравненіе коническаго сѣченія можетъ быть представлено трижды безконечнымъ числомъ, такъ какъ выборъ полярнаго треугольника зависитъ, какъ мы видѣли, отъ трехъ произвольныхъ параметровъ, изъ коихъ каждый можетъ имѣть безконечное число значеній. Если теперь мы предположимъ, что одна изъ сторонъ координатнаго полярнаго треугольника, напримѣръ $x_3 = 0$, есть безконечно-удаленная прямая, то пересѣченіе другихъ двухъ сторонъ будетъ центръ кривой, а сами стороны, т. е. координатныя оси, будутъ сопряженные діаметры. Слѣдовательно мы должны только положить:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = 1$$

и уравненіе сдѣлается:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \qquad (28)$$

Но вообще въ немъ координатныя оси не прямоугольны.

§ 242. Сдѣлаемъ тѣже разсужденія относительно того-же коническаго сѣченія, но отнесеннаго къ линейнымъ координатамъ:

$$f'(\xi) = A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \quad (29)$$

Для этого положимъ, какъ и выше, что это уравненіе отнесено къ полярному треугольнику, коего вершины суть:

$$\xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_3 = 0$$

Если положимъ въ уравненіи (29) $\xi_3 = 0$, то получимъ уравненіе:

$$A_{11}\xi^2_1 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + A_{22}\xi^2_2 = 0 \quad (30)$$

которое есть произведеніе двухъ линейныхъ множителей:

$$\xi_1 - \alpha\xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \beta\xi_2 = 0 \quad (31)$$

слѣдовательно представляетъ двѣ точки касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ точки $\xi_3 = 0$ къ коническому сѣченію (29). Но такъ какъ, по условію, координатный треугольникъ есть полярный, то двѣ касательныя, со сторонами полярнаго треугольника, черезъ пересѣченіе которыхъ онѣ проходятъ, составляютъ гармоническую связку, слѣдовательно (§ 221):

$$\xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \alpha\xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_1 - \beta\xi_2 = 0$$

суть четыре гармоническія точки, а поэтому мы должны имѣть $\beta = -\alpha$, слѣдовательно уравненіе точекъ касанія будетъ:

$$\xi^2_1 - \alpha^2\xi^2_2 = 0$$

Но это есть уравненіе (30), слѣдовательно $A_{12} = 0$. Тоже разсужденіе покажетъ, что въ уравненіи (29), если оно отнесено къ полярному треугольнику, недостаетъ членовъ $2A_{13}\xi_1\xi_3$, $2A_{23}\xi_2\xi_3$. Слѣдовательно уравненіе коническаго сѣченія, отнесеннаго къ полярному треугольнику, будетъ:

$$A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 = 0 \quad (32)$$

Если одна изъ сторонъ полярнаго треугольника будетъ на безконечности, то будемъ имѣть:

$$\sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = 1$$

откуда уравненіе сдѣлается:

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33} = 0 \quad (33)$$

оно отнесено, очевидно, къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ и центру, какъ началу. Уравненія (28) и (33) центральныхъ коническихъ сѣченій суть самыя простыя въ обѣихъ системахъ координатъ.

§ 243. Остается только сдѣлать на самомъ дѣлѣ переходъ отъ общаго уравненія (25) къ (28).

Перенесемъ начало координатъ въ центръ. Такъ какъ центръ есть полюсъ безконечно-удаленной прямой, то оси x и y будутъ дѣлится гармонически кривою и безконечно-удаленною прямою, въ силу этого члены x_1x_3, x_2x_3, или x и y, исчезнуть, остается только сдѣлать поворотъ координатныхъ осей.

Перенесеніе начала координатъ въ центръ дѣлается подстановленіемъ:

$$\rho x_1 = x = x' + \alpha_1$$

$$\rho x_2 = y = y' + \beta_1$$

$$\rho x_3 = 1$$

гдѣ α_1 и β_1 суть координаты центра, слѣдовательно (§ 236, 2)

$$\alpha_1 = \frac{A_{13}}{A_{33}} \quad , \quad \beta_1 = \frac{A_{23}}{A_{33}}$$

но изъ теоріи опредѣлителей имѣемъ:

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13} = 0$$

$$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{23} = 0$$

$$a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + a_{33} = \frac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{A_{33}} = \frac{\Delta}{A_{33}} \qquad (34)$$

слѣдовательно:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = a_{11}x' + a_{12}y'$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = a_{21}x' + a_{22}y'$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = a_{31}x' + a_{32}y' + \frac{\Delta}{A_{33}}$$

Умножимъ первыя части этихъ уравненій соотвѣтственно на x, y, 1, а вторыя на $x' + \alpha_1$, $y' + \beta_1$, 1 и сложимъ, то найдемъ:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} =$$

$$= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0 \qquad (35)$$

Этимъ преобразованіемъ члены первой степени удалены, а второй степени остались безъ перемѣны. Здѣсь мы должны исключить тотъ случай, въ которомъ $A_{33}=0$, такъ какъ въ предъидущемъ уравненіи послѣдній членъ будетъ равенъ безконечности, и кривая будетъ имѣть центръ на безконечности. Напротивъ, уничтоженіе определителя Δ неизмѣняетъ нашихъ изслѣдованій, только ихъ геометрическій смыслъ будетъ различенъ. Этотъ послѣдній случай мы разсмотримъ ниже.

§ 244. Мы уже выше показали геометрически, что есть пара перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ (§ 235); теперь покажемъ это аналитически. Нашъ анализъ покажетъ, что существуетъ только одна пара такихъ діаметровъ.

Если сопряженные діаметры перпендикулярны, то $\alpha_1=\alpha+90^0$, а

$$\operatorname{tg}\alpha_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

подставляя это выраженіе въ (19), найдемъ:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\operatorname{tg}\alpha-1=0 \qquad (36)$$

Корни этого уравненія всегда дѣйствительны и даютъ направленіе сопряженныхъ перпендикулярныхъ діаметровъ.

Если вмѣсто $\operatorname{tg}\alpha$ поставимъ въ предъидущемъ уравненіи $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то найдемъ:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}} \qquad (37)$$

полагая $2\alpha=\beta$ будемъ имѣть:

$$\beta=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}\right) \qquad (38)$$

Откуда, найдемъ величины для α:

$$\alpha=\frac{\beta}{2}\quad,\quad\alpha=\frac{\beta}{2}+90^0\quad,\quad\alpha=\frac{\beta}{2}+180^0\quad,\quad\alpha=\frac{\beta}{2}+270^0$$

которыя отличаются только на 90^0, слѣдовательно даютъ одну и туже систему, разсматриваемую иначе, т. е. *есть только одна система прямоугольныхъ сопряженныхъ діаметровъ.* Эти діаметры называютъ *осями* коническаго сѣченія. Здѣсь представляется только одно исключеніе, это когда имѣемъ въ одно время:

$$a_{11}-a_{22}=0\quad,\quad a_{12}=0$$

Коническое сѣченіе имѣетъ тогда форму:

$$x^2+y^2=c$$

слѣдовательно есть кругъ. Въ этомъ случаѣ уголъ α остается неопредѣленнымъ, слѣдовательно есть безчисленное множество сопряженныхъ перпендикулярныхъ діаметровъ, и, дѣйствительно, въ кругѣ каждая пара перпендикулярныхъ діаметровъ есть сопряженная. Если въ уравненіи вмѣсто $\operatorname{tg}\alpha$ подставимъ $\frac{y}{x}$, то найдемъ уравненіе осей:

$$a_{22}y^2+(a_{11}-a_{22})xy-a_{12}x^2=0$$

или равнодѣлящихъ углы между ассимптотами.

§ 245. Чтобы сопряженные перпендикулярные діаметры сдѣлать координатными осями надобно поворотить старыя оси на уголъ α, опредѣленный уравненіемъ (37), а для этого надобно положить (§ 35, 6):

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{aligned} \tag{39}$$

Если эти выраженія подставимъ въ уравненіе (35), то оно должно принять форму уравненія (28), если въ немъ сдѣлаемъ $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=1$. Слѣдовательно послѣ подстановленія въ уравненіе:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+\frac{\Delta}{A_{33}}=0 \tag{40}$$

коэфиціентъ при xy долженъ быть равенъ нулю, что и имѣетъ мѣсто въ силу условія (19). Въ самомъ дѣлѣ, этотъ коэфиціентъ есть:

$$\cos\alpha\,(a_{22}\sin\alpha+a_{12}\cos\alpha)-\sin\alpha\,(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)=0$$

слѣдовательно можемъ положить:

$$\frac{a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a_{12}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha}=\lambda \tag{41}$$

или:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha&=0 \\ a_{12}\cos\alpha+(a_{22}-\lambda)\sin\alpha&=0 \end{aligned} \tag{42}$$

Исключая между этими уравненіями $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, найдемъ квадратное уравненіе въ λ, котораго корни и будутъ коэфиціенты при x'^2 и y'^2 въ преобразованномъ уравненіи. Это исключеніе даетъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda\ , & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{43}$$

или:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0 \tag{44}$$

Означимъ корни этого уравненія черезъ λ_1, λ_2, каждому изъ нихъ будутъ соотвѣтствовать въ силу (41) величины α, которыя будутъ различатся на 90^0, если членъ $x'y'$ исчезъ. Поэтому будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha&=\lambda_1\cos\alpha \\ a_{12}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha&=\lambda_1\sin\alpha \\ a_{11}\sin\alpha-a_{12}\cos\alpha&=\lambda_2\sin\alpha \\ a_{12}\sin\alpha-a_{22}\cos\alpha&=-\lambda_2\cos\alpha \end{aligned} \tag{45}$$

Умножая третее изъ этихъ уравненій на x, а четвертое на y и складывая, получимъ, соображаясь съ (39):

$$(a_{11}\sin\alpha-a_{12}\cos\alpha)x+(a_{12}\sin\alpha-a_{22}\cos\alpha)y=-\lambda_2 y' \tag{46}$$

точно также изъ перваго и втораго получимъ:

$$(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)x+(a_{12}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha)y=\lambda_1 x' \tag{47}$$

Если наконецъ умножимъ (46) на:

$$-x\sin\alpha+y\cos\alpha=y'$$

а (47) на:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=x'$$

и результаты вычтемъ, то найдемъ:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$$

Слѣдовательно уравненіе коническаго сѣченія получитъ самую простую форму:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\frac{\Delta}{A_{33}}=0$$

Итакъ корни уравненія (44) дѣйствительно даютъ коэфиціенты въ новомъ уравненіи. Въ исключительномъ случаѣ, который указали выше,

именно, когда $a_{11}=a_{22}$ и $a_{12}=0$, корни λ_1, λ_2 остаются опредѣленными, но дѣлаются только равными.

Мы выше видѣли, что всегда есть пара перпендикулярныхъ сопряженныхъ діаметровъ, если только Δ и A_{33} не равны нулю. Но легко показать, что уравненіе (44) всегда имѣетъ дѣйствительные корни.

Въ самомъ дѣлѣ, оно даетъ:

$$\lambda=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)^2+a^2_{12}}$$

Изъ этого выраженія видимъ, что подрадикальная величина не можетъ быть отрицательной величиной, если только коэфиціенты въ уравненіи коническаго сѣченія суть величины дѣйствительныя.

§ 246. Преобразованіе уравменія коническаго сѣченія:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\frac{\Delta}{A_{33}}=0 \tag{48}$$

въ форму:

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\frac{\Delta}{A_{33}}=0 \tag{49}$$

можно сдѣлать гораздо проще способомъ Буля слѣдующимъ образомъ: если уравненіе (48) преобразуемъ подстановленіемъ (39), коего модуль преобразованія равенъ единицѣ, то будемъ имѣть:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\frac{\Delta}{A_{33}}=Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+\frac{\Delta}{A_{33}} \tag{50}$$

или:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2 \tag{51}$$

гдѣ A, B, C суть функціи коэфиціентовъ a_{11}, a_{12}, a_{22} и $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Но мы имѣемъ всегда:

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2$$

такъ какъ каждое изъ этихъ выраженій есть разстояніе начала координатъ отъ точки (xy) или $(x'y')$.

Если къ обѣимъ частямъ (51) прибавимъ по:

$$\lambda(x^2+y^2) \quad \text{и} \quad \lambda(x'^2+y'^2)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэфиціентъ, то найдемъ:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\lambda(x^2+y^2)=Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+\lambda(x'^2+y'^2)$$

или:

$$(a_{11}+\lambda)x^2+2a_{12}xy+(a_{22}+\lambda)y^2=(A+\lambda)x'^2+2Bx'y'+(C+\lambda)y'^2$$

По свойству инваріантовъ (§ 192, пр. 3) будемъ имѣть:

$$(a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda)-a^2_{12}=(A+\lambda)(C+\lambda)-B^2 \qquad (52)$$

такъ какъ это уравненіе должно имѣть мѣсто при всѣхъ значеніяхъ λ, то приравнивая коэфиціенты при λ, найдемъ:

$$A+C=a_{11}+a_{22}$$

$$AC-B^2=a_{11}a_{22}-a^2_{12}$$

Если выберемъ направленіе новыхъ координатныхъ осей такъ, чтобы $B=0$, то будемъ имѣть:

$$A+C=a_{11}+a_{22}$$

$$AC=a_{11}a_{22}-a^2_{12}$$

Имѣя эти уравненія, получимъ уравненіе:

$$t^2-(a_{11}+a_{22})t+(a_{11}a_{22}-a^2_{12})=0 \qquad (53)$$

котораго корни суть A и C, и уравненіе (50) сдѣлается:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\frac{\Delta}{A_{33}}=Ax'^2+Cy'^2+\frac{\Delta}{A_{33}}$$

Пр. 1. Найти оси эллипса:

$$14x^2-4xy+11y^2=60$$

и преобразовать его уравненіе къ осямъ.

Такъ какъ оси суть равнодѣлящія углы между ассимптотами, а ассимптоты суть:

$$14x^2-4xy+11y^2=0$$

то уравненіе осей будетъ:

$$4x^2+6xy-4y^2=0$$

или:

$$(2x-y)(x+2y)=0$$

Въ этомъ примѣрѣ имѣемъ:

$$\lambda_1+\lambda_2=25 \quad , \quad \lambda_1\lambda_2=150$$

откуда $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 10$, а уравненіе преобразуется въ:

$$3x^2 + 2y^2 = 12$$

Пр. 2. Преобразовать уравненіе гиперболы:

$$11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156$$

здѣсь:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -13 \quad , \quad \lambda_1\lambda_2 = -2028$$

откуда:

$$\lambda_1 = 39 \quad , \quad \lambda_2 = -52$$

а потому:

$$3x^2 - 4y = 12$$

§ 247. Посмотримъ теперь, какія кривыя представляетъ уравненіе:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0$$

Это уравненіе можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{x^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}}} + \frac{y^2}{-\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}}} = 1$$

Уравненіе въ этой формѣ даетъ сейчасъ классификацію кривыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, произведеніе знаменателей:

$$\frac{\Delta^2}{\lambda_1\lambda_2 A^2_{33}}$$

всегда имѣетъ, какъ видно, знакъ произведенія $\lambda_1\lambda_2$, а это произведеніе есть:

$$\lambda_1\lambda_2 = A_{33} = a_{11}a_{22} - a^2_{12}$$

такъ какъ λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (53).

Слѣдовательно классифицировать кривыя по знаку произведенія коэфиціентовъ при x^2 и y^2 все равно, что классифицировать по знаку A_{33}.

Вотъ возможные случаи:

Случай 1. $A_{33} > 0$; λ_1 и λ_2 имѣютъ одинаковые знаки.

1. $-\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = a^2$, $-\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = b^2$; эллипсъ.

2. $-\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = -a^2$, $-\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = -b^2$; эллипсъ мнимый.

Случай 2. $A_{33} < 0$; λ_1 и λ_2 имѣютъ противные знаки.

1. $-\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = a^2$, $-\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = -b^2$; гипербола, встрѣчаемая осью x въ двухъ точкахъ.

2. $-\frac{\Delta}{\lambda_1 A_{33}} = -a^2$, $-\frac{\Delta}{\lambda_2 A_{33}} = b^2$; гипербола, встрѣчаемая осью y въ двухъ точкахъ.

Эти двѣ гиперболы отличаются только направленіемъ осей. Слѣдовательно мы находимъ только двѣ кривыя (дѣйствительныя), имѣющія центръ, которыя представляются алгебраически уравненіемъ второй степени. Что касается мнимаго эллипса, то можно только замѣтить, что его центръ и оси суть дѣйствительные, точно также, какъ и его поляры дѣйствительныхъ полюсовъ.

Эллипсъ.

§ 248. Изъ предъидущаго параграфа видимъ, что эллипсъ и гипербола, отнесенные къ центру, какъ началу координатъ и къ своимъ осямъ, имѣютъ самую простую алгебраическую форму:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Изъ этихъ уравненій видимъ, что гиперболу можно разсматривать, какъ частный случай эллипса, когда одна изъ его осей сдѣлается мнимой. Если b измѣнимъ въ эллипсѣ на bi, то получимъ гиперболу:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

встрѣчающую ось x, а если измѣнимъ a на ai, то получимъ гиперболу:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

встрѣчающую ось y.

Такую простую форму, какъ эллипсъ, такъ и гипербола, могутъ получить, будучи отнесены къ косоугольнымъ координатамъ, когда за начало будетъ взять опять центръ, а за координатныя оси, пара сопряженныхъ діаметровъ.

Такъ какъ пара сопряженныхъ діаметровъ съ безконечно-удаленной

прямой образуютъ полярный треугольникъ, относительно разсматриваемаго центральнаго коническаго сѣченія, то его форма:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{54}$$

не будетъ измѣнятся, если за косоугольныя оси выберемъ пару сопряженныхъ діаметровъ. Такой переходъ отъ прямоугольныхъ координатныхъ осей къ косоугольнымъ мы сдѣлаемъ съ помощью формулъ (§ 36, 5):

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\beta \\ y &= x'\sin\alpha + y'\sin\beta \end{aligned} \tag{55}$$

гдѣ $\beta-\alpha=\varphi$ есть уголъ между сопряженными діаметрами. Послѣ подстановленія уравненіе (54) сдѣлается:

$$\frac{x'^2}{a^2_1}+\frac{y'^2}{b^2_1}=1 \tag{56}$$

такъ какъ коэфиціентъ при $x'y'$, по свойству полярнаго, какъ координатнаго треугольника, долженъ быть равенъ нулю, именно:

$$\frac{\cos\alpha\,.\cos\beta}{a^2}+\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{b^2}=0 \tag{57}$$

а a_1 и b_1 будутъ даны уравненіями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2_1} &= \frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2} \\ \frac{1}{b^2_1} &= \frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2} \end{aligned} \tag{58}$$

Полагая въ уравненіи (56) сначала $x'=0$, а потомъ $y'=0$, найдемъ:

$$y'^2=b^2_1 \quad , \quad x'^2=a^2_1$$

слѣдовательно a_1 и b_1 суть длины сопряженныхъ діаметровъ, считая отъ центра до встрѣчи ихъ съ кривою.

Съ помощью уравненій (58) можемъ вычислить эти длины, имѣя длину a и b. Кромѣ того уравненіе (57) есть ничто иное, какъ уравненіе (§ 238, 19), которое даетъ зависимость между углами, составленными сопряженными діаметрами и осью x.

Такъ какъ $\varphi = \beta - \alpha$, то имѣемъ два уравненія:

$$\cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta = \cos\varphi$$

и

$$\frac{\cos\alpha . \cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha . \sin\beta}{b^2} = 0$$

или:

$$\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

откуда:

$$\cos\alpha . \cos\beta = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\cos\varphi \quad , \quad \sin\alpha . \sin\beta = -\frac{b^2}{a^2 - b^2}\cos\varphi$$

вычитая, найдемъ:

$$\cos(\beta + \alpha) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\cos\varphi \tag{59}$$

Это уравненіе даетъ двѣ величины для $\alpha + \beta$ равныя, но съ противными знаками:

$$\alpha + \beta = \pm u$$

но мы имѣемъ:

$$\beta - \alpha = \varphi$$

слѣдовательно:

$$\alpha = \frac{-\varphi \pm u}{2} \quad , \quad \beta = \frac{\varphi \pm u}{2}$$

Изъ этихъ выраженій получимъ, какъ и должно было предвидѣть, по причинѣ симметріи кривой относительно осей, двѣ системы сопряженныхъ діаметровъ, изъ коихъ одна, относительно осей, есть воспроизведеніе другой. И въ самомъ дѣлѣ, вторая величина β равна первой α, а вторая величина α равна первой β и обратно.

Въ эллипсѣ эти рѣшенія будутъ дѣйствительны, подъ условіемъ:

$$\cos\varphi \overline{\overline{<}} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

что даетъ предѣлъ угла φ и найменьшій уголъ, который могутъ составлять сопряженные діаметры. Предѣлъ этотъ даетъ уравненія:

$$\cos\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

или:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$$

Изъ этого видимъ, что сопряженные діаметры суть діагонали прямоугольника, описаннаго около эллипса параллельно осямъ. Уголъ между діагоналями дѣлится осями пополамъ.

Но въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$\cos(\alpha+\beta)=1$$

слѣдовательно:

$$\alpha+\beta=0$$

т. е. двѣ діагонали симметрично расположены около осей. Измѣняя b на bi будемъ имѣть для гиперболы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos\varphi$$

Здѣсь имѣемъ всегда $a^2>b^2$, поэтому никакого ограниченія быть не можетъ и мы знаемъ, что φ можетъ быть равно нулю, такъ какъ каждая ассимптота есть сама себѣ сопряженный діаметръ (§ 247).

§ 249. Задача эта рѣшается еще слѣдующимъ образомъ: прямо ищутся величины a^2_1 и b^2_1 съ помощью квадратнаго уравненія подобнаго тому, которое служитъ къ разысканію осей a^2 и b^2. Мы видѣли (57 и 58), что:

$$\frac{1}{a^2_1}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{b^2}$$

$$0=\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{a^2}+\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{b^2}$$

$$\frac{1}{b^2_1}=\frac{\cos^2\beta}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}$$

Умножимъ разъ первое и второе уравненіе на $\sin\beta$ и $-\sin\alpha$; а другой разъ на $-\cos\beta$ и $\cos\alpha$ и сложимъ, то получимъ:

$$\frac{\sin\beta}{a^2_1}=\frac{\cos\alpha}{a^2}\sin\varphi\quad,\quad-\frac{\cos\beta}{a^2_1}=\frac{\sin\alpha}{b^2}\sin\varphi$$

Умножая второе и третее на $\sin\beta$ и $-\sin\alpha$, а потомъ на $-\cos\beta$ и $\cos\alpha$ и складывая, какъ выше, найдемъ:

$$-\frac{\sin\alpha}{b^2_1}=\frac{\cos\beta}{a^2}\sin\varphi\quad,\quad\frac{\cos\alpha}{b^2_1}=\frac{\sin\beta}{b^2}\sin\varphi$$

Если теперь перемножимъ первое съ четвертымъ, а второе съ третьимъ, и эти произведенія вычтемъ, то получимъ:

$$a_1^2 b_1^2 \sin^2\varphi = a^2 b^2 \qquad (60)$$

откуда:

$$a_1 b_1 \sin\varphi = ab$$

или:

$$4a_1 b_1 \sin\varphi = 4ab$$

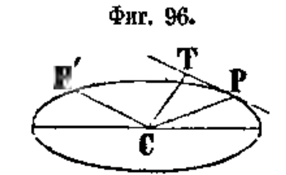
Но $4ab$ есть площадь прямоугольника, описаннаго около эллипса параллельно осямъ, а $4a_1 b_1 \sin\varphi$ есть площадь параллелограма, описаннаго около эллипса параллельно діаметрамъ a_1 и b_1. Слѣдовательно, площадь параллелограма, описаннаго около эллипса параллельно сопряженнымъ діаметрамъ, есть величина постоянная. Откуда $\sin\varphi$, т. е. sin угла между сопряженными діаметрами, будетъ:

$$\sin\varphi = \frac{ab}{a_1 b_1} \qquad (61)$$

Такъ какъ $a_1 \sin\varphi$ есть длина перпендикуляра $CT = p$ (фиг. 96), опущеннаго изъ центра эллипса на касательную PT въ точкѣ P, которая параллельна сопряженному діаметру $CP' = b_1$, то:

$$p = \frac{ab}{b_1} \qquad (62)$$

Если уравненія, выведенныя изъ уравненій (57) и (58) напишемъ въ формѣ:



Фиг. 96.

$$a^2 \sin\beta = a_1^2 \cos\alpha . \sin\varphi \quad , \quad b^2 \cos\beta = -a_1^2 \sin\alpha . \sin\varphi$$

$$a^2 \sin\alpha = -b_1^2 \cos\beta . \sin\varphi \quad , \quad b^2 \cos\alpha = b_1^2 \sin\beta . \sin\varphi$$

и умножимъ первыя два слѣва на $\cos\alpha$ и $-\cos\beta$, а вторыя справа на $-\sin\alpha$, $\sin\beta$ и сложимъ, то найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a_1^2 \cos^2\alpha + b_1^2 \cos^2\beta \\ b^2 &= a_1^2 \sin^2\alpha + b_1^2 \sin^2\beta \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

откуда, складывая, получимъ:

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2 \qquad (64)$$

т. е. что сумма квадратовъ сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная.

Если означимъ чрезъ (x_1, y_1) координаты конца діаметра a_1, то легко найти длины сопряженныхъ діаметровъ a_1 и b_1 въ функціи абсциссы x_1.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ $x_1 = a_1 \cos\alpha$, $y_1 = a_1 \sin\alpha$; подставляя въ (63), найдемъ:

$$a^2 = x^2_1 + b^2_1 \cos^2\beta$$

$$b^2 = y^2_1 + b^2_1 \sin^2\beta$$

откуда, складывая:

$$a^2 + b^2 = x^2_1 + y^2_1 + b^2_1$$

но:

$$y^2_1 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2_1)$$

слѣдовательно:

$$b^2_1 = a^2 - e^2x^2_1 \quad , \quad a^2_1 = b^2 + e^2x^2_1 \tag{65}$$

гдѣ (§ 13):

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

Складывая эти два выраженія, найдемъ уравненіе (64).

Уравненія (60) и (64) даютъ возможность построить квадратное уравненіе, котораго корнями будутъ a^2_1 и b^2_1. Это уравненіе есть:

$$z^2 - (a^2 + b^2)\, z + \frac{a^2b^2}{\sin^2\varphi} = 0 \tag{66}$$

Если оси a и b кривой извѣстны, то для каждой величины угла φ это уравненіе даетъ длину сопряженныхъ діаметровъ. Въ самомъ дѣлѣ, корни этого уравненія суть:

$$\left.\begin{aligned} a^2_1 &= \frac{a^2 + b^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2b^2}{\sin^2\varphi}} \\ b^2_1 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - \frac{a^2b^2}{\sin^2\varphi}} \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Имѣя, такимъ образомъ, a^2_1 и b^2_1, уравненія (58) дадутъ углы α и β.

$$\cos^2\alpha = \frac{\dfrac{1}{a^2_1} - \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}} \quad , \quad \cos^2\beta = \frac{\dfrac{1}{b^2_1} - \dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a^2_1}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}} \quad , \quad \sin^2\beta = \frac{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2_1}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}}$$

Если въ выраженіяхъ a^2_1 и b^2_1 приравняемъ нулю подкоренную величину, то a^2_1 будетъ равно b^2_1, т. е. сопряженные діаметры будутъ равны, но при этомъ будемъ имѣть:

$$\sin\varphi = \frac{2ab}{a^2+b^2} \tag{68}$$

т. е. наименьшій уголъ между сопряженными діаметрами. Въ этомъ случаѣ уравненіе эллипса будетъ:

$$x^2+y^2=a^2_1 \tag{69}$$

Слѣдовательно уравненіе эллипса, отнесеннаго къ двумъ равнымъ сопряженнымъ діаметрамъ, будетъ имѣть форму уравненія круга, отнесеннаго къ прямоугольнымъ осямъ, имѣющимъ начало въ центрѣ.

§ 250. Мы видѣли, что углы, которые сопряженные діаметры составляютъ съ осью x связаны уравненіемъ:

$$\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{a^2}+\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{b^2}=0$$

откуда:

$$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta=-\frac{b^2}{a^2} \tag{70}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что если одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ составляетъ съ осью x острый уголъ, то другой составляетъ тупой, т. е. сопряженные діаметры въ эллипсѣ лежатъ съ различныхъ сторонъ малой полуоси.

Если x_1, y_1 суть координаты точки, въ которой, какой-нибудь, діаметръ эллипса встрѣчаетъ кривую, то:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{y_1}{x_1}$$

гдѣ β есть уголъ, который этотъ діаметръ составляетъ съ осью x.

Если сопряженный ему діаметръ составляетъ съ осью x уголъ α, то имѣемъ:

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha$$

если x и y суть скользящія координаты этого діаметра. Слѣдовательно будемъ имѣть уравненіе сопряженнаго діаметра діаметру, составляющему

съ осью x уголъ β, или коего координаты точки пересѣченія съ эллипсомъ суть $(x_1 y_1)$:

$$\frac{yy_1}{xx_1} = -\frac{b^2}{a^2}$$

или:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 0 \tag{71}$$

§ 251. *Дополнительныя хорды.* Если двѣ прямыя, проходящія черезъ концы большой оси a, встрѣчаются на эллипсѣ, то онѣ параллельны сопряженнымъ діаметрамъ и отсѣкаютъ отъ малой полуоси, считая отъ начала, отрѣзки, коихъ произведеніе равно b^2.

Если уравненіе эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

напишемъ въ формѣ:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

то можно положить:

$$\frac{y}{b} = \lambda\left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэфиціентъ. Очевидно, что первая изъ этихъ прямыхъ проходитъ черезъ точку $(a, 0)$, а вторая черезъ точку $(-a, 0)$, т. е. черезъ концы большой оси. Далѣе эти прямыя встрѣчаются на эллипсѣ, такъ какъ, перемножая ихъ уравненія, найдемъ уравненіе эллипса.

Если означимъ черезъ α и β углы, которые онѣ составляютъ съ осью x, то найдемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\lambda b}{a} \quad , \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{\lambda a}$$

откуда:

$$\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

а это зависимость между углами сопряженныхъ діаметровъ. Чтобы получить отрѣзки, дѣлаемые на малой оси этими прямыми, надобно положить въ ихъ уравненіяхъ $x = 0$, что даетъ:

$$y_1 = \lambda b \quad , \quad y_2 = \frac{b}{\lambda}$$

откуда, перемножая, найдемъ:

$$y_1 y_2 = b^2$$

Точно также можно показать, что прямыя, проходящія чрезъ концы малой оси и встрѣчающіяся на эллипсѣ также параллельны сопряженнымъ діаметрамъ и дѣлаютъ на большой оси, считая отъ начала, отрѣзки, коихъ произведеніе равно a^2. Съ помощью этой теоремы легко построить сопряженный діаметръ данному діаметру. Для этого черезъ конецъ большой оси нужно провесть параллельную данному діаметру до встрѣчи съ эллипсомъ, точку встрѣчи соединить съ другимъ концомъ большой оси, наконецъ черезъ центръ эллипса провесть параллельную этой послѣдней прямой—это и будетъ, въ силу предъидущей теоремы, діаметръ сопряженный данному.

Двѣ прямыя, проходящія черезъ концы, какого-нибудь, діаметра и пересѣкающіяся на эллипсѣ, параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ; онѣ называются *дополнительными хордами.*

§ 252. *Задача.* Опредѣлить предѣлы, между которыми измѣняется уголъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ и построить два сопряжемые діаметра, образующіе, между собой, данный уголъ?

Рѣшеніе. Проведемъ черезъ концы большой оси дополнительныя хорды, которыхъ уравненія суть:

$$\frac{y}{b} = \lambda\left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

Пусть φ будетъ уголъ, составленный этими прямыми или сопряженными діаметрами параллельными хордамъ. Мы будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{b\lambda}{a} - \frac{b}{\lambda a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = -\frac{ab}{a^2 - b^2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$$

но:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{\frac{y}{b}}{1 - \frac{x}{a}} + \frac{\frac{y}{b}}{1 + \frac{x}{a}} = \frac{\frac{2y}{b}}{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2b}{y}$$

слѣдовательно:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)y} \tag{72}$$

когда y измѣняется отъ 0 до $+b$, то абсолютное значеніе втораго члена уменьшается и тупой уголъ φ увеличивается, онъ получаетъ значеніе maximum при $y=b$; при этомъ предѣлѣ имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2ab}{a^2-b^2} \tag{73}$$

и соотвѣтствующіе діаметры параллельны дополнительнымъ хордомъ, опирающимся на концы малой оси.

Значеніе minimum угла φ, соотвѣтствующее $y=0$, есть уголъ между осями, т. е. прямой.

Чтобы опредѣлить сопряженные діаметры составляющіе между собою данный уголъ, заключенный между предъидущими предѣлами, проводятъ черезъ центръ, какой-нибудь, діаметръ и описываютъ на этомъ діаметрѣ сегментъ, вмѣщающій данный уголъ. Окружность встрѣтитъ эллипсъ въ нѣкоторой точкѣ M. Діаметры параллельные дополнительнымъ хордамъ, которые опираются въ эту точку будутъ сопряженные и образуютъ между собой данный уголъ. Направленіе осей найдется также, описывая полуокружность на какомъ-нибудь діаметрѣ. Дополнительныя хорды, соотвѣтствующія точкѣ пересѣченія круга и эллипса, перпендикулярны и параллельны осямъ кривой.

Задача. Найти координаты (x_2y_2) конца діаметра, сопряженнаго діаметру проходящему через точку (x_1y_1).

Рѣшеніе. Очевидно онѣ найдутся опредѣляя x, y изъ уравненій:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$

что даетъ:

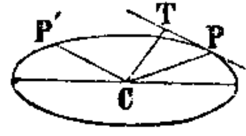
$$x_2 = \pm\frac{a}{b}y_1 \quad , \quad y_2=\mp\frac{b}{a}x_1 \tag{74}$$

§ 253. *Поляра и касательная.* Уравненіе:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \tag{75}$$

будетъ поляра точки x_1y_1, полюса, если эта точка находится внѣ кривой. Если же эта точка находится на кривой, то это будетъ касательная.

Фиг. 97.



Если это уравненіе сравнимъ съ уравненіемъ (71), то легко видѣть, что діаметръ сопряженный діаметру, проходящему черезъ точку x_1y_1 параллеленъ касательной къ эллипсу въ точкѣ (x_1y_1) $PT \parallel P'C$ (фиг. 97).

Въ § 16 мы видѣли, что координаты фокуса суть $(c, 0)$, а уравненіе директрисы, одной или другой:

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \tag{76}$$

Если въ уравненіи (75) положимъ $x_1 = \pm c$, $y_1 = 0$, то найдемъ:

$$x = \pm \frac{a^2}{c}$$

т. е. поляра фокуса есть директриса. Слѣдовательно, *всякая прямая, проходящая черезъ фокусъ дѣлится, кривою и директрисою гармонически.*

§ 254. *Задача.* Найти уравненіе пары касательныхъ къ эллипсу, проведенныхъ чрезъ данную точку $(x_1 y_1)$?

Рѣшеніе. Соображаясь съ (§ 208, 55), найдемъ:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} - 1\right) = \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2 \tag{77}$$

Если чрезъ φ означимъ уголъ составленный этими касательными, то будемъ имѣть (§ 176):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2ab\sqrt{\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} - 1}}{x^2_1 + y^2_1 - a^2 - b^2} \tag{78}$$

Полагая:

$$x^2_1 + y^2_1 = a^2 + b^2$$

будемъ имѣть $\varphi = \frac{\pi}{2}$, слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія перпендикулярныхъ между собою касательныхъ къ эллипсу, есть кругъ. Вообще же геометрическое мѣсто будетъ кривая четвертой степени.

§ 255. *Задача.* Найти длину перпендикуляра опущеннаго изъ центра эллипса на данную касательную въ точкѣ (x_1, y_1)?

Рѣшеніе. Сравнивая уравненіе касательной:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{79}$$

съ уравненіемъ:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$

найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{\cos \alpha}{p} \quad , \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{\sin \alpha}{p}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе эллипса, получимъ:

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha \tag{80}$$

Слѣдовательно уравненіе касательной будетъ:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}=0 \tag{81}$$

Длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (x', y') на касательную, очевидно будетъ:

$$x'\cos\alpha+y'\sin\alpha-\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha} \tag{82}$$

Пр. 1. Если двѣ данныя параллельныя касательныя къ эллипсу пересѣкаются, какою-нибудь третею, то площадь прямоугольника построеннаго на отрѣзкахъ, отсѣкаемыхъ этой послѣдней касательной отъ первыхъ двухъ, есть величина постоянная?

Доказательство. Возьмемъ за координатныя оси діаметръ параллельный даннымъ касательнымъ и ему сопряженный, то уравненія эллипса и касательной будутъ:

$$\frac{x^2}{a^2_1}+\frac{y^2}{b^2_1}=1 \quad , \quad \frac{xx_1}{a^2_1}+\frac{yy_1}{b^2_1}=1$$

гдѣ a_1 и b_1 сопряженные полудіаметры. Полагая $x=a_1$ и $x=-a_1$ въ уравненіи касательной, найдемъ отрѣзки на данныхъ двухъ касательныхъ:

$$y=\frac{b^2_1}{y_1}\left(1-\frac{x_1}{a_1}\right) \quad , \quad y=\frac{b^2_1}{y_1}\left(1+\frac{x_1}{a_1}\right)$$

коихъ произведеніе:

$$\frac{b^4_1}{y^2_1}\left(1-\frac{x^2_1}{a^2_1}\right)=b^2_1$$

величина постоянная.

Пр. 2. Показать, что въ томъ же примѣрѣ площадь прямоугольника, построеннаго на отрѣзкахъ третей касательной, равна квадрату полудіаметра параллельнаго этой касательной?

Рѣшеніе. Какъ и предъидущее.

Пр. 3. Если какая-нибудь касательная пересѣкаетъ два какіе-нибудь сопряженные діаметра, то площадь прямоугольника, построеннаго на ея отрѣзкахъ, равна квадрату ей параллельнаго полудіаметра?

Рѣшеніе. Уравненія какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметровъ суть:

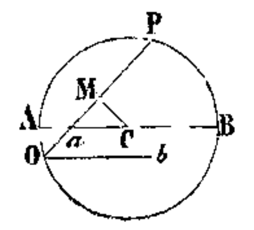
$$y=\frac{y_1}{x_1}.x \quad , \quad \frac{xx_1}{a^2_1}+\frac{yy_1}{b^2_1}=0$$

полагая $x=a_1$, найдемъ отрѣзки:

$$y=\frac{y_1}{x_1}a_1 \quad \text{и} \quad y=-\frac{b^2_1}{a_1}\frac{x_1}{y_1}$$

коихъ произведеніе равно b^2_1.

Фиг. 98.



Пр. 4. Даны величина и положеніе двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ Oa и Ob центральнаго коническаго сѣченія (фиг.98); опредѣлить положеніе осей?

Рѣшеніе. Чрезъ конецъ a одного изъ діаметровъ проведемъ прямую параллельную другому, эта прямая будетъ касательная къ коническому сѣченію. На Oa возьмемъ точку P такъ, чтобы:

$$Oa.aP=Ob^2$$

и при томъ для эллипса на продолженіи Oa, а въ противупо-

ложномъ направленіи для гиперболы. Опишемъ кругъ, имѣющій центръ на aO и проходящій чрезъ O и P. Очевидно OA и OB будутъ искомыя оси кривой. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$Aa \,.\, aB = Oa \,.\, aP = Ob^2$$

слѣдовательно OA и OB суть сопряженные діаметры, а такъ какъ они перпендикулярны (AB есть діаметръ круга), то это оси кривой.

§ 256. *Нормаль.* Если черезъ точку касанія $(x_1 y_1)$ касательной:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{83}$$

проведемъ прямую перпендикулярную къ касательной, то эта прямая называется *нормалью.* Уравненіе ея, очевидно, будетъ:

$$\frac{x_1}{a^2}(y - y_1) = \frac{y_1}{b^2}(x - x_1)$$

или:

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = c^2 \tag{84}$$

гдѣ:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Задача. Изъ данной точки, внѣ эллипса провести нормаль?

Рѣшеніе. Пусть искомая точка на эллипсѣ будетъ (x_1, y_1). Координаты этой точки должны удовлетворять двумъ уравненіямъ: уравненію эллипса и уравненію нормали:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{a^2 x_1}{x} - \frac{b^2 y_1}{y} = c^2$$

или:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad c^2 xy = a^2 x_1 y - b^2 y_1 x$$

Но послѣднее уравненіе есть гипербола, слѣдовательно пересѣченіе этой гиперболы съ даннымъ эллипсомъ даетъ искомыя точки.



Фиг. 99.

Если въ нормали (84) сдѣлаемъ $y=0$, то найдемъ отрѣзокъ CN (фиг. 99) на оси x:

$$CN = \frac{c^2}{a^2} x_1 = e^2 x_1 \tag{85}$$

изъ этого уравненія, имѣя отрѣзокъ CN, найдемъ абсциссу x_1, а слѣдовательно и точку на эллипсѣ, которую соединяя съ N будемъ имѣть нормаль.

Отрѣзокъ MN называется *поднормалью* (subnormal). Его длина, очевидно будетъ:

$$MN = x_1 - CN = x_1 - e^2 x_1 = x_1(1 - e^2) = \frac{b^2}{a^2} x_1 \tag{86}$$

Если касательная PT встрѣчаетъ ось x въ T, то отрѣзокъ MT называется *подкасательной* (subtangens). Такъ какъ $CT = \frac{a^2}{x_1}$ (79), то:

$$MT = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x^2_1}{x_1} \tag{87}$$

Длина нормали NP будетъ (§ 249, 65):

$$\overline{NP}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{NM}^2 = y^2_1 + \frac{b^4}{a^4} x_1{}^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{b^2} y_1{}^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2_1\right) = \frac{b^2 b^2_1}{a^2}$$

откуда:

$$NP = \frac{bb_1}{a} \tag{88}$$

Легко показать также, что отрѣзокъ PQ:

$$PQ = \frac{ab_1}{b} \tag{89}$$

откуда:

$$NP \,.\, PQ = b^2_1 \tag{90}$$

Мы выше (§ 249, 62) показали, что перпендикуляръ изъ центра на касательную:

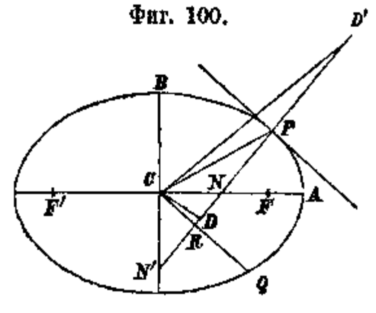
$$p = \frac{ab}{b_1}$$

откуда:

$$p \,.\, NP = b^2 \tag{91}$$

величина постоянная.

Фиг. 100.



§ 257. Пусть CP и CQ будутъ два сопряженные полудіаметра, пусть нормаль PN пересѣкаетъ CQ въ точкѣ R. Отложимъ на нормали отъ точки P, отрѣзки PD и PD', оба равные CQ, то длины отрѣзковъ CD и CD' будутъ $a - b$, $a + b$.

Такъ какъ:

$$CD'^2 = CP^2 + PD'^2 + 2PD' \,.\, PR$$

а $$CP^2 + \overline{PD}^2 = a^2 + b^2 \quad (\S\ 249,\ 64)$$

и $$2PD' . PQ = 2ab$$

слѣдоватслыно $CD' = a + b$. Точно также найдемъ, что $CD = a - b$. Откуда $CD'^2 = (a+b)^2$. Точно также и для CD. Большая ось дѣлитъ уголъ DCD' пополамъ. Имѣемъ:

$$D'N = D'P + PN = b_1 + \frac{bb_1}{a} = \frac{b_1}{a}(a+b)$$

Подобнымъ образомъ:

$$DN = \frac{b_1}{a}(a - b)$$

Слѣдовательно основаніе DD' треугольника DCD' въ точкѣ N раздѣлено въ отношеніи сторонъ, откуда видимъ, что CN есть внутренняя равнодѣлящая уголъ DCD'. Точно также можно показать, что CN' есть равнодѣлящая уголъ внѣшній.

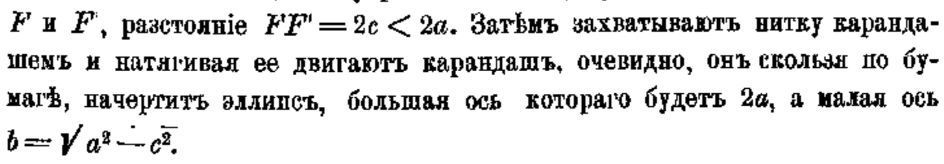
Откуда имѣемъ слѣдующее построеніе: Даны два сопряженные полудіаметра CP и CQ, какъ по величинѣ, такъ и по положенію, построить какъ величину, такъ и положеніе осей?

Изъ точки P опустимъ перпендикуляръ PR на CQ, отложимъ отрѣзки PD и PD' равные CQ, то направленіе осей будутъ равнодѣлящія уголъ DCD', а величина будетъ сумма и разность CD и CD'.

§ 258. *Свойства фокусовъ.* Въ § 13 видѣли, что фокусы эллипса суть двѣ точки, сумма разстояній коихъ отъ точекъ на эллипсѣ есть величина постоянная и равна большой оси эллипса. Если ось есть $2a$, а разстояніе между фокусами $2c$, то мы нашли § 13:

$$FP = a - cx \quad , \quad F'P = a + cx$$

Фиг. 101.



F и F' фокусы (фиг. 101), $c^2 = a^2 - b^2$, $c = ae$.

Этимъ свойствомъ эллипса пользуются для его черченія непрерывнымъ движеніемъ.

Для этого берутъ нитку, коей длина равна большой оси и концы ея укрѣпляютъ въ фокусахъ F и F', разстояніе $FF' = 2c < 2a$. Затѣмъ захватываютъ нитку карандашемъ и натягивая ее двигаютъ карандашъ, очевидно, онъ скользя по бумагѣ, начертитъ эллипсъ, большая ось котораго будетъ $2a$, а малая ось $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

§ 259. *Задача.* Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ фокуса эллипса на касательную въ точкѣ $(x_1 y_1)$?

Рѣшеніе. Уравненіе касательной въ точкѣ $P\,(x_1, y_1)$ есть (фиг. 101):

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

это уравненіе, написанное въ нормальной формѣ, будетъ:

$$\frac{\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - 1}{\sqrt{\frac{x^2_1}{a^4} + \frac{y^2_1}{b^4}}} = 0$$

подставляя въ это уравненіе координаты фокусовъ $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ найдемъ искомую длину. Назовемъ чрезъ p_1 длину перпендикуляра изъ фокуса $F\,(c, 0)$, а чрезъ p_2 изъ фокуса $F'\,(-c, 0)$, на касательную, то будемъ имѣть:

$$p_1 = \frac{cx_1 - 1}{\sqrt{\frac{x^2_1}{a^4} + \frac{y^2_1}{b^4}}} \quad , \quad p_2 = \frac{cx_1 + 1}{\sqrt{\frac{x^2_1}{a^4} + \frac{y^2_1}{b^4}}}$$

Выраженія эти можно написать въ формѣ:

$$p_1 = \frac{ab(1 - cx_1)}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2_1 + \frac{a^2}{b^2}y^2_1}} \quad , \quad p_2 = \frac{ab(1 + cx_1)}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2_1 + \frac{a^2}{b^2}y^2_1}}$$

Въ § 252, 74 видѣли, что координаты x_2, y_2 конца сопряженнаго діаметра, діаметру проходящему чрезъ точку (x_1, y_1), суть:

$$x_2 = \pm \frac{a}{b} y_1 \quad , \quad y_2 = \mp \frac{b}{a} x_1$$

но длина этого діаметра $b^2_1 = x^2_2 + y^2_2$, слѣдовательно:

$$b^2_1 = \frac{a^2}{b^2} y^2_1 + \frac{b^2}{a^2} x^2_1 = a^2 - e^2 x^2_1$$

откуда:

$$p_1 = \frac{ab}{b_1}(cx_1 - 1) \quad , \quad p_2 = \frac{ab}{b_1}(ex_1 + 1)$$

или:

$$p_1 = \frac{b}{b_1}(a - ex_1) \quad , \quad p_2 = \frac{b}{b_1}(a + ex_1)$$

Таковы искомыя выраженія.

Перемножая, найдемъ:

$$p_1 p_2 = \frac{b^2}{b^2_1}(a^2 - e^2 x^2_1) = b^2 \qquad (92)$$

т. е. прямоугольникъ построенный на перпендикулярахъ p_1 и p_2 изъ фокусовъ F и F' на касательную есть величина постоянная и равна квадрату малой полуоси. Тоже имѣетъ мѣсто и для гиперболы (фиг. 102).

Фиг. 102.

Означимъ черезъ r_1 и r_2 радіусы векторы FP и $F'P$ эллипса (фиг. 101), то какъ выше:

$$p_1 = \frac{b}{b_1} r_1 \quad , \quad p_2 = \frac{b}{b_1} r_2 \qquad (93)$$

откуда:

$$\frac{p_1}{r_1} = \frac{p_2}{r_2} = \frac{b}{b_1} = \sin FPT = \sin F'PT'$$

слѣдовательно:

$$\angle FPT = \angle F'PT' \qquad (94)$$

откуда видимъ, что углы, составляемые радіусами векторами, проведенными изъ фокусовъ въ точку касанія, составляютъ равные углы съ касательной. Тоже имѣетъ мѣсто и для гиперболы (фиг. 102).

Опредѣленіе. Два коническія сѣченія, имѣющія общіе фокусы, называются *софокусными.*

Пр. 1. Показать что два софокусные эллипса пересѣкаются подъ прямымъ угломъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія двухъ данныхъ эллипсовъ будутъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2_1} + \frac{y^2}{b^2_1} = 1$$

если они софокусны, то $a^2 - b^2 = a^2_1 - b^2_1 = c^2$. Координаты x_1, y_1 общихъ точекъ пересѣченія, удовлетворяя предъидущія уравненія, удовлетворятъ и ихъ разности:

$$\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} - \frac{x^2_1}{a^2_1} - \frac{y^2_1}{b^2_1} = 0$$

или:

$$\frac{(a^2 - a^2_1)x_1^2}{a^2a^2_1} + \frac{(b^2 - b^2_1)y^2_1}{b^2b^2_1} = 0$$

но $a^2 - a^2_1 = b^2 - b^2_1$, слѣдовательно:

$$\frac{x^2_1}{a^2a^2_1} + \frac{y^2_1}{b^2b^2_1} = 0$$

но легко видѣть, что это есть условіе перпендикулярности касательныхъ:

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x_1x}{a^2_1} + \frac{y_1y}{b^2_1} = 1$$

къ эллипсамъ въ общей точкѣ пересѣченія.

Пр. 2. Найти длину прямой, проведенной изъ центра, параллельно фокусному радіусу, и оканчивающейся въ точкѣ пересѣченія съ касательной?

Рѣшеніе. Если въ уравненіи касательной, написанной въ нормальной формѣ, положимъ $x=0$, $y=0$, то будемъ имѣть длину перпендикуляра, опущеннаго изъ центра на касательную:

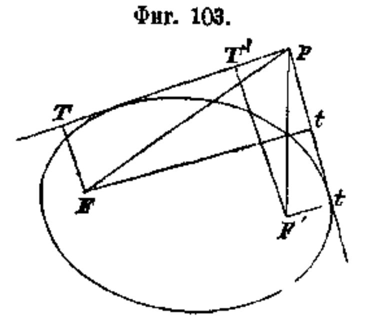
$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}}=\frac{ab}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x_1^2+\frac{a^2}{b^2}y_1^2}}=\frac{ab}{b_1}$$

раздѣляя это выраженіе на синусъ угла, который касательная составляетъ съ фокуснымъ радіусомъ, а этотъ синусъ $=\frac{b}{b_1}$, будемъ имѣть a.

Пр. 3. Провесть нормаль къ эллипсу изъ какой-нибудь точки на малой оси.

Отв. Кругъ проведенный чрезъ данную точку и чрезъ фокусы пересѣкаетъ кривую въ искомой точкѣ.

Фиг. 103.



§ 260. Изъ того свойства, что прямоугольникъ построенный на перпендикулярахъ изъ фокусовъ на касательную (§ 259, 92) есть величина постоянная, мы выведемъ еще весьма важное свойство эллипса.

Выше видѣли (§ 259), что:

$$FT.F'T'=b^2$$

слѣдовательно, если возьмемъ какую-нибудь другую касательную, то будемъ имѣть:

$$FT.F'T'=Ft.F't' \quad \text{или} \quad \frac{FT}{Ft}=\frac{F't'}{F'T'}$$

Но $\frac{FT}{Ft}$ есть отношеніе синусовъ угловъ, на которые прямая FP дѣлитъ уголъ P, и $\frac{F't'}{F'T'}$ есть отношеніе синусовъ угловъ, на которые прямая $F'P$ дѣлитъ уголъ P, слѣдовательно имѣемъ:

$$\angle TPF=\angle t'PF' \tag{95}$$

Если представимъ, что коническое сѣченіе проходитъ чрезъ точку P, имѣя фокусами F и F', то было показано выше, что касательная одинаково наклонена къ FP и $F'P$; слѣдовательно по настоящему свойству онѣ должны быть и одинаково наклонены къ PT и Pt. Откуда видимъ, что если чрезъ какую-нибудь точку P на коническомъ сѣченіи проведемъ касательныя PT и Pt къ софокусному коническому сѣченію, то эти касательныя будутъ составлять равные углѣ съ касательной въ точкѣ P.

261. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ какого-нибудь фокуса, на касательную?

Рѣшеніе. Перпендикуляръ изъ фокуса, какъ видѣли выше (82), выражается чрезъ уголъ, который онъ составляетъ съ осью:

$$p = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} - x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

полагая въ этомъ уравненіи $x' = c$, $y' = 0$ получимъ полярное уравненіе геометрическаго мѣста:

$$\rho = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha} - c\,.\cos\alpha$$

или:

$$\rho^2 + 2c\rho\cos\alpha + c^2\cos^2\alpha = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$$

или:

$$\rho^2 + 2c\rho\cos\alpha = b^2$$

а это очевидно полярное уравненіе круга, коего центръ находится на оси x на разстояніи $-c$ отъ фокуса. Слѣдовательно кругъ концентрическій съ коническимъ сѣченіемъ. Радіусъ круга очевидно есть a.

Слѣдствіе 1. Если опишемъ кругъ на оси $2a$, какъ на діаметрѣ эллипса, то перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса на касательную, встрѣчаетъ касательную на окружности этого круга.

Слѣдствіе 2. Обратно, если изъ какой-нибудь точки F (фиг. 103) проведемъ радіусъ векторъ FT къ данному кругу и проведемъ TP перпендикулярно къ FT, то TP будетъ всегда касаться коническаго сѣченія имѣющаго фокусомъ F и которое будетъ эллипсъ или гипербола, смотря потому будетъ ли точка F внутри или внѣ круга.

§ 262. *Задача.* Къ центральному коническому сѣченію изъ данной точки проведена касательная, найти уголъ, коего вершина находится въ фокусѣ, а стороны проходятъ чрезъ данную точку и чрезъ точку касанія?

Рѣшеніе. Пусть данная точка будетъ (x, y), и точка касанія (x_1, y_1). Пусть начало координатъ будетъ въ центрѣ; если радіусы, проведенные изъ фокуса F въ точки (x, y) и (x_1, y_1) будутъ ρ и ρ_1, а углы, которые они составляютъ съ осью x, φ и φ_1, то очевидно:

$$\cos\varphi = \frac{x + c}{\rho}\ ,\quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho}\ ,\quad \cos\varphi_1 = \frac{x_1 + c}{\rho_1}\ ,\quad \sin\varphi_1 = \frac{y_1}{\rho_1}$$

откуда:

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{(x + c)(x_1 + c) + yy_1}{\rho\rho_1}$$

подставляя въ уравненіе касательной:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

выраженіе для yy_1, найдемъ:

$$\rho\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1) = xx_1 + cx + cx_1 + c^2 - \frac{b^2}{a^2}xx_1 + b^2 =$$

$$= e^2xx_1 + cx + cx_1 + a^2 = (a + ex)(a + ex_1)$$

но такъ какъ $\rho_1 = a + ex_1$, то:

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \frac{a + ex}{\rho}$$

это выраженіе не заключаетъ координатъ точки касанія, а только координаты (x, y), слѣдовательно углы для обѣихъ касательныхъ, проведенныхъ изъ точки (x, y), равны. Откуда слѣдуетъ, что уголъ, составляемый прямыми, проведенными изъ фокуса къ концамъ какой-нибудь хорды, дѣлится пополамъ прямою, соединяющею фокусъ съ полюсомъ этой хорды.

§ 263. *Предложеніе.* Прямая, соединяющая фокусъ съ полюсомъ хорды чрезъ него проходящей, перпендикулярна къ этой хордѣ.

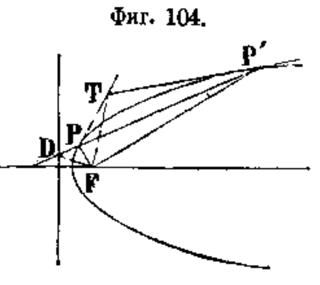
Доказательство. Это легко видѣть изъ предъидущаго §, такъ какъ въ этомъ случаѣ уголъ $\varphi - \varphi_1 = 180^0$.

Если кривая выраженна въ полярныхъ координатахъ, то часть отсѣченная касательной на перпендикулярѣ къ радіусу вектору, проведенному чрезъ полюсъ, называется полярной подкасательной (subtangens). Въ силу такого опредѣленія настоящее предложеніе можно выразить такъ: Если фокусъ будетъ полюсъ, то геометрическое мѣсто концевъ полярныхъ подкасательныхъ есть директриса.

Пр. 1. Показать, что уголъ составляемый прямыми проведенными чрезъ фокусъ къ точкамъ перемѣнной касательной съ двумя данными касательными, есть величина постоянная.

Рѣшеніе. По задачѣ § 262 уголъ этотъ равенъ половинѣ угла составляемаго прямыми проведенными чрезъ фокусъ къ концамъ хорды соприкосновенія данныхъ двухъ касательныхъ.

Фиг. 104.



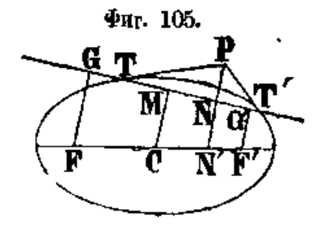
Пр. 2. Если какая-нибудь хорда PP' пересѣкаетъ директрису въ точкѣ D, то FT есть внѣшняя равнодѣлящая уголъ PFP'. Въ самомъ дѣлѣ (§ 262) FT есть внутренняя равнодѣлящая, но D есть полюсъ FT (такъ какъ D есть пересѣченіе PP' поляры T съ директрисой, которая есть поляры F), слѣдовательно $DF \perp FT$, а это показываетъ, что DF есть внѣшняя равнодѣлящая.

Пр. 3. Если изъ какой-нибудь точки взятой на данномъ перпендикулярѣ къ оси, опустимъ перпендикуляръ на поляру взятой

точки, то его геометрическое мѣсто есть точка на оси. Это слѣдуетъ изъ того, что отрѣзокъ дѣлаемый перпендикуляромъ на оси есть e^2x_1 — величина постоянная, если x_1 неизмѣняется.

Пр. 4. Найти длину перпендикуляровъ изъ центра и фокуса на поляру точки (x_1, y_1)?

Фиг. 105.



Пр. 5. Показать, что $CM.PN' = b^2$?

Пр. 6. Показать, что (фиг. 105):

$$PN'.NN' = \frac{b^2}{a^2}(a^2 \quad e^2x^2_1)$$

Если точка P находится на кривой, то это будетъ длина нормали, именно (88):

$$PN - \frac{bb_1}{a}$$

Пр. 7. Показать, что (фиг. 105):

$$FG.F'G' = CM.NN'$$

Если P на кривой, то:

$$FG.F'G' = b^2 \tag{96}$$

§ 264. *Задача.* Найти уравненіе эллипса или гиперболы, принявъ за полюсъ фокусъ?

Рѣшеніе. Извѣстно изъ § 13, что фокусный радіусъ векторъ:

$$r = a - ex$$

а x, считая отъ центра:

$$x = r\cos\varphi + c = r\cos\varphi + ae$$

откуда:

$$r = a - e\cos\varphi\,.\,r - ae^2$$

или

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi} = \frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{1+e\cos\varphi} \tag{97}$$

эллипсъ или гипербола, смотря потому будетъ-ли $e < 1$ или $e > 1$.

Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ $\varphi = 90^0$, то получимъ ординату соотвѣтствующую фокусу, именно:

$$r = a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}$$

Эту ординату означаютъ чрезъ p и называютъ *параметромъ* коническаго сѣченія, слѣдовательно уравненіе будетъ:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi} \tag{98}$$

Пр. 1. Показать, что средне-гармоническій отрѣзокъ между отрѣзками фокусной хорды есть величина постоянная и равна полупараметру?

Рѣшеніе. Выше видѣли (98), что:

$$F'P = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad (a)$$

Если этотъ радіусъ продолжимъ въ противуположную сторону до встрѣчи съ кривою въ точкѣ P', то получимъ его длину, полагая въ (*a*) $\varphi + 180^0$ вмѣсто φ, что даетъ:

$$T'P' = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

откуда:

$$\frac{1}{T'P} + \frac{1}{T'P'} = \frac{2}{p} \qquad (99)$$

Пр. 2. Произведеніе изъ отрѣзковъ фокусной хорды пропорціонально цѣлой хордѣ?

Рѣшеніе. Перемножая и складывая уравненія предъидущаго примѣра, найдемъ:

$$F'P.T'P' = \frac{b^4}{a^2}\frac{1}{1 - e^2\cos^2\varphi} \quad , \quad F'P + T'P' = \frac{2b^2}{a}\frac{1}{1 - e^2\cos^2\varphi}$$

откуда и слѣдуетъ сказанное свойство.

Пр. 3. Сумма фокусныхъ хордъ, параллельныхъ сопряженнымъ діаметрамъ, есть величина постоянная?

§ 265. Уравненіе эллипса, отнесенное къ его вершинѣ, очевидно, есть:

$$\left(\frac{x - a}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

или:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad (100)$$

Уравненіе гиперболы будетъ:

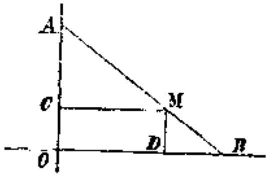
$$y = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad (101)$$

Въ параболѣ:

$$y = 2px \qquad (102)$$

Изъ этихъ свойствъ и произошли названія эллипсъ (недостатокъ—ἔλλειψις), гипербола (избытокъ—υπερβολή) и парабола (равенство—παραβολή).

Фиг. 106.



§ 266. *Предложеніе.* Если прямая *AB*, постоянной длины, скользитъ концами на двухъ прямоугольныхъ осяхъ, то какая-нибудь, точка *M* этой прямой (фиг. 106), находящаяся на разстояніяхъ *a* и *b* отъ ея концовъ, опишетъ эллипсъ, коего оси суть $2a$ и $2b$.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть *AB* будетъ одно изъ положеній скользящей прямой.

Если:

$$AM = a,\ MB = b,\ OD = CM = x,\ OC = MD = y$$

и

$$\angle AMC = \angle MBO = \varphi$$

то имѣемъ, очевидно:

$$CM = x = a.\cos\varphi \quad , \quad MD = y = b.\sin\varphi$$

откуда:

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = \sin\varphi$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ эллипсъ:

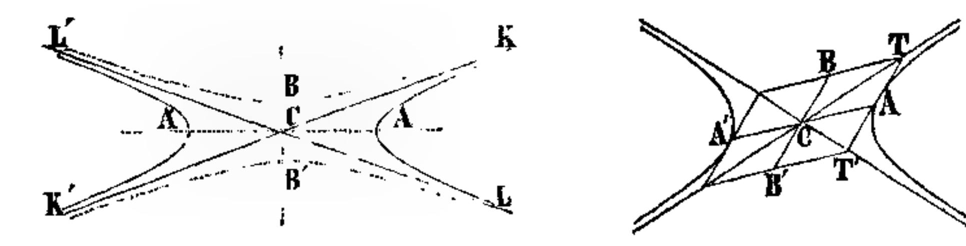
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Легко также показать, что какая-нибудь точка, находящаяся на продолженіи прямой AB, опишетъ также эллипсъ. На основаніи этой теоремы устраиваютъ *эллипсографы.*

Гипербола.

§ 267. Выше замѣтили, что если въ уравненіи эллипса измѣнить b на bi, то получится уравненіе гиперболы (фиг. 107), отнесенной къ осямъ, а измѣняя b_1 на $b_1 i$ въ уравненіе эллипса, отнесеннаго къ сопряженнымъ

Фиг. 107. Фиг. 108.



діаметрамъ, получимъ уравненіе гиперболы, отнесенной также къ парѣ сопряженныхъ діаметровъ. Вслѣдствіи такого замѣчанія, изъ различныхъ свойствъ эллипса получимъ свойства гиперболы (фиг. 108). Если въ уравненіяхъ (56) и (57) § 248 измѣнимъ b на bi, то найдемъ:

$$\frac{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}{a^2} - \frac{\sin\alpha \,.\, \sin\beta}{b^2} = 0$$

откуда:

$$\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2} \tag{103}$$

слѣдовательно въ гиперболѣ углы α и β оба острые или оба тупые, т. е. сопряженные діаметры лежатъ съ одной стороны сопряженной оси. Если $\operatorname{tg}\alpha < \frac{b}{a}$, то $\operatorname{tg}\beta > \frac{b}{a}$, но уголъ, коего $\operatorname{tg} = \frac{b}{a}$ соотвѣтствуетъ ассимптотѣ, которая отдѣляетъ діаметры, встрѣчающіе кривую, отъ діаметровъ не встрѣчающихъ, слѣдовательно, если одинъ изъ сопряженныхъ діаметровъ встрѣчаетъ кривую, то другой ее не встрѣчаетъ. Отсюда же видно, какъ и было замѣчено выше, что ассимптота есть сама себѣ сопряженный діаметръ.

Въ гиперболѣ имѣемъ:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos\varphi \tag{104}$$

слѣдовательно, здѣсь относительно угла φ не можетъ быть, какъ въ эллипсѣ, никакого ограниченія; уголъ φ можетъ быть и равенъ нулю, т. е. сопряженные діаметры могутъ совпадать и мы знаемъ, какъ выше уже было замѣчено, что такіе сопряженные діаметры суть ассимптоты.

Какъ въ эллипсѣ, такъ и въ гиперболѣ имѣемъ:

$$a_1 b_1 \sin\varphi = ab \tag{105}$$

такъ какъ это уравненіе не измѣняется замѣщеніемъ b_1 и b выраженіями bi_1 и bi.

Наконецъ имѣемъ еще изъ (64) § 249:

$$a^2_1 - b^2_2 = a^2 - b^2 \tag{106}$$

т. е. въ гиперболѣ разность квадратовъ сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная.

Если $(x_1 y_1)$ есть точка, въ которой, какой нибудь, діаметръ встрѣчаетъ гиперболу, то уравненіе сопряженнаго діаметра будетъ:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 0$$

Если будемъ искать пересѣченіе этого діаметра съ кривою, то найдемъ:

$$x = \pm\frac{ay_1}{b}i \quad , \quad y = \pm\frac{bx_1}{a}i \tag{107}$$

величины мнимыя, т. е. діаметръ сопряженный діаметру, встрѣчающему кривую, не встрѣчаетъ ее.

§ 268. Если уравненіе гиперболы напишемъ въ формѣ:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a}+1\right)$$

и положимъ:

$$\frac{y}{b}=\lambda\left(\frac{x}{a}-1\right) \quad , \quad \frac{y}{b}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{a}+1\right) \tag{108}$$

то эти двѣ прямыя, проходя черезъ оконечности $(a,0)$ и $(-a,0)$ оси $2a$, пересѣкаются на кривой, такъ какъ перемножая эти два уравненія, найдемъ уравненіе гиперболы.

Если назовемъ черезъ α и β углы, которые эти прямыя составляютъ съ осью x, то найдемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\lambda b}{a} \quad , \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{b}{\lambda a}$$

откуда:

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta=\frac{b^2}{a^2}$$

слѣдовательно эти прямыя параллельны парѣ сопряженныхъ діаметровъ. Отрѣзки y_1 и y_2, которые дѣлаютъ эти прямыя на оси b, получатся, полагая въ уравненіяхъ (108) $x=0$:

$$y_1=-\lambda b \qquad y_2=\frac{b}{\lambda} \tag{109}$$

произведеніе этихъ отрѣзковъ будетъ:

$$y_1 y_2=-b^2$$

Съ помощью этого свойства можно, по даннымъ осямъ гиперболы, построить сколько угодно ея точекъ.

Легко также построить, какъ мы показали для эллипса, діаметръ сопряженный данному.

Уголъ между прямыми (108), очевидно, дается уравненіемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2ab^2}{(a^2+b^2)y}$$

Когда y возрастаетъ отъ 0 до ∞, уголъ φ уменьшается отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Съ помощью этой формулы, по данному острому углу можно всегда построить, какъ сказано относительно эллипса (§ 252), два сопряженные діаметра, составляющіе уголъ равный данному.

§ 269. *Поляра и касательная.* Въ полярѣ эллипса, измѣняя b на bi получимъ поляру гиперболы:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{110}$$

Если точка $x_1 y_1$ находится на кривой, то это будетъ касательная.

Нормалью къ ней въ точкѣ $(x_1 y_1)$, очевидно, будетъ:

$$\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = c^2 \tag{111}$$

гдѣ:

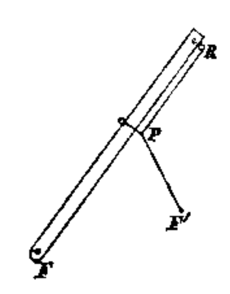
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Легко также видѣть, что директриса есть поляра фокуса.

Разсматривая формулы 88, 89, 90 и 91 мы видимъ, что онѣ имѣютъ мѣсто и для гиперболы.

Такъ какъ въ гиперболѣ разность разстояній каждой ея точки отъ двухъ данныхъ точекъ (фокусовъ) есть величина постоянная (§ 14), то чертить гиперболу можно слѣдующимъ образомъ.

Фиг. 109.



Укрѣпимъ линейку FR около точки F, такъ чтобы она могла вращаться около F. Къ другому концу R линейки прикрѣпимъ нитку, коей другой конецъ прикрѣпимъ въ точкѣ F'. Захватимъ конецъ R нитки карандашемъ и будемъ его весть такъ, чтобы онъ скользилъ по линейкѣ и бумагѣ, наклоняя линейку FR, около точки F (фиг. 109). Очевидно, точка P опишетъ гиперболу, въ которой разность между длинами FP и $F'P$ линейки и нитки есть дѣйствительная ось гиперболы.

§ 270. *Ассимптоты.* Мы видѣли, что ассимптоты гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{112}$$

суть:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

или:

$$bx - ay = 0 \quad , \quad bx + ay = 0$$

Уравненіе гиперболы (112) можно написать въ формѣ:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$$

или:

$$(bx-ay)(bx+ay)=a^2b^2$$

или, раздѣляя обѣ части на a^2+b^2:

$$\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \tag{113}$$

Но, множители первой части суть перпендикуляры, опущенные изъ какой-нибудь точки кривой на ассимптоты, слѣдовательно, если ихъ означимъ черезъ p_1 и p_2, то будемъ имѣть:

$$p_1p_2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \tag{114}$$

Уголъ, который ассимптоты составляютъ съ осью x опредѣлится уравненіемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$$

слѣдовательно уголъ между ассимптотами будетъ вдвое больше и будемъ имѣть:

$$\sin 2\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2} \tag{115}$$

Если теперь возьмемъ ассимптоты за координатныя оси, то легко видѣть, что:

$$p_1=x\sin 2\alpha \quad , \quad p_2=y\sin 2\alpha$$

или:

$$p_1=x\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2} \quad , \quad p_2=y\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

Подставляя эти величины въ уравненіе (114), найдемъ:

$$4xy\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

откуда:

$$xy=\frac{a^2+b^2}{4}$$

Если означимъ $\frac{a^2+b^2}{4}=k^2$, то получимъ уравненіе гиперболы, отнесенной къ ассимптотамъ:

$$xy=k^2 \tag{116}$$

Это самая простая форма уравненія гиперболы.

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что параллелограмъ, образованный прямыми, проведенными черезъ, какую-нибудь, точку гиперболы, параллельно ассимптотамъ имѣетъ постоянную площадь. Эта площадь равна площади квадрата, построеннаго на гипотенузѣ промоугольнаго треугольника, коего катеты суть $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$.

§ 271. *Поляра и касательная.* Легко видѣть, что уравненіе поляры или касательной будетъ:

$$xy_1 + yx_1 = 2k^2 \tag{117}$$

Если это касательная, то точка (x_1y_1) находится на кривой и мы можемъ написать предъидущее уравненіе въ формѣ:

$$xy_1 + yx_1 = 2x_1y_1 \tag{118}$$

откуда:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2 \tag{119}$$

отрѣзки, которые дѣлаетъ касательная на ассимптотахъ, очевидно, будутъ:

$$2x_1 \text{ и } 2y_1$$

ихъ произведеніе:

$$2x_1 2y_1 = 4k^2 = a^2 + b^2$$

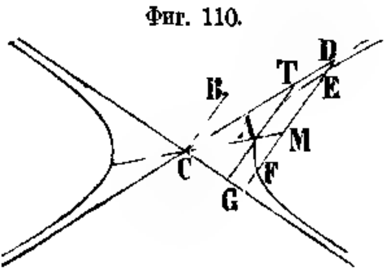
Слѣдовательно площадь треугольника, составленнаго ассимптотами и касательной, есть величина постоянная и равная двойной площади параллелограма, составленнаго координатами точки касанія.

Изъ уравненія (119), которое можно написать въ формѣ:

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$$

видно, что отрѣзокъ касательной TG, заключенный между ассимптотами, въ точкѣ $A(x_1y_1)$ дѣлится пополамъ (фиг. 110).

Фиг. 110.



Предложеніе. Если двѣ данныя точки (x_1y_1) и (x_2y_2) на гиперболѣ соединимъ съ скользящею точкою $(x'y')$, то отрѣзокъ, отсѣкаемый этими прямыми на одной изъ ассимптотъ есть величина постоянная.

Доказательство. Уравненіе одной изъ прямыхъ есть $x'y + y_1x = y_1x' + k^2$, полагая $y=0$, найдемъ отрѣзокъ на оси

x, т. е. на ассимптотѣ $x'+x_1$. Точно также найдемъ отрѣзокъ на ассимптотѣ, дѣлаемый другою прямою $x'+x_2$, разность между ними будетъ x_1-x_2, величина постоянная.

Парабола.

§ 272. Мы видѣли въ § 235, 3, что парабола есть то изъ коническихъ сѣченій, котораго центръ находится на безконечности, т. е. когда:

$$A_{33}=a_{11}a_{22}-a^2_{12}=0$$

Но при этомъ условіи члены втораго порядка въ уравненіи:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{120}$$

составляютъ полный квадратъ, т. е. уравненіе имѣетъ форму:

$$(ax+by)^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{121}$$

Фиг. 111.

Слѣдовательно если въ уравненіи коническаго сѣченія члены втораго порядка составляютъ полный квадратъ, то оно есть парабола. Чтобы привести это уравненіе къ простѣйшей—канонической формѣ, возьмемъ двѣ прямыя:

$$\begin{aligned}&(O'A)\quad ax+by=0,\\ &\text{и}\\ &(O'B)\quad 2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0\end{aligned} \tag{122}$$

и напишемъ уравненіе (121) въ формѣ:

$$(a^2+b^2)\left(\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+2\sqrt{a^2_{13}+a^2_{23}}\left(\frac{2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}}{2\sqrt{a^2_{13}+a^2_{23}}}\right)=0 \tag{123}$$

Легко видѣть теперь, что:

$$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad,\quad\frac{2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}}{2\sqrt{a^2_{13}+a^2_{23}}} \tag{124}$$

суть длины перпендикуляровъ ND и NF, опущенныхъ изъ точки $N(x,y)$ параболы на прямыя (122). Означимъ эти перпендикуляры черезъ $NF=p_1$ и $ND=p_2$, то уравненіе (123) будетъ:

$$p^2_2+\frac{2\sqrt{a^2_{13}+a^2_{23}}}{a^2+b^2}p_1=0 \tag{125}$$

Черезъ α назовемъ уголъ $AO'B$ между прямыми (122) и положимъ:

$$NF = NG \sin\alpha \ , \ ND = NE \sin\alpha$$

или:

$$p_2 = y' \sin\alpha \quad , \quad p_1 = x' \sin\alpha$$

или, поставляя въ уравненіе (125), получимъ:

$$y'^2 \sin^2\alpha + \frac{2\sqrt{a^2_{13} + a^2_{23}}}{a^2 + b^2} x' \sin\alpha = 0 \tag{126}$$

полагая:

$$\frac{\sqrt{a^2_{13} + a^2_{23}}}{(a^2 + b^2)\sin\alpha} = -p'$$

уравненіе (126) сдѣлается:

$$y'^2 = 2p'x' \tag{127}$$

Если теперь прямыя (122) примемъ за оси координатъ, то уравненіе (127) будетъ уравненіе параболы, отнесенной къ прямымъ (122), какъ координатнымъ осямъ. Очевидно, что новое начало находится на кривой въ точкѣ O', а какъ каждому значенію x' въ (127) соотвѣтствуютъ два равныя и съ противными знаками значенія для y', то новая ось x' есть діаметръ, а ось y' параллельна хордамъ NK и $C'K'$, которыя діаметръ $O'B$ дѣлитъ пополамъ. Но если $x' = 0$, то $y'^2 = 0$, слѣдовательно ось y' пересѣкаетъ параболу въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т. е. ось y' есть касательная къ кривой въ началѣ координатъ. Слѣдовательно, если уравненіе параболы дано въ формѣ (121), то:

$$ax + by = 0$$

есть уравненіе діаметра кривой, проходящаго черезъ начало, а:

$$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

есть уравненіе касательной въ точкѣ O', гдѣ діаметръ встрѣчаетъ кривую. Слѣдовательно уравненіе параболы, отнесенной къ діаметру и къ касательной въ точкѣ его встрѣчи съ кривою, будетъ имѣть всегда форму (127).

§ 273. Хотя уравненіе (127) параболы весьма простое, но неудобно, такъ какъ координаты не прямоугольны. Но легко дать уравненію параболы такую-же форму, но съ прямоугольными осями.

Для этого напишемъ уравненіе (121) въ формѣ:

$$(ax + by + \lambda)^2 + 2(a_{13} - a\lambda)x + 2(a_{23} - b\lambda)y + a_{33} + \lambda^2 = 0 \tag{128}$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэфиціентъ.

Если къ этому уравненію приложимъ разсужденія предъидущаго параграфа, то найдемъ, что:

$$ax + by + \lambda = 0 \tag{129}$$

есть діаметръ, и:

$$2(a_{13} - a\lambda)x + 2(a_{23} - b\lambda)y + a_{33} + \lambda^2 = 0 \tag{130}$$

есть касательная въ точкѣ его встрѣчи съ кривою.

Такъ какъ въ это уравненіе входитъ неопредѣленный коэфиціентъ λ, то его можно такъ выбрать, чтобы прямыя (129) и (130) были перпендикулярны, а для этого мы должны имѣть (§ 49):

$$a(a_{13} - a\lambda) + b(a_{23} - b\lambda) = 0$$

откуда:

$$\lambda = \frac{aa_{13} + ba_{23}}{a^2 + b^2} \tag{131}$$

такъ какъ изъ этого выраженія видно, что λ имѣетъ всегда величину дѣйствительную, то мы заключаемъ, что есть всегда *одинъ* діаметръ въ параболѣ, перпендикулярный къ касательной въ точкѣ встрѣчи его съ кривою. Если прямыя (129) и (130) возьмемъ за координатныя оси и сдѣлаемъ это, какъ въ предъидущемъ параграфѣ, то уравненіе параболы будетъ:

$$y^2 = 2px \tag{132}$$

гдѣ, какъ легко видѣть:

$$p = \frac{aa_{13} - ba_{13}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{133}$$

§ 274. *Касательная.* Изъ общаго уравненія касательной (§ 210) легко показать, что уравненіе касательной къ параболѣ:

$$y^2 = 2px$$

въ точкѣ $P(x_1 y_1)$ есть (фиг. 112):

$$yy_1 = p(x + x_1) \tag{134}$$

Фиг. 112.

Слѣдовательно тангенсъ угла α, который касательная составляетъ съ осью x, будетъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y_1}$$

Чтобы найти точку T встрѣчи касательной съ осью абсцисъ надобно положить въ уравненіи (134) $y = 0$, что дветъ $x + x_1 = 0$; отсюда видимъ,

что абсцисса точки встрѣчи $VT = x = -x_1$, равна абсциссѣ VM точки касанія, но отложенной отрицательно. Это свойство даетъ легкій способъ проводить касательную къ параболѣ, если даны координаты точки касанія. Для этого надобно абсциссу точки касанія отложить отрицательно и полученную точку соединить прямою съ точкою касанія, эта прямая и будетъ касательная.

Уравненіе (134) будетъ поляра точки $(x_1 y_1)$, если эта точка не лежитъ на кривой.

§ 275. *Нормаль.* Уравненіе прямой, проходящей черезъ точку P (фиг. 112) касанія перпендикулярно къ касательной, очевидно, будетъ:

$$(PN) \qquad p(y-y_1) + y_1(x-x_1) = 0 \tag{135}$$

Координаты точки встрѣчи нормали PN съ осью x, очевидно, будутъ $y=0$, $x = x_1 + p$, откуда $x - x_1 = p = MN$, т. е. отрѣзокъ, заключенный между точкою встрѣчи нормали съ осью x и абсцисса x_1, есть величина постоянная p. На основаніи этого свойства можно провесть нормаль и касательную въ параболѣ.

§ 276. *Діаметръ.* Мы видѣли въ § 236, что центръ параболы находится на безконечности, слѣдовательно всѣ діаметры въ параболѣ параллельны, такъ какъ всѣ діаметры въ коническомъ сѣченіи проходятъ черезъ центръ. Но изъ уравненія:

$$y^2 = 2px$$

видно, что ось x есть діаметръ, слѣдовательно всѣ діаметры въ параболѣ параллельны оси x; это легко видѣть и аналитически. Уравненіе діаметра, какого-нибудь, коническаго сѣченія есть:

$$\frac{df}{dx}\cos\alpha + \frac{df}{dy}\sin\alpha = 0$$

гдѣ α есть направленіе хордъ. Для параболы имѣемъ:

$$\frac{df}{dx} = -2p \quad , \quad \frac{df}{dy} = 2y$$

слѣдовательно діаметръ параболы будетъ:

$$y\sin\alpha - p\cos\alpha = 0$$

откуда:

$$y = \frac{p}{\operatorname{tg}\alpha}$$

т. е. прямая параллельная оси x.

§ 277. Уравненіе параболы, отнесенной къ одному изъ діаметровъ и къ касательной въ точкѣ встрѣчи съ кривою (§ 272), есть:

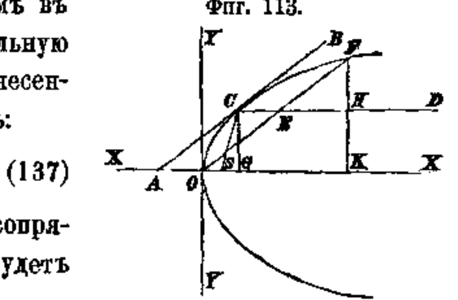
$$y^2 = 2p'x$$

а уравненіе, отнесенное къ тѣмъ же элементамъ, только перпендикулярнымъ, имѣетъ такую же форму (132):

$$y^2 = 2px \qquad (136)$$

гдѣ p есть параметръ, значеніе котораго мы видѣли въ § 273 (133); спрашивается, какая зависимость существуетъ между параметрами p и p'? Чтобы показать эту зависимость, проведемъ въ точкѣ C $(x_1 y_1)$ діаметръ CD и касательную AB (фиг. 113). Уравненіе параболы, отнесенной къ CD и CB, какъ осямъ, будетъ:

Фиг. 113.



$$y^2 = 2p'x \qquad (137)$$

Если хорда $OF \parallel AB$, то она будетъ сопряженная діаметру CD и въ точкѣ E будетъ дѣлится пополамъ.

Означимъ $\angle BCD = \angle DEF = \angle BAO$ черезъ α. Такъ какъ $EF = OE$, то $FH = HK = GC = y_1$. Координаты точки F относительно осей CD и CB будутъ EF и CE. Но $EF = \frac{FH}{\sin\alpha} = \frac{y_1}{\sin\alpha}$, слѣдовательно имѣемъ:

$$\frac{y_1^2}{\sin^2\alpha} = 2p'.CE$$

Но $CE = AO = x_1$ (§ 274), слѣдовательно:

$$\frac{y_1^2}{\sin^2\alpha} = 2p'x_1$$

Но мы также имѣемъ $y_1^2 = 2px_1$ (136); вставляя это значеніе въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$\frac{2px_1}{\sin^2\alpha} = 2p'x_1 \quad \text{откуда} \quad p' = \frac{p}{\sin^2\alpha} \qquad (138)$$

Такъ какъ α есть уголъ, который касательная въ точкѣ $C(x_1, y_1)$ составляетъ съ осью x, то изъ § 274 имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{y} \quad \text{откуда} \quad \sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{p}{p + 2x_1}}$$

Подставляя эту величину для $\sin\alpha$ въ (138), найдемъ:

$$p' = p + 2x_1$$

§ 278. *Свойства фокуса.* Остается показать еще одно замѣчательное свойство параболы. Пусть S будетъ фокусъ параболы (фиг. 113). Если проведемъ прямую SC и касательную CE, то уголъ $\angle BCD = \angle ACS$? Такъ какъ CB есть касательная въ точкѣ $C(x_1y_1)$, то полагая $\angle BCD = BAG = \alpha$, будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{y_1}$$

Означимъ $\angle ACS = \psi$, $\angle CSG = \varphi$, то $\psi = \varphi - \alpha$, но:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} = \frac{2y_1}{2x_1 - p}$$

слѣдовательно:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{2y}{2x_1 - p} - \frac{p}{y_1}}{1 + \frac{2p}{2x_1 - p}} = \frac{2y^2_1 - 2px_1 + p^2}{y_1(2x_1 - p + 2p)} = \frac{p}{y_1}$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\psi \quad , \quad \text{откуда} \quad \psi = \alpha$$

На этомъ свойствѣ параболы основано устройство параболическихъ зерналъ. Впрочемъ это свойство вытекаетъ изъ того, что $\triangle ASC$ равнобедренный, такъ какъ въ немъ $AS = x + \frac{p}{2}$ и тоже $SC = x + \frac{p}{2}$, откуда:

$$\angle CAO = \angle ACS = \angle BCD$$

§ 279. *Задача.* Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ фокуса параболы на касательную?

Рѣшеніе. Пусть (x_1, y_1) будетъ точка касанія, какой-нибудь, касательной; уравненіе ея будетъ (§ 274):

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

въ нормальной формѣ оно будетъ:

$$\frac{yy_1 - px - px_1}{\pm\sqrt{y^2_1 + p^2}} = 0$$

подставляя въ него координаты фокуса: $y=0$, $x=\frac{p}{2}$ будемъ имѣть длину искомаго перпендикуляра q:

$$q=\frac{-\frac{1}{2}p^2-px_1}{\pm\sqrt{y_1^2+p^2}}=-\frac{1}{2}\ \frac{p(p+2x_1)}{\pm\sqrt{2px_1+p^2}}$$

но q есть величина, по условію, всегда положительная, поэтому:

$$q=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+px_1}$$

§ 280. *Задача.* Выразить длину перпендикуляра q, черезъ углы, которые онъ составляетъ съ координатными осями?

Рѣшеніе. Перенесемъ начало координатъ въ фокусъ, то уравненія параболы и касательной въ точкѣ (x_1, y_1) будутъ:

$$y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)\quad,\quad yy_1=p\left(x+x_1+\frac{p}{x}\right) \tag{139}$$

Если черезъ α означимъ уголъ, который перпендикуляръ изъ фокуса на касательную составляетъ съ координатными осями, то уравненіе касательной можно написать въ формѣ:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-q=0 \tag{140}$$

сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ касательной (139), найдемъ:

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\pm\sqrt{y_1^2+p^2}}\quad,\quad \sin\alpha=\frac{y_1}{\pm\sqrt{y_1^2+p^2}}\quad,\quad q=\frac{p\left(\frac{p}{2}+x_1\right)}{\pm\sqrt{y_1^2+p^2}}$$

откуда, замѣчая, что q есть величина положительнал, будемъ имѣть:

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{y_1^2+p^2}}\quad,\quad \sin\alpha=\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+p^2}}\quad,\quad q=\frac{p(p+2x_1)}{2\sqrt{y_1^2+p^2}}$$

или:

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{2px_1+p^2}}\quad,\quad \sin\alpha=\frac{y_1}{\sqrt{2px_1+p^2}}\quad,\quad q=\frac{1}{2}\sqrt{2px_1+p^2}$$

слѣдовательно:

$$\cos\alpha=\frac{-p}{2q}\quad \text{а}\quad q=-\frac{p}{2\cos\alpha}$$

Такимъ образомъ уравненіе (140) касательной можно написать въ формѣ:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+\frac{p}{2\cos\alpha}=0 \tag{141}$$

§ 281. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса, на касательныя къ параболѣ?

Рѣшеніе. Выше нашли, что:

$$q=\frac{-p}{2\cos\alpha}$$

откуда легко видѣть, что основанія перпендикуляровъ q находятся на касательной въ вершинѣ параболы. Изъ этого слѣдуетъ, обратно, если изъ, какой-нибудь точки будемъ проводить прямыя до встрѣчи съ данной прямой и изъ точекъ встрѣчи будемъ возставлять перпендикуляры къ этимъ прямымъ, то всѣ эти перпендикуляры будутъ касательныя къ параболѣ, коей фокусъ находится въ данной точкѣ, а вершина есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную прямую.

§ 282. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто пересѣченія перпендикулярныхъ между собою касательныхъ къ параболѣ?

Рѣшеніе. Уравненіе касательной къ параболѣ есть:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha+\frac{p}{2\cos\alpha}=0 \quad \text{или} \quad x\cos^2\alpha+y\sin\alpha.\cos\alpha+\frac{p}{2}=0$$

уравненіе перпендикулярной къ ней касательной будетъ:

$$x\sin^2\alpha-y\sin\alpha.\cos\alpha+\frac{p}{2}=0$$

исключивъ α, найдемъ:

$$x+p=0$$

а это уравненіе директрисы.

§ 283. *Предложеніе.* Точка касанія P касательной PT къ параболѣ (фиг. 112) и точка T встрѣчи этой касательной съ осью x находятся въ равномъ разстояніи отъ фокуса F.

Доказательство. Изъ уравненія касательной (134), полагая $y=0$, будемъ имѣть $VT=-x$, но такъ какъ $FV=\frac{p}{2}$ (§ 15), то $FT=VT+\frac{p}{2}$. Изъ того же § извѣстно, что $FP=x+\frac{p}{2}$, слѣдовательно:

$$FT=FP$$

§ 284. *Предложеніе.* Уголъ между, какими-нибудь, двумя касательными къ параболѣ равенъ половинѣ угла между радіусами векторами проведенными въ точки ихъ касанія.

Доказательство. Изъ предъидущаго предложенія слѣдуетъ, что $\triangle TFP$ равнобедренный, слѣдовательно (фиг. 112):

$$\angle PTF = \frac{1}{2} \angle PFM$$

Для другой касательной въ точкѣ P', встрѣчающей ось x въ T' имѣемъ также:

$$\angle P'T'F = \frac{1}{2} \angle P'FM'$$

откуда, вычитая, найдемъ искомое предложеніе.

§ 285. *Предложеніе.* Прямая, соединяющая фокусъ съ точкою пересѣченія двухъ касательныхъ, дѣлитъ пополамъ уголъ образуемый радіусами векторами, проведенными изъ фокуса въ точки касанія.

Доказательство. Уравненія двухъ касательныхъ (141) суть:

$$x\cos^2\alpha_1 + y\sin\alpha_1.\cos\alpha_1 + \frac{p}{2} = 0 \quad , \quad x\cos^2\alpha + \sin\alpha_2.\cos\alpha_2 + \frac{p}{2} = 0$$

вычитая, найдемъ прямую:

$$x\sin(\alpha_1 + \alpha_2) - y\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

составляющую уголъ $\alpha_1 + \alpha_2$ съ осью x. Но α_1 и α_2 суть углы, которые перпендикуляры, опущенные изъ фокуса на касательныя, составляютъ съ осью x, слѣдовательно $VFP = 2\alpha_1$, $VFP' = 2\alpha_2$ (фиг. 112), откуда, прямая составляющая съ осью x уголъ $\alpha_1 + \alpha_2$ есть равнодѣлящая уголъ PFP'.

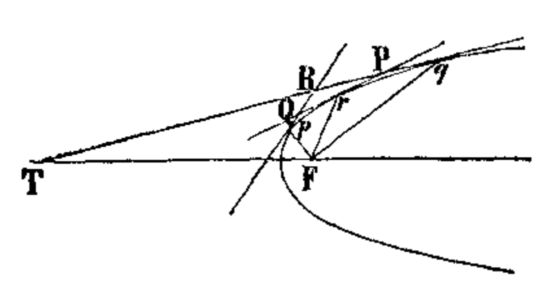
Слѣдствіе 1. Если положимъ $PFP' = 180^0$, то PP' пройдетъ чрезъ фокусъ, касательныя TP и $T'P'$ пересѣкутся на директрисѣ, а $\angle TFP = 90^0$.

Слѣдствіе 2. Если какая-нибудь хорда PP' пересѣкаетъ директрису въ точкѣ D, то FD есть внѣшняя равнодѣлящая $\angle PFP'$. Это можно показать, какъ въ § 263, пр. 2. (фиг. 104).

Слѣдствіе 3. Если двѣ данныя касательныя къ параболѣ пересѣкаются, какою-нибудь, третею касательною, то уголъ образуемый радіусами векторами, проведенными изъ фокуса къ точкамъ пересѣченія третей касательной съ двумя данными, будетъ дополнительный до 180^0 углу составляемому данными двумя касательными.

Въ самомъ дѣлѣ, уголъ QRT (фиг. 114) равенъ половинѣ $\angle pFq$ (§ 284), а по настоящему §, очевидно:

Фиг. 114.



$$\angle PFQ = \frac{1}{2} \angle pFq$$

слѣдовательно:

$$\angle PFQ = \angle QRT$$

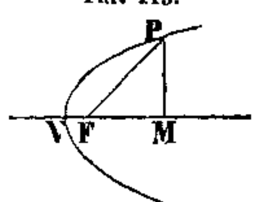
откуда видимъ, что:

$$\angle PRQ + \angle pFq = 180^0$$

Слѣдствіе 4. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что кругъ описанный около треугольника PRQ, образуемаго тремя касательными къ параболѣ, всегда проходитъ чрезъ ея фокусъ.

§ 286. *Задача.* Найти полярное уравненіе параболы, принявъ фокусъ за полюсъ?

Фиг. 115.



Рѣшеніе. Въ § 15 видѣли, что фокусный радіусъ векторъ (фиг. 115):

$$FP = r = x + \frac{p}{2}$$

но:

$$x = \frac{1}{2}p + FM = \frac{1}{2}p + r\cos\varphi \text{ , } \varphi \text{ есть } \angle PFM;$$

слѣдовательно:

$$r = p + r\cos\varphi$$

откуда:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi} \tag{142}$$

Это частный случай уравненія (97), если положимъ $e = 1$.

Уголъ φ отсчитывается въ направленім FM, если же будемъ его отсчитывать въ направленіи FV, то предъидущее уравненіе будетъ:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} \tag{143}$$

которое можно написать въ формѣ:

$$2r\cos^2\frac{\varphi}{2} = p \tag{144}$$

Подобіе коническихъ сѣченій.

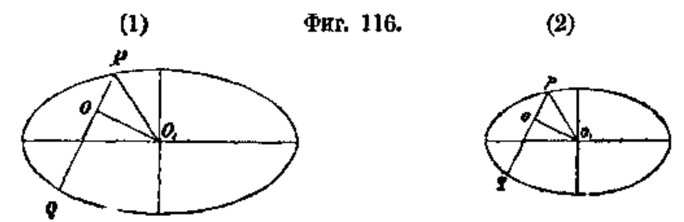
§ 287. *Подобными и подобно-расположенными фигурами* называются такія, въ которыхъ радіусы векторы, проведенные изъ нѣкоторой точки,

въ одной изъ нихъ, пропорціональны радіусамъ векторамъ въ другой, проведеннымъ изъ другой точки, параллельно первымъ.

Если существуетъ пара такихъ точекъ O и o (фиг. 116) въ подобныхъ фигурахъ, то существуетъ такихъ же и безчисленное множество.

Возьмемъ какую-нибудь точку O_1 въ первой фигурѣ.

(1) Фиг. 116. (2)



Проведемъ $oo_1 \parallel OO_1$ и отложимъ OO_1 такъ, чтобы:

$$\frac{oo_1}{OO_1} = \frac{op}{OP}$$

то будемъ имѣть два подобные треугольника OO_1P и oo_1p, изъ которыхъ слѣдуетъ, что $O_1P \parallel o_1p$ и:

$$\frac{o_1p}{O_1P} = \frac{op}{OP}$$

Легко также показать, что всѣ параллельные радіусы векторы, проведенные черезъ точки O_1 и o_1, пропорціональны, слѣдовательно точки O_1 и o_1 имѣютъ такія же свойства, какъ и точки O и o.

§ 288. *Задача.* Найти условіе подобія коническихъ сѣченій данныхъ общими уравненіями:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2y_{23}y + a_{33} = 0 \\ a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0 \end{aligned} \tag{145}$$

Если перенесемъ начала координатъ въ центры этихъ коническихъ сѣченій (§ 243), то онѣ сдѣлаются:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{\Delta}{A_{33}} = 0 \\ a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + \frac{\Delta'}{A'_{33}} = 0 \end{aligned} \tag{146}$$

Если теперь положимъ, въ первомъ:

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta$$

а во второмъ:

$$x = \rho_1 \cos\theta \quad , \quad y = \rho_2 \sin\theta$$

то найдемъ:

$$\rho^2 = \frac{\Delta}{A_{33}} \cdot \frac{1}{a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin\theta}$$

$$\rho_1^2 = \frac{\Delta'}{A'_{33}} \cdot \frac{1}{a'_{11}\cos^2\theta + 2a'_{12}\cos\theta\sin\theta + a'_{22}\sin\theta} \tag{147}$$

отвуда, если:

$$a'_{11} = ka_{11} \quad , \quad a'_{12} = ka_{12} \quad , \quad a'_{22} = ka_{22} \tag{148}$$

будемъ имѣть:

$$\frac{\rho^2}{\rho_1^2} = \frac{\Delta}{A_{33}} : \frac{\Delta'}{A'_{33}} \cdot k \tag{149}$$

т. е. параллельные радіусы векторы ρ и ρ_1 пропорціональны. Изъ этого видимъ, что два коническія сѣченія подобны и подобно расположены, если коэфиціенты при перемѣнныхъ второй степени: x^2, xy, y^2 равны или отличаются только постояннымъ множителемъ.

Изъ формулы (149) видимъ, что параллельные діаметры, подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій пропорціональны.

§ 289. Очевидно, что направленіе осей двухъ подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій одно и то же, такъ какъ наибольшій и наименьшій изъ діаметровъ должны быть параллельны.

Если діаметръ одного изъ коническихъ сѣченій дѣлается безконечнымъ, то и ему параллельный діаметръ также сдѣлается безконечнымъ, т. е. ассимптоты, двухъ подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій, параллельны. Это слѣдуетъ изъ § 237, гдѣ мы показали, что направленіе ассимптотъ зависитъ только отъ членовъ второго порядка въ уравненіи.

Въ подобныхъ коническихъ сѣченіяхъ эксцентриситеты равны; въ самомъ дѣлѣ, если e и e_1 суть эксцентриситеты данныхъ коническихъ сѣченій (145), то имѣемъ (§ 13):

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad e_1 = \frac{k^2a^2 - k^2b^2}{k^2a^2}$$

т. е. $e = e_1$.

Поэтому иногда опредѣляютъ подобіе коническихъ сѣченій, говоря, что онѣ имѣютъ параллельныя оси и равные эксцентриситеты.

Если въ двухъ гиперболахъ ассимптоты параллельны, то онѣ подобны, такъ какъ ихъ оси, будучи равнодѣлящими угловъ между ассимп-

тотами, параллельны, а эксцентриситеты зависятъ отъ угла между ассимптотами (§ 270).

Такъ какъ въ параболѣ эксцентриситетъ равенъ единицѣ, то заключаемъ, что всѣ параболы подобны и подобно расположены, если ихъ оси параллельны.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія параболы:

$$y^2 = 2px$$

имѣемъ:

$$\rho = \frac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

для другой, какой-нибудь, параболы будемъ имѣть:

$$\rho_1 = \frac{2p_1\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

откуда $\rho:\rho_1 = p:p_1$, т. е. радіусы ρ и ρ_1 пропорціональны.

§ 290. Двѣ фигуры подобны, но не подобно расположены, если пропорціональные радіусы составляютъ постоянный уголъ, такъ что если одна изъ фигуръ будетъ поворочена на этотъ уголъ, то эти фигуры дѣлаются и подобно расположенными.

Задача. Найти условія подобія двухъ коническихъ сѣченій, данныхъ общими уравненіями (145), но которые не расположены подобно?

Рѣшеніе. Для этого надобно преобразовать первое изъ уравненій къ осямъ, составляющимъ уголъ θ съ данными осями, и искать величину угла, при которой коэфиціенты a_{11}, a_{12}, a_{22} будутъ пропорціональны коэфиціентамъ a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}. Положимъ, что они сдѣлаются ka_{11}, ka_{12}, ka_{22}. Такъ какъ оси прямоугольны, то мы знаемъ, что $a_{11}+a_{22}$ и $a_{11}a_{22}-a^2_{12}$ суть инваріанты, слѣдовательно:

$$a_{11}+a_{22} = k(a'_{11}+a'_{22}) \qquad a_{11}a_{22}-a^2_{12} = k^2(a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12})$$

а потому искомое условіе, очевидно, есть:

$$\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})^2} = \frac{a'_{11}a'_{22}-a'_{12}}{(a'_{11}+a'_{22})^2}$$

ГЛАВА XVII.

Кругъ.

§ 291. Послѣ изученія свойствъ кривыхъ второго порядка, между которыми находится и кругъ, какъ частный случай эллипса, мы займемся отдѣльно этой, по видимому, самой простой кривой послѣ прямой линіи, но которой свойства ведутъ къ необыкновенно замѣчательнымъ обобщеніямъ, послужившимъ основаніемъ преобразованія метрическихъ свойствъ или предложеній въ проэктивныя, т. е. преобразованій предложеній относительно *мѣры* въ предложенія относительно *положенія.*

Опредѣленіе. Окружность или кругъ есть кривая линія, которой каждая точка находится въ равномъ разстояніи отъ данной точки называемой *центромъ.*

Какъ видно опредѣленіе круга есть метрическое, ниже мы это опредѣленіе преобразуемъ въ опредѣленіе положенія.

Если отнесемъ кругъ къ прямоугольнымъ координатамъ и назовемъ координаты центра черазъ (a, b), радіусъ черезъ r, то уравненіе круга будетъ, если (x, y) суть координаты, какой-нибудь на немъ точки:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

Если центръ находится въ началѣ координатъ, то $a=0$ и $b=0$, слѣдовательно уравненіе круга будетъ:

$$x^2+y^2=r^2 \tag{2}$$

Наконецъ, если начало координатъ будетъ въ концѣ діаметра, а ось абсциссъ діаметръ, то $a=r$, $b=0$, слѣдовательно уравненіе круга будетъ:

$$x^2+y^2=2rx \tag{3}$$

§ 292. Замѣтимъ, что уравненіе круга, отнесеннаго къ прямоугольнымъ координатамъ, не содержитъ члена xy и коэфиціенты при x^2 и при y^2 равны. Слѣдовательно общее уравненіе второй степени:

$$a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{4}$$

не можетъ представлять круга, если a_{12} не равно нулю и если a_{11} не равно a_{22}.

Если же $a_{12}=0$, $a_{11}=a_{22}$, то уравненію:

$$a_{11}x^2+a_{11}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{5}$$

можно дать форму (1). Въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+\left(y+\frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2=\frac{a^2_{13}+a^2_{23}-a_{11}a_{33}}{a^2_{11}} \tag{6}$$

а это, очевидно, кругъ, коего координаты центра суть:

$$-\frac{a_{13}}{a_{11}}\quad,\quad -\frac{a_{23}}{a_{11}} \tag{7}$$

а радіусъ:

$$\frac{\sqrt{a^2_{13}+a^2_{23}-a_{11}a_{23}}}{a_{11}} \tag{8}$$

Если $a^2_{13}+a^2_{23}-a_{11}a_{33}$ есть величина отрицательная, то радіусъ круга будетъ мнимый и уравненіе не можетъ быть удовлетворено дѣйствительными величинами координатъ x и y. Если $a^2_{13}+a^2_{23}-a_{11}a_{33}=0$, то радіусъ круга равенъ нулю и уравненіе удовлетворяется только координатами центра, т. е. представляетъ одну точку или безконечно малый кругъ.

§ 293. Уравненіе круга, отнесеннаго къ косоугольнымъ координатамъ рѣдко употребляется, а получается изъ уравненія разстоянія между двумя точками (x, y) и (a, b), гдѣ a и b суть координаты центра (§ 4). Если ω есть уголъ между координатами, а r радіусъ круга, то его уравненіе будетъ (§ 4):

$$(x-a)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega+(y-b)^2=r^2 \tag{9}$$

Если это уравненіе сравнимъ съ общимъ уравненіемъ второго порядка (4), то найдемъ, что оно можетъ представлять кругъ только въ томъ случаѣ, когда:

$$a_{11}=a_{22}\quad,\quad a_{12}=a\cos\omega \tag{10}$$

Если эти уравненія удовлетворены, то изъ сравненія коэфиціентовъ уравненій (4) и (9), найдемъ:

$$\begin{gathered} a+b\cos\omega=-\frac{a_{13}}{a_{11}}\quad,\quad b+a\cos\omega=-\frac{a_{23}}{a_{11}}\,, \\ a^2+b^2+2ab\cos\omega=r^2+\frac{a_{33}}{a_{11}} \end{gathered} \tag{11}$$

Такъ какъ координаты центра (a, b) опредѣляются только изъ двухъ первыхъ уравненій (11), которыя не содержатъ a_{33}, то заключаемъ, что два круга будутъ концентрическіе, если ихъ уравненія отличаются только постояннымъ членомъ.

Если $a_{33}=0$, то кругъ проходитъ черезъ начало координатъ, такъ какъ уравненіе его удовлетворяется координатами начала $x=0$, $y=0$.

§ 294. *Задача.* Найти координаты точекъ пересѣченія данной прямой съ даннымъ кругомъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія круга и прямой будутъ:

$$x^2+y^2=r^2 \quad , \quad x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{12}$$

Изъ уравненія прямой имѣемъ:

$$y=\frac{p-x\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

а изъ уравненія круга:

$$y^2=r^2-x^2$$

приравнивая, найдемъ:

$$\left(\frac{p-x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=r^2-x^2$$

откуда найдемъ квадратное уравненіе:

$$x^2-2p.\cos\alpha.x+p^2-r^2\sin^2\alpha=0$$

изъ котораго:

$$\begin{aligned} x&=p\cos\alpha\pm\sin\alpha\sqrt{r^2-p^2} \\ y&=p\sin\alpha\mp\cos\alpha\sqrt{r^2-p^2} \end{aligned} \tag{13}$$

Изъ этихъ выраженій видимъ:

1. Если $r>p$, то данная прямая встрѣчаетъ окружность въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ.

2. Если $r=p$, то точки встрѣчи совпадаютъ, данная прямая касается круга, слѣдовательно уравненіе касательной будетъ:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=r \tag{14}$$

гдѣ α, очевидно, будетъ уголъ, который составляетъ съ осью x радіусъ, проведенный въ точку касанія. Если черезъ (x_1y_1) означимъ координаты точки касанія, то найдемъ:

$$x_1=r\cos\alpha \quad , \quad y_1=r\sin\alpha$$

подставляя вмѣсто $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ эти значенія въ (14), найдемъ уравненіе касательной:

$$xx_1+yy_1=r^2 \tag{15}$$

3. Если наконецъ $r < p$, то выраженія (13) дѣлаются мнимыми, прямая не пересѣкаетъ кругъ видимо, но мы будемъ всегда говорить, что она пересѣкаетъ кругъ въ двухъ воображаемыхъ точкахъ.

Если уравненіе круга дано въ общей формѣ (1), то уравненіе касательной будетъ:

$$(a-x_1)(a-x)+(b-y_1)(b-y)=r^2 \tag{16}$$

§ 295. *Задача.* Найти точки пересѣченія даннаго круга съ прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе круга будетъ:

$$x^2+y^2=r^2$$

а координаты данныхъ точекъ (x_1y_1), (x_2y_2).

Мы знаемъ, что координаты, какой-нибудь, точки на прямой, проходящей черезъ точки (x_1y_1) и (x_2y_2) даются выраженіями (§ 4):

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

Если x и y суть координаты точекъ пересѣченія прямой съ кругомъ, то предъидущія выраженія должны удовлетворять уравненію круга, слѣдовательно будемъ имѣть:

$$(x_1+\lambda x_2)^2+(y_1+\lambda y_2)^2=(1+\lambda)^2r^2$$

откуда:

$$(x^2_2+y^2_2-r^2)\lambda^2+2(x_1x_2+y_1y_2-r^2)\lambda+(x^2_1+y^2_1-r^2)=0 \tag{17}$$

Это уравненіе относительно λ второй степени, слѣдовательно λ будетъ имѣть два значенія и слѣдовательно данная прямая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ.

Слѣдствіе 1. Если точку (x_1y_1) фиксируемъ, а точку (x_2y_2) будемъ такъ измѣнять, чтобы координаты ея удовлетворяли уравненіе:

$$x_1x+y_1y-r^2=0 \tag{18}$$

то въ уравненіи (17) коэфиціентъ при λ будетъ равенъ нулю, а потому корни этого уравненія будутъ равны, но съ противными знаками, слѣдовательно точка (x_1y_1), двѣ точки пересѣченія круга съ прямою и точка удовлетворяющая уравненіе (18), будутъ четыре гармоническія точки. Откуда видимъ, что уравненіе (18) есть поляра точки (x_1y_1) относительно круга.

Слѣдствіе 2. Если точка (x_1y_1) будетъ фиксирована, а точка (x_2y_2) будетъ такъ выбрана, чтобы удовлетворить уравненіе:

$$(x^2+y^2-r^2)(x^2_1+y^2_1-r^2)=(xx_1+yy_1-r^2)^2 \tag{19}$$

то корни уравненія (17) будутъ равны, данная прямая касается круга, слѣдовательно уравненіе (19) будетъ пара касательныхъ, проведенныхъ изъ точки (x_1y_1) къ данному кругу. Хотя это уравненіе второй степени относительно x, y, но оно разлагается на два линейные множителя.

Если уравненіе круга будутъ въ общей формѣ, то уравненіе касательныхъ будетъ:

$$\left\{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2-r^2\right\}\left\{(a-x)^2+(b-y)^2-r^2\right\}=$$
$$=\left\{(a-x_1)(a-x)+(b-y_1)(b-y)-r\right\}^2 \tag{20}$$

§ 296. *Задача.* Найти длину касательной, проведенной изъ данной точки къ данному кругу?

Рѣшеніе. Пусть данный кругъ будетъ:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

а данная точка (x_1y_1). Разстояніе данной точки отъ центра, очевидно, есть:

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$$

Слѣдовательно искомое разстояніе будетъ δ:

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2=\delta^2 \tag{21}$$

изъ этого видимъ, что если точка (x_1y_1) обращаетъ въ нуль первую часть уравненія (21), то она находится на окружности, если же первая часть обращается въ числовое значеніе, то это значеніе есть квадратъ длины касательной, проведенной изъ точки (x_1y_1) къ кругу.

§ 297. Такъ какъ уравненіе круга (1) содержитъ только три коэфиціента, то его вполнѣ опредѣляютъ три данныя координатами точки. Мы увидимъ ниже, почему кругъ, будучи коническимъ сѣченіемъ, опредѣляется не пятью, а только тремя данными точками.

§ 298. *Уравненіе круга въ полярныхъ координатахъ.* Если въ уравненіи (1) подставимъ вмѣсто x и y:

$$x=\rho\cos\varphi \quad , \quad y=\rho\sin\varphi$$

то найдемъ:

$$\rho^2 - 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\rho + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \qquad (22)$$

Если центръ круга будетъ на оси x, то $b = 0$, слѣдовательно уравненіе будетъ:

$$\rho^2 - 2a\cos\varphi \cdot \rho + a^2 - r^2 = 0 \qquad (23)$$

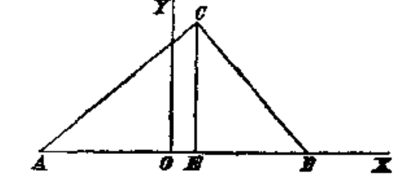
Если при этомъ полюсъ будетъ на окружности, то $a = r$ и уравненіе круга сдѣлается:

$$\rho = 2r\cos\varphi \qquad (24)$$

Пр. 1. Дано основаніе треугольника и уголъ противулежащій основанію, найти геометрическое мѣсто вершины?

Рѣшеніе. Пусть данное основаніе $AB = 2a$, данный уголъ C. Возьмемъ (фиг. 117) средину основанія O за начало координатъ, основаніе за ось x, перпендикуляръ изъ средины за ось y.

Фиг. 117.



$$OE = x,\ EC = y;$$

если положимъ:

$$\angle ACE = \alpha \quad , \quad \angle BCE = \beta$$

то:

$$\alpha + \beta = C$$

откуда, замѣчая, что:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a + x}{y} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{a - x}{y}$$

найдемъ:

$$\operatorname{tg} C = \frac{2ay}{y^2 - a^2 + x^2}$$

откуда:

$$y^2 + x^2 - \frac{2ay}{\operatorname{tg} C} = a^2$$

это уравненіе искомаго геометрическаго мѣста, которое, очевидно есть кругъ. Если $C = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} C = \infty$ и уравненіе геометрическаго мѣста будетъ:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

т. е. кругъ, коего радіусъ есть a.

Пр. 2. Дано основаніе треугольника и уголъ, противулежащій основанію, найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ варшинъ на стороны?

Рѣшеніе: Пусть данное основаніе будетъ $AB = 2a$, данный уголъ C. Возьмемъ тѣже координатныя оси, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ. Если черезъ (x, y_1) означимъ координаты вершины C, то будемъ имѣть, какъ выше:

$$y_1^2 + x^2 - \frac{2ay_1}{\operatorname{tg} C} = a^2$$

Если означимъ черезъ (x,y) координаты искомаго мѣста, то, очевидно будемъ имѣть:

$$y_1 = \frac{a^2 - x^2}{y}$$

подставляя вмѣсто y_1 его выраженіе въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$y^2 + x^2 + \frac{2ay}{\operatorname{tg} C} = a^2$$

уравненіе, которое отличается отъ предъидущихъ только знакомъ при $\operatorname{tg} C$.

Пр. 3. Дано нѣкоторое число точекъ, найти геометрическое мѣсто точки, которой бы квадратъ разстоянія отъ первой точки умноженный на m_1, сложенный съ квадратомъ разстоянія, умноженнымъ на m_2, отъ второй точки и т. д. была-бы величина постоянная?

Рѣшеніе. Пусть координаты данныхъ точекъ будутъ (x_1y_1), $(x_2y_2)\ldots$, постоянная величина пусть будетъ a^2, наконецъ пусть (xy) будутъ координаты точки искомаго мѣста. По условію должны имѣть:

$$\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\}\, m_1 + \{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2\}\, m_2 + \ldots = a^2$$

или:

$$x^2 \Sigma m_r + y^2 \Sigma m_r - 2x \Sigma m_r x_r - 2y \Sigma m_r y_r + \Sigma m_r x_r^2 + \Sigma m_r y_r^2 = a^2$$

очевидно, кругъ, коего координаты центра суть:

$$x = \frac{\Sigma m_r x_r}{\Sigma m_r} \quad , \quad y = \frac{\Sigma m_r y_r}{\Sigma m_r}$$

Пр. 4. Данъ кругъ и прямая линія, найти геометрическое мѣсто точки, изъ которой если проведемъ сѣкущую круга и изъ точекъ пересѣченія опустимъ перпендикуляры на данную прямую, то площадь прямоугольника построеннаго на этихъ перпендикулярахъ была бы величина постоянная?

Рѣшеніе. Возьмемъ данную прямую за ось x, перпендикуляръ опущенный изъ центра даннаго круга за ось y, пусть координаты искомой точки геометрическаго мѣста будутъ $(x'y')$. Очевидно, уравненіе круга будетъ:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

уравненіе, какой-нибудь, сѣкущей будетъ:

$$y - y' = \alpha(x - x')$$

исключая изъ этихъ двухъ уравненій x, найдемъ квадратное уравненіе относительно y, произведеніе корней котораго будетъ:

$$\frac{(y' - \alpha x')^2 + \alpha^2(b^2 - r^2)}{1 + \alpha^2}$$

Чтобы это была величина постоянная необходимо, чтобы это выраженіе независило отъ α, а это только тогда возможно, когда $x' = 0$ $y'^2 = b^2 - r^2$; слѣдовательно геометрическое мѣсто будетъ двѣ точки:

$$x' = 0 \quad , \quad y' = +\sqrt{b^2 - r^2}$$

$$x' = 0 \quad , \quad y' = -\sqrt{b^2 - r^2}$$

Сокращенный способъ

§ 299. Если черезъ:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_3=0 \quad , \quad A_4=0$$

означимъ уравненія прямыхъ въ нормальной формѣ:

$$x\cos\alpha_r+y\sin\alpha_r-p_r=0 \tag{25}$$

то уравненіе:

$$A_1A_2=kA_3A_4 \tag{26}$$

будетъ, очевидно, коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія прямыхъ:

$A_1=0$ и $A_3=0$, $A_1=0$ и $A_4=0$; $A_2=0$ и $A_3=0$, $A_2=0$ и $A_4=0$

Если необходимо знать какое изъ коническихъ сѣченій представляетъ (26), то надобно вмѣсто $A_1, A_2, \ldots$ подставить ихъ выраженія (25) и опредѣлить родъ коническаго сѣченія признакомъ даннымъ въ § 236.

Уравненіе (26) выражаетъ слѣдующее свойство коническаго сѣченія, описаннаго около четыреугольника: Произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ, какой-нибудь, точки коническаго сѣченія, описаннаго около четыреугольника, на стороны $A_1=0$ и $A_2=0$ находится въ постоянномъ отношеніи съ произведеніемъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ той-же точки на сторони $A_3=0$, $A_4=0$.

Задача. Когда коническое сѣченіе:

$$A_1A_2=kA_3A_4$$

будетъ кругъ?

Рѣшеніе. Подставимъ въ это уравненіе вмѣсто $A_1, A_2, \ldots$ ихъ выраженія:

$$x\cos\alpha_r+y\sin\alpha_r-p_r$$

то найдемъ:

$$(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1)(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2)=$$

$$=k(x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3-p_3)(x\cos\alpha_4+y\sin\alpha_4-p_4)$$

перемножая и приравнивая коэфиціенты при x^2 и y^2, а коэфиціентъ при xy, полагая равнымъ нулю, найдемъ:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2)=k\cos(\alpha_3+\alpha_4) \quad ; \quad \sin(\alpha_1+\alpha_2)=k\sin(\alpha_3+\alpha_4)$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ $k=\pm 1$. Это значеніе k даетъ слѣдующую зависимость между углами:

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4 \quad \text{или} \quad \alpha_1+\alpha_2=180^0+\alpha_3+\alpha_4$$

откуда:

$$\alpha_1-\alpha_3=\alpha_4-\alpha_2 \quad \text{или} \quad \alpha_1-\alpha_3=180^0+\alpha_4-\alpha_2$$

§ 300. Если въ уравненіи:

$$A_1A_2=kA_3A_4 \tag{27}$$

положимъ $A_3=A_4$, то это уравненіе сдѣлается:

$$A_1A_2=kA^2_3 \tag{28}$$

Чтобы получить точку, въ которой сторона A_1 четыреугольника пересѣкаетъ коническое сѣченіе, надобно положить въ уравненіи (28) $A_1=0$, но это даетъ уравненіе $A^2_3=0$, которое есть полный квадратъ, слѣдовательно сторона A_1 пересѣкаетъ коническое сѣченіе въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т. е. она касается коническаго сѣченія. Точно также и сторона A_2 есть касательная къ коническому сѣченію. Слѣдовательно A_1 и A_2 суть касательныя, а A_3 есть хорда, соединяющая точки касанія. Хорду эту будемъ называть *хордою соприкосновенія.*

Задача. Когда уравненіе:

$$A_1A_2=kA^2_3$$

представляетъ кругъ?

Рѣшеніе. Пріемъ, изложенный въ предъидущей задачѣ даетъ для этого слѣдующія условія:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2)=k\cos 2\alpha_3 \quad , \quad \sin(\alpha_1+\alpha_2)=k\sin 2\alpha_3$$

откуда, какъ выше:

$$k=1 \quad , \quad \alpha_1-\alpha_3=\alpha_3-\alpha_2$$

т. е. треугольникъ будетъ равнобедренный. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если изъ, какой-нибудь, точки окружности опустимъ перпендикуляры на двѣ касательныя и ихъ хорду соприкосновенія, то произведеніе перпендикуляровъ на касательныя находится въ постоянномъ отношеніи съ квадратомъ перпендикуляра на хорду соприкосновенія.

Задача. Найти уравненіе круга, описаннаго около треугольника, коего стороны суть:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_3=0$$

Рѣшеніе. Уравненіе формы:

$$\lambda A_1A_2+\mu A_1A_3+\nu A_2A_3=0 \tag{29}$$

представляетъ, очевидно, коническое сѣченіе, описанное около даннаго треугольника, такъ какъ оно удовлетворяется координатами точекъ пересѣченія сторонъ:

$$A_1 = 0 \text{ и } A_2 = 0 \ ; \ A_1 = 0 \text{ и } A_3 = 0 \ ; \ A_2 = 0 \text{ и } A_3 = 0$$

спрашивается, когда уравненіе (29) представляетъ кругъ?

Поступая, какъ сказали выше (§ 299), найдемъ слѣдующія условія:

$$\lambda \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \mu \cos(\alpha_1 + \alpha_3) + \nu \cos(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

$$\lambda \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \mu \sin(\alpha_1 + \alpha_3) + \nu \sin(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

откуда:

$$\frac{\lambda}{\sin(\alpha_2 + \alpha_3) \,.\, \cos(\alpha_1 + \alpha_3) - \sin(\alpha_1 + \alpha_3)\cos(\alpha_2 + \alpha_3)} =$$

$$= \frac{\mu}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_3 + \alpha_3) - \sin(\alpha_2 + \alpha_3)\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} =$$

$$= \frac{\nu}{\sin(\alpha_1 + \alpha_3)\cos(\alpha_1 + \alpha_3) - \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

или:

$$\frac{\lambda}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\mu}{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)} = \frac{\nu}{\sin(\alpha_3 - \alpha_3)}$$

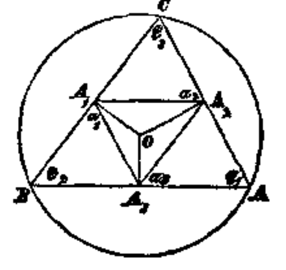
Но $\alpha_2 - \alpha_3$, $\alpha_1 - \alpha_3$, $\alpha_2 - \alpha_1$ суть углы между сторонами A_2 и A_3; A_1 и A_3, A_2 и A_1, которые если означимъ черезъ φ_1, φ_2, φ_3, то найдемъ:

$$A_1 A_2 \sin\varphi_3 + A_1 A_3 \sin\varphi_2 + A_2 A_3 \sin\varphi_1 = 0 \qquad (30)$$

углы φ_1, φ_2, φ_3 противулежатъ сторонамъ A_1, A_2, A_3.

Покажемъ теперь замѣчательное геометрическое значеніе уравненія (30). Пусть треугольникъ, около котораго описанъ кругъ, будетъ ABC (фиг. 118).

Фиг. 118.



Возьмемъ, какую-нибудь точку O, то для ея координатъ значенія A_1, A_2, A_3 будутъ перпендикуляры Oa_1, Oa_2, Oa_3. Если проведемъ прямыя a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3, то образуется треугольникъ $a_1a_2a_3$, въ которомъ углы при точкѣ O суть дополнительные угловъ $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ до $2d$, слѣдовательно:

$$A_1A_2 \sin\varphi_3 \quad , \quad A_1A_3 \sin\varphi_2 \quad , \quad A_2A_3 \sin\varphi_1$$

суть двойныя площади треугольниковъ:

$$\triangle\, A_1OA_2 \quad , \quad \triangle\, A_1OA_3 \quad , \quad \triangle\, A_2OA_3$$

откуда:

$$A_1 A_2 \sin\varphi_3 + A_1 A_3 \sin\varphi_2 + A_2 A_3 \varphi_1$$

сть двойная площадь треугольника $a_1 a_2 a_3$.

Если точка O находится на окружности круга, то эта площать равна нулю, откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если изъ, какой-нибудь, точки окружностм круга, описаннаго около треугольника, опустимъ перпендикуляры на стороны треугольника, то основанія этихъ перпендикуляровъ лежатъ на одной прямой линіи. Это предложеніе принадлежитъ Симсону.

§ 301. Напишемъ уравненіе (29) въ формѣ:

$$\lambda A_1 A_2 + A_3(\mu A_1 + \nu A_2) = 0$$

которое представляетъ коническое сѣченіе и кругъ, если λ, μ, ν имѣютъ выше найденныя значенія. Это уравненіе удовлетворяется координатами точекъ пересѣченія прямыхъ:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_3 = 0 \quad ; \quad A_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_3 = 0$$

Точно также оно удовлетворяется координатами точекъ пересѣченія прямыхъ:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad \mu A_1 + \nu A_2 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad \text{и} \quad \mu A_1 + \nu A_2 = 0$$

Но эти двѣ точки совпадаютъ, потому что прямая:

$$\mu A_1 + \nu A_2 = 0$$

проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$; слѣдовательно прямая:

$$\mu A_1 + \nu A_2 = 0$$

есть касательная къ кривой въ точкѣ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$; точно также:

$$\lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \quad , \quad \lambda A_1 + \nu A_3 = 0$$

суть касательныя къ кривой въ точкахъ $A_1 = 0$, $A_3 = 0$; $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. Если касательныя въ вершинахъ треугольника напишемъ въ формѣ:

$$\frac{A_2}{\mu} + \frac{A_3}{\lambda} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{\nu} + \frac{A_3}{\lambda} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{\nu} + \frac{A_2}{\mu} = 0 \qquad (31)$$

то легко видѣть, что три точки, въ которыхъ касательныя пересѣкаютъ противуположныя стороны, лежатъ на одной прямой линіи:

$$\frac{A_1}{\nu} + \frac{A_2}{\mu} + \frac{A_3}{\lambda} = 0 \qquad (32)$$

Вычитая по-парно уравненія (31), найдемъ:

$$\frac{A_2}{\mu}-\frac{A_3}{\lambda}=0 \quad , \quad \frac{A_3}{\lambda}-\frac{A_1}{\nu}=0 \quad , \quad \frac{A_1}{\nu}-\frac{A_2}{\mu}=0 \qquad (33)$$

уравненія, которыя показываютъ, что эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ. Откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Прямыя, соединяющія вершины вписаннаго въ кругъ треугольника съ соотвѣтствующими вершинами треугольника, образуемаго касательными въ этихъ вершинахъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

§ 302. Легко видѣть, что:

$$\lambda^2A^2_1+\mu^2A^2_2+\nu^2A^2_3-2\lambda\mu A_1A_2-2\lambda\nu A_1A_3-2\mu\nu A_2A_3=0 \qquad (34)$$

есть уравненіе кривой второго порядка, вписанной въ треугольникъ:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_3=0$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\sqrt{\lambda A_1}+\sqrt{\mu A_2}+\sqrt{\nu A_3}=0 \qquad (35)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $A_3=0$, то имѣемъ:

$$(\lambda A_1-\mu A_2)^2=0$$

т. е. сторона $A_3=0$ пересѣкаетъ кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ, т. е. $A_3=0$ есть касательная къ коническому сѣченію (34); точно также $A_1=0$, $A_2=0$ суть касательныя къ нему. Если уравненіе (34) напишемъ въ формѣ:

$$\nu A_3(\nu A_3-2\lambda A_1-2\mu A_2)+(\lambda A_1-\mu A_2)^2=0 \qquad (36)$$

то увидимъ, что прямая $\lambda A_1-\mu A_2=0$, проходя черезъ точку $A_1=0$, $A_2=0$, проходитъ и черезъ точку, въ которой прямая $A_3=0$ пересѣкаетъ кривую; слѣдовательно три прямыя:

$$\lambda A_1-\mu A_2=0 \quad , \quad \mu A_2-\nu A_3=0 \quad , \quad \nu A_3-\lambda A_1=0$$

которыя соединяютъ точки касанія съ противулежащими сторонами описаннаго треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ. Тоже разсужденіе, которое показываетъ, что $A_3=0$ есть касательная, покажетъ изъ уравненія (36), что и прямая:

$$\nu A_3-2\lambda A_1-2\mu A_2=0 \qquad (37)$$

есть также касательная. Легко видѣть, что (37) есть касательная въ точкѣ, въ которой прямая, соединяющая точку пересѣченія $A_1=0$, $A_2=0$ съ точкою касанія прямой $A_3=0$, пересѣкаетъ кривую.

Изъ этого видимъ, что точки, въ которыхъ касательныя:

$$2\lambda A_1+2\mu A_2-\nu A_3=0 \quad , \quad 2\mu A_2+2\nu A_3-\lambda A_1=0 \quad , \quad 2\nu A_3+2\lambda A_1-\mu A_2=0$$

пересѣкаютъ противуположныя стороны лежатъ на одной прямой:

$$\lambda A_1+\mu A_2+\nu A_3=0$$

Задача. Найти условія, при которыхъ коническое сѣченіе (34) будетъ кругъ?

Пересѣченіе двухъ круговъ.

§ 303. Пусть:

$$\begin{aligned} S_1 &= (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r^2_1=0 \\ S_2 &= (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r^2_2=0 \end{aligned} \tag{38}$$

будутъ уравненія двухъ круговъ; эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$\begin{aligned} S_1 &= x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0 \\ S_2 &= x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0 \end{aligned} \tag{39}$$

Уравненіе:

$$S_1-\lambda S_2=0 \tag{40}$$

будетъ уравненіе кривой, проходящей чрезъ точки пересѣченія двухъ круговъ (38). Легко видѣть изъ формы уравненія (40), что эта кривая будетъ также кругъ. Этотъ кругъ при $\lambda=1$ обращается въ прямую:

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+c_1-c_2=0 \tag{41}$$

которая есть общая хорда двухъ данныхъ круговъ.

Чтобы найти координаты точекъ пересѣченія двухъ круговъ (38), надобно только опредѣлить x и y изъ уравненій (41) и одного изъ уравненій (38) Слѣдовательно два круга пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ, совпадающихъ, или двухъ мнимыхъ точкахъ. Какія бы эти точки ни были, дѣйствительныя или мнимыя, прямая $S_1-S_2=0$ (41) всегда дѣйствительна. Когда круги пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ она называется *общею хордою*, когда же круги пересѣкаются въ двухъ мнимыхъ точкахъ, то эта прямая называется *радикальною осью* двухъ круговъ.

§ 304. Мы выше видѣли (§ 296), что если въ уравненіе круга $S_1=0$ подставимъ координаты точки внѣ окружности, то S_1 получитъ числовую величину, которая есть квадратъ разстоянія взятой точки отъ точки ка-

санія касательной, проведенной чрезъ взятую точку къ кругу $S_1=0$. Изъ этого замѣчанія и изъ урачненія радикальной оси:

$$S_1 - S_2 = 0 \quad \text{или} \quad S_1 = S_2$$

видимъ, что *радикальная ось есть геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ проведенныя касательныя къ двумъ кругамъ равны.* Это свойство имѣетъ прямая $S_1 - S_2 = 0$ будутъ-ли круги пересѣкатся въ дѣйствительныхъ или мнимыхъ точкахъ.

Если замѣтимъ, что уравненіе прямой, проходящей черезъ центры данныхъ двухъ круговъ есть (§ 39):

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_1} = \frac{y-b_1}{b_2-b_1}$$

то легко видѣть, что общая хорда перпендикулярна къ этой прямой.

Если круги пересѣкаются въ дѣйствительныхъ точкахъ, то радикальная ось есть общая хорда и легко можетъ быть построена. Если-же круги пересѣкаются въ мнимыхъ точкахъ, то радикальная ось, будучи перпендикулярна къ прямой, проходящей черезъ центры круговъ, дѣлитъ разстояніе между центрами такъ, *что разность квадратовъ этихъ разстояній равна разности квадратовъ радіусовъ.*

§ 305. Пусть:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \tag{42}$$

будутъ уравненія трехъ круговъ, радикальныя оси каждой пары будутъ:

$$S_1 - S_2 = 0 \quad , \quad S_2 - S_3 = 0 \quad , \quad S_3 - S_1 = 0 \tag{43}$$

очевидно (§ 52) эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, которая называется *радикальнымъ центромъ* двухъ круговъ (42).

Если изъ радикальнаго центра проведемъ касательныя къ тремъ кругамъ, то по свойству радикальныхъ осей, всѣ эти касательныя равны.

Если радикальный центръ возьмемъ за центръ, а касательную за радіусъ и опишемъ кругъ, то этотъ кругъ, пересѣчетъ всѣ три круга (42) подъ прямымъ угломъ.

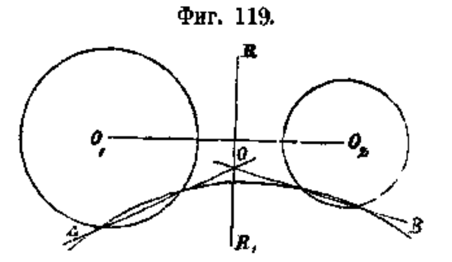
На основаніи свойствъ изложенныхъ въ настоящемъ параграфѣ легко рѣшить слѣдующую задачу:

Задача. Построить радикальную ось двухъ данныхъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть $S_1 = 0$ и $S_2 = 0$ будутъ данные круги, коихъ центры

суть O_1 и O_2 (фиг. 119). Проведемъ третій кругъ $S_3=0$ совершенно произвольный, но обусловленный только тѣмъ, чтобы онъ пересѣкался съ обоими данными кругами. Пусть его центръ будетъ O_3.

Фиг. 119.



Проведемъ общія хорды AO и BO круговъ S_1 и S_3, S_2 и S_3. Точка O пересѣченія AO и OB будетъ радикальный центръ. Перпендикуляръ $OR\perp O_1O_2$ будетъ искомая радикальная ось круговъ S_1 и S_2 (43).

§ 306. Мы выше видѣли, что два круга пересѣкаются въ двухъ только точкахъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ, между тѣмъ, какъ вообще коническія сѣченія пересѣкаются въ четырехъ точкахъ. Такое свойстко круга зависитъ отъ особенной формы его уравненія, которая ведетъ къ весьма интереснымъ заключеніямъ. Для этого отнесемъ данные два круга:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2a'x+2b'y+c'=0 \\ x^2+y^2+2a''x+2b''y+c''=0 \end{aligned} \qquad (44)$$

къ координатному треугольнику. Координаты Декарта выражаются въ трилинейныхъ слѣдующимъ образомъ (§ 182):

$$x=\frac{A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3}{C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3}=\frac{A}{C}\quad,\quad y=\frac{B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3}{C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3}=\frac{B}{C} \qquad (45)$$

подставляя эти выраженія въ уравненія (44), найдемъ:

$$\begin{aligned} A^2+B^2+2a'AC+2b'BC+c'C^2=0 \\ A^2+B^2+2a''AC+2b''BC+c''C^2=0 \end{aligned} \qquad (46)$$

вычитая получимъ уравненіе геометрическаго мѣста, кроходящаго чрезъ точки пересѣченія двухъ круговъ:

$$C\left\{2(a'-a'')A+2(b'-b'')B+(c'-c'')C\right\}=0 \qquad (47)$$

которое представляетъ пару прямыхъ:

$$2(a'-a'')A+2(b'-b'')B+(c'-c'')C=0 \quad \text{и} \quad C=0 \qquad (48)$$

Слѣдовательно уравненіе четвертой степени, изъ котораго опредѣляются координаты точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, въ насто-

ящемъ случаѣ, распадается на два квадратныя уравненія. Это происходитъ отъ того, что разрѣшающее кубическое уравненіе $\Delta(\lambda)=0$, какъ увидимъ ниже, понижается на одну степень, а пониженіе разрѣшающаго уравненія происходитъ отъ того, что одна изъ сторонъ общаго полярнаго треугольника напередъ извѣстна—это прямая, проходящая черезъ центры круговъ. Слѣдовательно одинъ изъ корней уравненія $\Delta(\lambda)=0$ извѣстенъ.

Изъ этого видимъ, что двѣ точки пересѣченія двухъ круговъ находятся на радикальной оси, а двѣ на безконечно удаленной прямой $C=0$, а слѣдовательно положеніе этихъ точекъ независитъ отъ коэфиціентовъ a', b', c'; a'', b'', c'', опредѣляющихъ круги. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее замѣчательное и интересное предложеніе:

Предложеніе. Всѣ круги на плоскости проходятъ черезъ двѣ однѣ и тѣже мнимыя точки на безконечно-удаленной прямой, слѣдовательно не могутъ пересѣчься болѣе, чѣмъ въ двухъ конечныхъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, точкахъ. Эти точки называются *мнимыми циклическими точками.*

Циклическія точки опредѣляются пересѣченіемъ прямой $C=0$ съ безконечно малымъ кругомъ:

$$A^2+B^2=0 \quad \text{или} \quad x^2+y^2=0 \tag{49}$$

Если изъ уравненій:

$$A\pm Bi=0 \quad , \quad C=0 \quad , \quad A\xi+B\eta+C=0 \tag{50}$$

исключимъ A, B, C, то найдемъ уравненіе циклическихъ точекъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi & \eta & 1 \end{vmatrix} = \eta \pm i\xi = 0 \tag{51}$$

Произведеніе циклическихъ точекъ выражается уравненіемъ:

$$\xi^2+\eta^2=0 \tag{52}$$

Изъ этого видимъ, что кругъ есть коническое сѣченіе, которое опредѣляется пятью точками, изъ коихъ двѣ, на безконечно-удаленной прямой, для всѣхъ круговъ на плоскости, однѣ и тѣ же, слѣдовательно всегда даны, поэтому кругъ опредѣляется только тремя точками.

§ 307. Приравнивая нулю члены второго порядка въ уравненіи круга:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \tag{53}$$

найдемъ уравненіе прямыхъ параллельныхъ ассимптотамъ (§ 237):

$$x^2 + y^2 = (y + ix)(y - ix) \tag{54}$$

Если начало координатъ въ центрѣ круга, то его ассимптоты будутъ:

$$y + ix = 0 \quad , \quad y - ix = 0 \tag{55}$$

Изъ этого видимъ, что направленіе ассимптотъ въ кругѣ дается уравненіемъ:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 0$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm i$$

Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Ассимптоты всѣхъ круговъ параллельны.

Изъ такого обобщенія или, лучше сказать, геометрическаго взгляда на отвлеченныя комбинаціи алгебраическихъ символовъ, вытекаютъ слѣдующія замѣчательныя предложенія:

Предложеніе 1. Направленіе ассимптотъ составляетъ со всѣми направленіями прямыхъ постоянный уголъ—безконечно большой.

Доказательство. Направленіе одной изъ ассимптотъ дается уравненіемъ $\operatorname{tg} \alpha = i$. Если черезъ φ назовемъ уголъ, который, какая-нибудь, прямая составляетъ съ осью x, то найдемъ:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - i}{1 + i \operatorname{tg}\varphi} = -i$$

результатъ независимый отъ угла φ. Точно также получимъ и для $\operatorname{tg} \alpha = -i$.

Теперь покажемъ, что если $\operatorname{tg} \alpha = i$, то:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(i) = \infty$$

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad , \quad e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i \sin\varphi$$

откуда:

$$\varphi i = \log(\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad , \quad -\varphi i = \log(\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

вычитая, найдемъ:

$$\varphi = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{\cos\varphi + i \sin\varphi}{\cos\varphi - i \sin\varphi}\right) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1 + i \operatorname{tg}\varphi}{1 - i \operatorname{tg}\varphi}\right) \tag{56}$$

Если въ этомъ выраженіи положимъ $\varphi = \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm i$, то найдемъ, что:

$$\alpha = \frac{1}{2i}\log(0) = -\infty \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{1}{2i}\log(\infty) = \infty$$

Откуда заключаемъ, что прямыя составляющія безконечно большой уголъ съ, какою-нибудь, прямою, всѣ проходятъ черезъ цикличсскія точки, т. е. эти точки суть обвертки такихъ прямыхъ. Если прямыя, составляющія безконечно большіе углы съ ассимптотическимъ направленіемъ, назовемъ *безконечно-удаленными прямыми*, то выведемъ слѣдующее заключеніе: что всѣ безконечно-удаленныя точки находятся на безконечно-удаленной прямой (§ 185), а всѣ безконечно-удаленныя прямыя проходятъ черезъ циклическія точки.

Предложеніе 2. Двѣ, какія-нибудь перпендикулярныя прямыя съ ассимптотами круга составляютъ гармоническую связку.

Доказательство. Пусть уравненія двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ будутъ:

$$y + ax = 0 \quad , \quad y - \frac{1}{a}x = 0$$

уравненія ассимптотъ суть:

$$y + ix = 0 \quad , \quad y - ix = 0 \qquad (57)$$

ангармоническое отношеніе этой связки будетъ:

$$\frac{a-i}{a+i} : \frac{-\frac{1}{a} - i}{-\frac{1}{a} + i} = \frac{a-i}{a+i} : \frac{1+ai}{1-ai} = \frac{(a-i)(1-ai)}{(a+i)(1+ai)} = -1$$

Легко показать, обратно, что если двѣ прямыя гармоничны съ прямыми (57), то онѣ перпендикулярны между собою.

Лелко видѣть, что если φ есть уголъ между ассимптотами круга:

$$y - ix = 0 \quad , \quad y + ix = 0$$

то $\operatorname{tg}\varphi = 1$.

Это послѣднее предложеніе, задачу построенія перпендикулярныхъ прямыхъ, приводитъ, какъ видимъ, къ построенію чисто проэктивному— построенію гармоническихъ точекъ.

§ 308. Мы выше видѣли, что кругъ можно разсматривать, какъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ циклическія точки, слѣдовательно всѣ свойства круга сливаются со свойствами коническихъ сѣченій, имѣ-

ющихъ двѣ общія точки, но изученіе свойствъ такихъ коническихъ сѣченій основано на проэктивности, слѣдовательно метрическая, обыкновенная геометрія, въ тѣхъ частяхъ, основаніемъ которыхъ служатъ свойства круга, является какъ приложеніе предложеній относительно положеній.

Такъ мы видѣли, что изъ опредѣленія круга исчезаетъ все *метрическое*—это есть коническое сѣченіе, проходящее чрезъ пять точекъ, изъ коихъ двѣ мнимыя, на безконечно-удаленной прямой.

Понятіе объ углѣ можемъ замѣстить ангармоническимъ отношеніемъ, которое, какъ видѣли изъ всего предъидущаго, служитъ основаніемъ всѣхъ проэктивныхъ изслѣдованій.

Если $\xi_1\eta_1$, $\xi_2\eta_2$ суть координаты двухъ прямыхъ, то имѣемъ (§ 66), если α есть уголъ между ними:

$$\cos\alpha = \frac{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2}{\sqrt{\xi^2_1 + \eta^2_1}\sqrt{\xi^2_2 + \eta^2_2}}$$

откуда:

$$\alpha = \arc\cos\left(\frac{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2}{\sqrt{\xi^2_1 + \eta^2_1}\sqrt{\xi^2_2 + \eta^2_2}}\right)$$

или:

$$\alpha = \frac{i}{2}\log\left\{\frac{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \sqrt{(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^2 - (\xi^2_1 + \eta^2_1)(\xi^2_2 + \eta^2_2)}}{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - \sqrt{(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^2 - (\xi^2_1 + \eta^2_1)(\xi^2_2 + \eta^2_2)}}\right\} \qquad (58)$$

Это выраженіе вытекаетъ изъ формулы (56).

Выраженіе подъ знакомъ log есть, очевидно, отношеніе корней уравненія:

$$(\xi^2_2 + \eta^2_2)\lambda^2 + 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)\lambda + \xi^2_1 + \eta^2_1 = 0 \qquad (59)$$

рѣшеннаго относительно λ. Но это уравненіе есть ничто иное, какъ произведеніе уравненій циклическихъ точекъ (51) или (52), въ которыя вмѣсто ξ и η вставлены координаты $\xi_1 + \lambda\xi_2$, $\eta_1 + \lambda\eta_2$. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее весьма важное предложеніе:

Предложеніе. Уголъ между двумя прямыми есть логариѳмъ ангармоническаго отношенія связки, которую данныя прямыя составляютъ съ прямыми, проходящими черезъ точку ихъ пересѣченія и черезъ циклическія точки, умноженный на $\frac{i}{2}$.

Съ помощью этого предложенія проэктивная угловая геометрія можетъ быть прослѣжена со всѣхъ сторонъ. Такъ, напримѣръ, фигуры, которыя предлагаются для изслѣдованія, разсматриваются по отношенію къ

двумъ, какимъ-нибудь, точкамъ и прямой, проходящей черезъ эти точки, затѣмъ эти точки замѣщаются циклическими, а прямая замѣщается безконечно-удаленною прямою; откуда найденныя проэктивныя предложенія обращаются въ метрическія въ ихъ обыкновенной формѣ. Какъ примѣры могутъ служить слѣдующія предложенія.

1. Кругъ вполнѣ опредѣляется тремя точками.

2. Центръ круга, какъ и вообще коническаго сѣченія, есть полюсъ безконечно-удаленной прямой, откуда слѣдуетъ, что концентрическіе круги опредѣляются свойствомъ имѣть общія ассимптоты. Слѣдовательно они касаются въ циклическихъ точкахъ, а поэтому пересѣкаться въ другихъ точкахъ больше не могутъ. Такая система круговъ представляется уравненіемъ:

$$x_1 x_2 = \lambda x_3^2 \tag{60}$$

въ которомъ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ суть ассимптоты, а $x_3 = 0$ безконечно-удаленная прямая. Чтобы перейти къ прямоугольнымъ координатамъ надобно положить:

$$x_1 = x + iy \quad , \quad x_2 = x - yi \quad , \quad x_3 = 1$$

подставляя въ уравненіе (60) найдемъ:

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

уравненіе круга въ его обыкновенной формѣ.

3. Всѣ углы, имѣющіе вершины на окружности, коихъ стороны заключаютъ равныя дуги, равны. Это предложеніе есть частный случай предложенія, что ангармоническое отношеніе связки прямыхъ, коей вершина находится на коническомъ сѣченіи, а прямыя проходятъ черезъ четыре постоянныя точки на томъ же коническомъ сѣченіи, есть величина постоянная (§ 230). Въ настоящемъ случаѣ четыре луча идутъ изъ точки на окружности къ четыремъ точкамъ на той же окружности, изъ коихъ двѣ суть циклическія.

4. Сопряженные діаметры въ кругѣ перпендикулярны. Діаметры съ ассимптотами образуютъ гармоническую связку (§ 235), а мы видѣли, что такія прямыя перпендикулярны между собою. Изъ этого предложенія вытекаетъ, какъ слѣдствіе, слѣдующее парадоксальное предложеніе:

Предложеніе. Каждая изъ ассимптотъ въ кругѣ сама себѣ перпендикулярна. Это слѣдуетъ изъ того (§ 235), что ассимптота въ коническомъ сѣченіи есть сама себѣ сопряженный діаметръ. Это слѣдуетъ еще и изъ того, что если:

$$\operatorname{tg} \alpha = i$$

то

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\alpha = -1$$

т. е. условіе перпендикулярности самой себѣ.

§ 309. Преобразовавъ понятіе объ углѣ въ проэктивное понятіе ангармоническаго отношенія, легко преобразовать и понятіе объ отрѣзкѣ и, такимъ образомъ, всѣ метрическія предложенія преобразуются въ проэктивныя.

Пусть a, b, c, d, будутъ четыре точки на прямой. Нхъ ангармоническое отношеніе есть:

$$\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd}$$

если въ этомъ выраженіи положимъ:

$$cb = 1$$

а точку d на безконечности, то оно сдѣлается:

$$\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} = \frac{ab}{1} : \frac{a\infty}{c\infty} = ab$$

откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Разстояніе точекъ a и b или отрѣзокъ ab (взятый въ извѣстномъ направленіи) равенъ ангармоническому отношенію этихъ двухъ точекъ съ точками, изъ коихъ одна находится на разстояніи отъ b равномъ единицѣ, а другая на безконечности.

Такимъ образомъ видимъ, что мѣровыя понятія преобразуются въ проэктивныя, а слѣдовательно предложенія относительно мѣры могутъ быть преобразованы въ проэктивныя и обратно. На дальнѣйшемъ развитіи этого обобщенія мы не остановимся, а займемся нѣкоторыми замѣчательными свойствами системы круговъ.

ГЛАВА XVIII.

Свойства системы круговъ, проходящихъ чрезъ точки пересѣченія двухъ данныхъ круговъ.

§ 310. Если:

$$\begin{aligned} S_1 &= (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r^2_1 = 0 \\ S_2 &= (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r^2_2 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

суть уравненія двухъ круговъ, то выше видѣли, что:

$$S_1 - \lambda S_2 = 0 \tag{2}$$

есть уравненіе цѣлой системы круговъ, проходящихъ черезъ точки пересѣченія круговъ (1), дѣйствительныя или мнимыя. Если радіусъ одного изъ круговъ системы (2) означимъ черезъ r, а координаты его центра черезъ a и b, то легко найдемъ изъ (2), что:

$$a = \frac{a_1 - \lambda a_2}{1 - \lambda} \quad , \quad b = \frac{b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda} \quad , \quad r^2 = \frac{r_2^2\lambda^2 + (d^2 - r_1^2 - r_2^2)\lambda + r_1^2}{(1-\lambda)^2} \tag{3}$$

гдѣ d есть разстояніе между центрами круговъ (1).

Изъ этихъ выраженій видимъ, что центры всей системы круговъ (2) находятся на прямой, проходящей черезъ центры круговъ (1).

§ 311. Вся система круговъ (2) имѣетъ общую радикальную ось или общую хорду, смотря потому пересѣкаются-ли круги (1) въ мнимыхъ или дѣйствительныхъ точкахъ. Между кругами системы (2) есть два круга, коихъ радіусы равны нулю; положеніе этихъ круговъ найдемъ, если въ третьемъ изъ выраженій (3) положимъ $r = 0$. Это условіе даетъ квадратное уравненіе относительно λ:

$$r_2^2\lambda^2 + (d^2 - r_1^2 - r_2^2)\lambda + r_1^2 = 0 \tag{4}$$

λ_1 и λ_2 корни этого уравненія даютъ положенія ихъ центровъ, которые, въ этомъ случаѣ, суть сами круги. Эти круги или точки называются *предѣльными* точками системы круговъ (2).

Предѣльныя точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря потому будутъ-ли корни уравненія (4) дѣйствительные или мнимые. Если выраженіе:

$$(d^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2 \tag{5}$$

будетъ положительное, то корни уравненія (4) будутъ дѣйствительные, въ противномъ случаѣ корни будутъ мнимые. Это выраженіе разлагается на слѣдующее произведеніе:

$$-(d + r_1 + r_2)(-d + r_1 + r_2)(d - r_1 + r_2)(d + r_1 - r_2) \tag{6}$$

изъ котораго видимъ, что выраженіе (5) будетъ отрицательнымъ подъ условіемъ:

$$d > r_1 + r_2 \quad \text{или} \quad d < r_2 - r_1$$

если $r_2 > r_1$.

Слѣдовательно система круговъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки, будетъ имѣть предѣльныя точки мнимыя, если точки пересѣченія круговъ будутъ дѣйствительныя; напротивъ, эти точки будутъ дѣйствительныя, если круги пересѣкаются въ мнимыхъ точкахъ.

§ 312. Такъ какъ уравненіе (3) второй степени относительно λ, то изъ этого заключаемъ, что всегда, въ системѣ круговъ (2), есть два круга съ даннымъ радіусомъ.

Легко построить систему круговъ (2) если два данные круга (1) пересѣкаются въ дѣйствительныхъ точкахъ, но если они пересѣкаются въ мнимыхъ точкахъ, то построеніе системы круговъ дѣлается на основаніи слѣдующаго свойства системы (2).

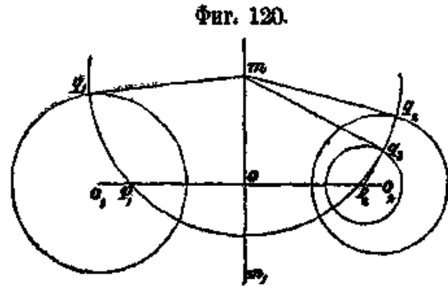
Мы видѣли, что касательныя, проведенныя изъ, какой-нибудь, точки m радикальной оси двухъ данныхъ круговъ (1) равны, но такъ какъ система круговъ (2) имѣетъ общую радикальную ось, то касательныя, проведенныя изъ точки m къ какимъ-нибудь двумъ кругамъ системы, равны.

Слѣдовательно, если изъ, какой-нибудь, точки m радикальной оси системы круговъ (2) проведемъ касательныя ко всѣмъ кругамъ системы, то эти касательныя равны.

Откуда заключаемъ, что геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ точки m радикальной оси, есть кругъ, пересѣкающій всѣ круги системы (2) подъ прямымъ угломъ и коего центръ есть точка m. Этотъ кругъ, пересѣкая всѣ круги системы, очевидно проходитъ и черезъ предѣльныя точки системы. Если теперь будемъ перемѣщать точку m по радикальной оси, то получимъ вторую систему круговъ пересѣкающихъ круги данной системы подъ прямымъ угломъ.

Всѣ круги этой послѣдней системы, проходятъ черезъ предѣльныя точки, слѣдовательно прямая, проходящая черезъ предѣльныя точки, есть общая хорда второй системы, которая имѣетъ свойства подобныя первой системѣ. Изъ сопоставленія этихъ свойствъ вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Фиг. 120.



Предложеніе. Если система круговъ проходитъ черезъ двѣ однѣ и тѣ же точки, то она даетъ другую систему круговъ, которая пересѣкаетъ первую систему подъ прямымъ угломъ и проходитъ также черезъ двѣ точки (фиг. 120). Предѣльныя точки одной системы суть точки пересѣченія другой. Если предѣльныя точки одной системы суть дѣйствительныя, то предѣльныя точки другой будутъ мнимыя.

Задача. На основаніи выше изложенныхъ свойствъ построить, какой-нибудь, кругъ изъ системы, если даны два круга?

§ 313. Изъ того свойства, что круги, имѣющіе центры на радикальной оси системы (2) и пересѣкающіе эту систему подъ прямымъ угломъ, преходятъ черезъ предѣльныя точки, слѣдуетъ, что предѣльныя точки находятся по обѣ стороны радикальной оси въ равныхъ отъ нея разстояніяхъ.

Если за основныя круги системы (2) возьмемъ вмѣсто круговъ (1) предѣльныя точки системы, то мы должны въ уравненіи (3) положить $r_1=0$ и $r_2=0$, которое въ силу этого сдѣлается:

$$r^2=\frac{d^2{}_1\lambda}{(1-\lambda)^2} \tag{7}$$

гдѣ d_1 есть разстояніе между предѣльными точками.

Если во вторую часть уравненія (7) вмѣсто λ вставимъ $\frac{1}{\lambda}$, то она неизмѣняется, откуда заключаемъ, что центры круговъ системы съ равными радіусами находятся по обѣ стороны радикальной оси въ равныхъ отъ нея разстояніяхъ.

§ 314. Въ § 296 (16) нашли, что поляры двухъ круговъ (1) относительно точки (x_1y_1) суть:

$$\begin{gathered}P_1=(x_1-a_1)(x-a_1)+(y_1-b_1)(y-b_1)-r^2{}_1=0\\ P_2=(x_1-a_2)(x-a_2)+(y_1-b_2)(y-b_2)-r^2{}_2=0\end{gathered} \tag{8}$$

а потому легко видѣть, что поляра системы круговъ (2) есть:

$$P_1-\lambda P_2=0 \tag{9}$$

Откуда заключаемъ, что всѣ поляры точки (x_1y_1) круговъ системы (2) проходятъ черезъ точку пересѣченія поляръ:

$$P_1=0 \quad \text{и} \quad P_2=0$$

Эта послѣдняя точка есть гармоническій полюсъ (§ 208) данной точки (x_1y_1) относительно каждаго круга системы (2).

§ 315. Поляры, какой-нибудь, точки на прямой, соединяющей центры круговъ (1), напримѣръ, точки:

$$x=\frac{a_1-\lambda a_2}{1-\lambda} \quad , \quad y=\frac{b_1-\lambda b_2}{1-\lambda}$$

очевидно, будутъ:

$$P_1 = (a_1 - a_2)(x - a_1) + (b_1 - b_2)(y - b_1) - \frac{r^2_1(1-\lambda)}{\lambda} = 0$$
$$P_2 = (a_2 - a_1)(x - a_2) + (b_2 - b_1)(y - b_2) - \frac{r^2_2(1-\lambda)}{\lambda} = 0 \quad (10)$$

Эти прямыя перпендикулярны къ прямой, проходящей черезъ центры круговъ (1).

Если желаемъ имѣть поляры одной изъ предѣльныхъ точекъ, то мы должны въ предъидущія уравненія вмѣсто λ вставить корни λ_1 и λ_2 уравненія (4) и будемъ имѣть поляры одной изъ предѣльныхъ точекъ, напримѣръ:

$$(a_1 - a_2)(x - a_1) + (b_1 - b_2)(y - b_1) - \frac{r^2_1(1-\lambda_1)}{\lambda_1} = 0$$
$$(a_2 - a_1)(x - a_2) + (b_2 - b_1)(y - b_2) - \frac{r^2_2(1-\lambda_1)}{\lambda_1} = 0 \quad (11)$$

Если въ эти уравненія вмѣсто x и y вставимъ координаты другой предѣльной точки:

$$x = \frac{a_1 - \lambda_2 a_2}{1-\lambda_2} \quad , \quad y = \frac{b_1 - \lambda_2 b_2}{1-\lambda_2}$$

то замѣтивъ, что:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{r^2_1}{r^2_2} \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{(d^2_1 - r^2_1 - r^2_2)}{r^2_2}$$

найдемъ, что эти уравненія удовлетворяются этими координатами, откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если одну изъ предѣльныхъ точекъ возьмемъ за полюсъ, то прямая, проходящая черезъ другую предѣльную точку, перпендикулярно къ прямой, проходящей черезъ центры круговъ (1), будетъ поляра относительно всей системы круговъ (2). Слѣдовательно предѣльныя точки суть гармоническіе полюсы относительно системы круговъ.

§ 316. Уравненію поляры:

$$P_1 = (x_1 - a_1)(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) - r^2_1 = 0$$

точки $(x_1 y_1)$ относительно круга:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r^2_1 = 0$$

можно дать еще другую форму.

Для этого возьмемъ тождества:

$$\begin{aligned}(x-a_1)^2-2(x-a_1)(x_1-a_1)+(x_1-a_1)^2-(x-x_1)^2\equiv 0\\ (y-b_1)^2-2(y-b_1)(y_1-b_1)+(y_1-b_1)^2-(y-y_1)^2\equiv 0\end{aligned}\qquad(12)$$

Если придадимъ эти тождества къ $2P_1$, то найдемъ:

$$2P_1=\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2\}+\{(x_1-a_1)^2+(y_1-b_1)^2-r_1^2\}-$$
$$-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2$$

первый членъ этого выраженія есть S_1, второй членъ есть тоже S_1, но въ которое вмѣсто x, y вставлены координаты полюса x_1, y_1, если числовое значеніе этого выраженія означимъ черезъ S'_1, то предъидущее выраженіе $2P_1$ будетъ:

$$2P_1=S_1+S'_1-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2=0\qquad(13)$$

это и есть искомая форма поляры.

§ 317. Уравненія:

$$\begin{aligned}S_1+S'_1-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2=0\\ S_2+S'_2-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2=0\end{aligned}\qquad(14)$$

суть поляры точки (x_1y_1) относительно круговъ (1). Если вычтемъ эти уравненія, то найдемъ:

$$S_1-S_2=-(S'_1-S'_2)\qquad(15)$$

Уравненія (14) совокупно выражаютъ условіе, что точки (x, y) и (x_1, y_1) суть гармоническіе полюсы круговъ $S_1=0$ и $S_2=0$ и вмѣстѣ всей системы круговъ (2).

Каждая изъ частей уравненія (15) есть уравненіе радикальной оси круговъ (1), въ которое подставлены координаты гармоническихъ полюсовъ (xy) и (x_1y_1). Если это уравненіе (15) умножимъ на множитель, который бы давалъ нормальную форму обѣимъ частямъ уравненія (15), то ихъ числовыя величины будутъ перпендикуляры, опущенные изъ точекъ (xy) и (x_1y_1) на радикальную ось. Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Два гармоническіе полюса системы круговъ (2) находятся въ равномъ разстояніи отъ радикальной оси по обѣ ея стороны, или радикальная ось дѣлитъ пополамъ разстояніе между гармоническими полюсами системы круговъ.

Уравненіе круга въ линейныхъ координатахъ.

§ 318. Если a и b суть координаты точки, то ея уравненіе будетъ (§ 73):

$$A = a\xi + b\eta + 1 = 0 \tag{16}$$

Разстояніе прямой, данной координатами $\xi_1\eta_1$ отъ точки (16), если его назовемъ черезъ r, будетъ:

$$\frac{a\xi_1 + b\eta_1 + 1}{\sqrt{\xi^2_1 + \eta^2_1}} = r \tag{17}$$

Если r будетъ величина постоянная, а ξ и η будутъ перемѣнныя, удовлетворяющія уравненію (17), то прямая, данная координатами ξ, η будетъ, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, находится въ равномъ разстояніи отъ точки (16), слѣдовательно будетъ касаться круга, коего центръ есть (a, b), а радіусъ r.

Слѣдовательно уравненіе (17) представляетъ кругъ въ линейныхъ координатахъ. Этому уравненію можно дать форму:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2) = (a\xi + b\eta + 1)^2 \tag{18}$$

или:

$$S = r^2(\xi^2 + \eta^2) - (a\xi + b\eta + 1)^2 = 0 \tag{19}$$

или

$$S = r^2(\xi^2 + \eta^2) - A^2 = 0$$

§ 319. Легко найти условія, которымъ должны удовлетворять коэфиціенты уравненія второй степени въ линейныхъ координатахъ, чтобы оно представляло кругъ. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{13}\xi + 2A_{23}\eta + A_{33} = 0 \tag{20}$$

Если развернемъ уравненіе (19) и приравняемъ его коэфиціенты коэфиціентамъ уравненія (20), умноживъ предварительно уравненіе (19) на неопредѣленный коэфиціентъ λ, то найдемъ:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(a^2 - r^2) = A_{11} \quad , \quad \lambda ab = A_{12} \quad , \quad \lambda(b^2 - r^2) = A_{22} \\ \lambda a = A_{13} \quad , \quad \lambda b = A_{23} \quad , \quad \lambda = A_{33}\end{array}\right\} \tag{21}$$

исключая изъ этихъ уравненій λ, a, b, r, найдемъ слѣдующія условія для того, чтобы уравненіе (20) представляло кругъ:

$$A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33} = 0 \quad , \quad A^2_{13} - A_{11}A_{33} = A^2_{23} - A_{22}A_{33} \tag{22}$$

Координаты центра и радіусъ круга, опредѣляются слѣдующими выраженіями:

$$a=\frac{A_{13}}{A_{33}}\quad,\quad b=\frac{A_{23}}{A_{33}}\quad,\quad r^2=\frac{A^2_{13}-A_{11}A_{33}}{A^2_{33}}=\frac{A^2_{23}-A_{22}A_{33}}{A^2_{33}}\tag{23}$$

§ 320. Уравненіе полюса данной координатами $(\xi_1\eta_1)$ поляры, очевидно, будетъ:

$$r^2(\xi_1\xi+\eta_1\eta+1)=(a\xi_1+b\eta_1+1)(a\xi+b\eta+1)\tag{24}$$

Если прямая $(\xi_1\eta_1)$ касается круга, то уравненіе (24) будетъ представлять точку касанія (§ 223).

§ 321. *Задача.* Найти общія касательныя двухъ данныхъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть данные два круга будутъ:

$$S_1=(\xi^2+\eta^2)-\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+1}{r_1}\right)^2=0$$
$$S_2=(\xi^2+\eta^2)-\left(\frac{a_2\xi+b_2\eta+1}{r_2}\right)^2=0\tag{25}$$

или:

$$\xi^2+\eta^2-\frac{A^2_1}{r^2_1}=0\quad,\quad \xi^2+\eta^2-\frac{A^2_2}{r^2_2}=0\tag{26}$$

Уравненіе:

$$S_1-\lambda S_2=0$$

будетъ коническое сѣченіе, которое имѣетъ общія касательныя съ кругами (26). Между этимъ рядомъ коническихъ сѣченій есть пара точекъ, черезъ которыя, очевидно должны проходить общія касательныя къ даннымъ кругамъ. Пара точекъ получится, когда $\lambda=1$, именно:

$$\frac{A^2_1}{r^2_1}-\frac{A^2_2}{r^2_2}=0$$

или:

$$\frac{A_1}{r_1}+\frac{A_2}{r_2}=0\quad,\quad \frac{A_1}{r_1}-\frac{A_2}{r_2}=0\tag{27}$$

Если эти уравненія напишемъ въ формѣ:

$$\frac{a_1r_2+a_2r_1}{r_2+r_1}\xi+\frac{b_1r_2+b_2r_1}{r_2+r_1}\eta+1=0$$
$$\frac{a_1r_2-a_2r_1}{r_2-r_1}\xi+\frac{b_1r_2-b_2r_1}{r_2-r_1}\eta+1=0\tag{28}$$

то изъ нихъ видимъ, что координаты этихъ точекъ суть:

$$x = \frac{a_1 r_2 + a_2 r_1}{r_2 + r_1} \quad , \quad y = \frac{b_1 r_2 + b_2 r_1}{r_2 + r_1} \tag{29}$$

$$x = \frac{a_1 r_2 - a_2 r_1}{r_2 - r_1} \quad , \quad y = \frac{b_1 r_2 - b_2 r_1}{r_2 - r_1} \tag{30}$$

Эти точки называются *центрами подобія* двухъ круговъ.

Изъ формы ихъ координатъ видно, что онѣ дѣлятъ гармонически разстояніе между центрами круговъ. Отношеніе, въ которомъ онѣ дѣлятъ это разстояніе внутренне или внѣшне, очевидно, есть $\frac{r_2}{r_1}$. Одинъ изъ этихъ центровъ называется *внѣшнимъ*, а другой *внутреннимъ*.

Такъ какъ изъ каждой точки можно провести двѣ касательныя къ кругу (§ 295), то изъ предъидущаго слѣдуетъ, что къ двумъ кругамъ можно провести четыре касательныя, по парѣ черезъ каждый изъ центровъ подобія.

Задача. Найти уравненія общихъ касательныхъ къ двумъ даннымъ кругамъ?

Рѣшеніе. Пусть урамненія данныхъ круговъ будутъ:

$$S_1 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r^2_1 = 0 \quad , \quad S_2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r^2_2 = 0 \tag{31}$$

Уравненіе касательныхъ, проведенныхъ изъ точки $(x_1 y_1)$ внѣ окружности къ кругу $S_1 = 0$, есть (§ 295):

$$\{(x_1 - a_1)(x - a_1) + (y_1 - b_1)(y - b_1) - r^2_1\}^2 =$$

$$= \{x_1 - a_1)^2 + (y_1 - b_1)^2 - r^2_1\}\{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r^2_1\}$$

Если желаемъ имѣть уравненіе внѣшнихъ касательныхъ, то надобно въ предъидущее уравненіе подставить вмѣсто x_1 и y_1 координаты внѣшняго центра подобія (30), что послѣ нѣкоторыхъ преобразованій даетъ:

$$\{S_2 - S_1 - [d^2 - (r_2 - r_1)^2]\}^2 - 4S_1\{d^2 - (r_2 - r_1)^2\} = 0$$

гдѣ d есть разстояніе между центрами.

Чтобы получить уравненіе внутреннихъ касательныхъ надобно въ предъидущемъ уравненіи измѣнить r_1 на $-r_1$.

Задача. Найти уравненія поляръ центровъ подобія двухъ круговъ, относительно обоихъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ круговъ будутъ (31). Поляра точки $(x_1 y_1)$ относительно круга $S_1=0$ будетъ:

$$(x_1-a_1)(x-a_1)+(y_1-b_1)(y-b_1)-r^2_1=0$$

Если положимъ:

$$x_1=\frac{a_1r_2-a_2r_1}{r_2-r_1} \quad , \quad y_1=\frac{b_1r_2-b_2r_1}{r_2-r_1}$$

то будемъ имѣть поляру внѣшняго центра подобія, относительно круга S_1. Это подстановленіе даетъ:

$$(a_1-a_2)(x-a_1)+(b_1-b_2)(y-b_1)-r_1(r_2-r_1)=0$$

откуда, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, найдемъ:

$$S_2-S_1-\{d^2-(r_2-r_1)^2\}=0 \tag{32}$$

Поляра той-же точки относительно круга $S_2=0$, будетъ:

$$S_2-S_1+\{d^2-(r_2-r_1)^2\}=0 \tag{33}$$

Легко видѣть, что уравненія поляръ, относительно внутренняго центра подобія, будутъ:

$$\left.\begin{aligned} S_2-S_1-\{d^2-(r_1+r_2)^2\}=0 \\ S_2-S_1+\{d^2-(r_1+r_2)^2\}=0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Свойства системы трехъ круговъ.

§ 322. Если означимъ выраженіе:

$$a_i\xi+b_i\eta+1=A_i$$

то уравненіе, какого-нибудь, круга, коего центръ данъ уравненіемъ $A_i=0$, будетъ имѣть форму:

$$r_i(\xi^2+\eta^2)=A^2_i$$

Пусть:

$$S_1=r^2_1(\xi^2+\eta^2)-A^2_1=0 \;,\; S_2=r^2_2(\xi^2+\eta^2)-A^2_2=0 \;,\; S_3=r^2_3(\xi^2+\eta^2)-A^2_3=0$$

будутъ уравненія трехъ круговъ, то:

$$S_1-S_2=0 \quad , \quad S_2-S_3=0 \quad , \quad S_3-S_1=0$$

или:

$$\frac{A^2_1}{r^2_1}-\frac{A^2_2}{r^2_2}=0 \quad , \quad \frac{A^2_2}{r^2_2}-\frac{A^2_3}{r^2_3}=0 \quad , \quad \frac{A^2_3}{r^2_3}-\frac{A^2_1}{r^2_1}=0$$

откуда:

$$\frac{A_1}{r_1}-\frac{A_2}{r_2}=0 \quad , \quad \frac{A_2}{r_2}-\frac{A_3}{r_3}=0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3}-\frac{A_1}{r_1}=0 \qquad (35)$$

суть уравненія внѣшнихъ центровъ подобія P, M и N (фиг. 121), каждой пары изъ данныхъ трехъ круговъ, а:

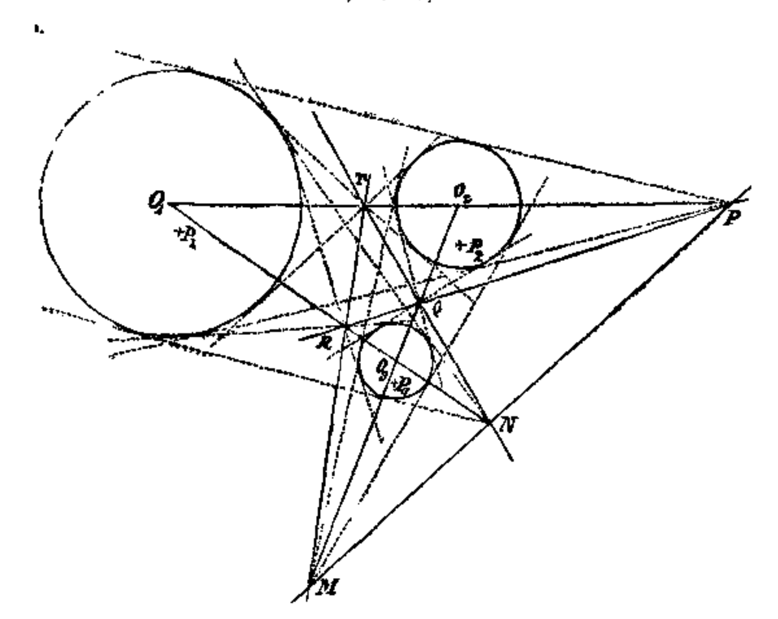
$$\frac{A_1}{r_1}+\frac{A_2}{r_2}=0 \quad , \quad \frac{A_2}{r_2}+\frac{A_3}{r_3}=0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3}+\frac{A_1}{r_1}=0 \qquad (36)$$

уравненія внутреннихъ центровъ подобія T, Q и R.

Изъ уравненій (35) видимъ, что три внѣшніе центра подобія лежатъ на одной прямой линіи, а изъ двухъ уравненій (36) съ однимъ изъ (35) видно, что два внутренніе и одинъ изъ внѣшнихъ центровъ подобія лежатъ на одной прямой линіи; такъ напримѣръ, центры подобія:

$$\frac{A_1}{r_1}+\frac{A_2}{r_2}=0 \quad , \quad \frac{A_2}{r_2}+\frac{A_3}{r_3}=0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3}-\frac{A_1}{r_1}=0 \qquad (37)$$

Фиг. 121.



лежатъ на одной прямой. Эти прямыя называются *осями подобія* данныхъ круговъ, изъ коихъ одна MP внѣшняя ось, и три внутреннія NT, RP и MT.

§ 323. *Задача.* Найти уравненіе внѣшней оси подобія?

Рѣшеніе. Координаты двухъ внѣшнихъ центровъ подобія P и N (фиг. 121) суть (§ 321):

$$x_1 = \frac{a_2 r_1 - a_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad , \quad y_1 = \frac{b_2 r_1 - b_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

$$x_2 = \frac{a_3 r_1 - a_1 r_3}{r_1 - r_3} \quad , \quad y_2 = \frac{b_3 r_1 - b_1 r_3}{r_1 - r_3} \tag{38}$$

Составляя уравненіе прямой проходящей черезъ эти двѣ точки, найдемъ искомое уравненіе, которому можно дать форму:

$$\left\{r_1(b_3-b_2)+r_2(b_1-b_3)+r_3(b_2-b_1)\right\}x-\left\{r_1(a_3-a_2)+r_2(a_1-a_3)+r_3(a_2-a_1)\right\}y+$$

$$+r_1(a_2b_3-a_3b_2)+r_2(a_3b_1-a_1b_2)+r_3(a_1b_2-a_2b_1)=0 \tag{39}$$

Точно также найдемъ уравненія и другихъ осей подобія.

§ 324. *Задача.* Найти полюсъ внѣшней оси подобія?

Рѣшеніе. Мы выше (§ 321) нашли уравненіе:

$$S_2 - S_1 - \left\{d^2 - (r_2 - r_1)^2\right\} = 0 \tag{40}$$

поляры внѣшняго центра подобія круговъ S_1 и S_2 относительно перваго круга.

Поляра центра подобія круговъ S_1 и S_3, будетъ, очевидно:

$$S_3 - S_1 - \left\{d_1^2 - (r_3 - r_1)^2\right\} = 0 \tag{41}$$

гдѣ d_1 есть разстояніе центровъ круговъ S_3 и S_1. Очевидно искомый центръ подобія долженъ находится на обѣихъ прямыхъ (40) и (41), слѣдовательно надобно только изъ этихъ уравненій опредѣлить x и y.

§ 325. Закончимъ изслѣдованія о кругѣ, задачей, которая была уже извѣстна древнимъ, рѣшена Апполоніемъ Пергскимъ, занимала арабовъ, а также многихъ европейскихъ геометровъ, Віета, Романуса, Декарта и др.

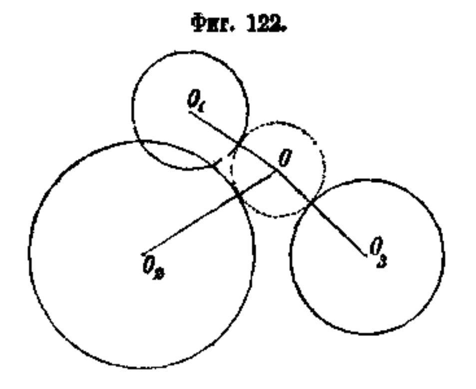
Задача. Построить кругъ, который-бы касался трехъ данныхъ круговъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ круговъ будутъ:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \tag{42}$$

Означимъ ихъ центры (фиг. 122) черезъ O_1, O_2, O_3. Пусть центръ искомаго круга будетъ O, его координаты (x, y), а радіусъ r.

Фиг. 122.



Если искомый кругъ касается внѣшне данныхъ круговъ, то должны имѣть:

$$\overline{OO}_1^2 = (r + r_1)^2$$

$$\overline{OO}_2^2 = (r + r_2)^2$$

$$\overline{OO}_3^2 = (r + r_3)^2 \qquad (43)$$

Эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$S_1 + r_1^2 = (r + r_1)^2 \quad , \quad S_2 + r_2^2 = (r + r_2)^2 \quad , \quad S_3 + r_3^2 = (r + r_3)^2 \quad (44)$$

Задача эта имѣетъ восемь рѣшеній, но это число можетъ быть и меньше, смотря по положенію данныхъ круговъ.

1. Если всѣ три круга будутъ одинъ внутри другого, то всѣ рѣшенія будутъ мнимыя.

2. Если каждый изъ данныхъ круговъ будетъ внѣ двухъ другихъ, то всѣ рѣшенія будутъ дѣйствительныя.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ одинъ изъ искомыхъ круговъ будетъ касаться внѣшне всѣхъ трехъ данныхъ круговъ, другой будетъ заключать внутри всѣ данные круги, три круга будутъ касатся двухъ данныхъ внѣшне и одного внутренне, три будутъ касатся двухъ внутренне и одного внѣшне.

Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ уравненія (44) сохраняютъ туже форму, если радіусамъ r_1, r_2, r_3 дадимъ приличный знакъ, такъ напримѣръ, если искомый кругъ заключаетъ внутри себя всѣ три данные круга, то надобно въ уравненіяхъ (44) измѣнить r_1, r_2, r_3 въ $-r_1, -r_2, -r_3$, т. е. эти уравненія будутъ:

$$S_1 + r_1^2 = (r - r_1)^2 \quad , \quad S_2 + r_2^2 = (r - r_2)^2 \quad , \quad S_3 + r_3^2 = (r - r_3)^2 \quad (45)$$

Остается только рѣшить эти уравненія относительно x, y и r, но такъ какъ это рѣшеніе сложно и не даетъ яснаго геометрическаго представленія, то мы предложимъ здѣсь другое независимое отъ рѣшенія уравненій (44).

Вычтемъ по-парно уравненія (44), то найдемъ:

$$S_2 - S_3 = 2r(r_2 - r_3) \ , \ S_3 - S_1 = 2r(r_3 - r_1) \ , \ S_1 - S_2 = 2r(r_1 - r_2) \ (46)$$

умножая эти уравненія на r_1, r_2, r_3 и складывая, найдемъ:

$$r_1(S_2-S_3)+r_2(S_3-S_1)+r_3(S_1-S_2)=0 \tag{47}$$

координаты центра x, y должны удовлетворять уравненія (46) и (47), такъ какъ онѣ вытекаютъ изъ уравненій (44).

Если замѣтимъ, что S_2-S_3, S_3-S_1, S_1-S_2 суть первыя части уравненій, представляющихъ радикальныя оси или общія хорды данныхъ круговъ, то легко видѣть, что (47) есть уравненіе прямой, проходящей черезъ радикальный центръ данныхъ круговъ, но такъ какъ это уравненіе не измѣняется при измѣненіи r_1, r_2, r_3 въ $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$, то изъ этого видимъ, что эта прямая содержитъ центры искомыхъ двухъ круговъ, касающихся данныхъ внутренне и внѣшне. Тангенсъ угла, который эта прямая составляетъ съ осью x, есть:

$$-\frac{r_1(a_3-a_2)+r_2(a_1-a_3)+r_3(a_2-a_1)}{r_1(b_3-b_2)+r_2(b_1-b_3)+r_3(b_2-b_1)} \tag{48}$$

а внѣшняя ось подобія составляетъ уголъ съ осью x, коего тангенсъ есть:

$$\frac{r_1(b_3-b_2)+r_2(b_1-b_3)+r_3(b_2-b_1)}{r_1(a_3-a_2)+r_2(a_1-a_3)+r_3(a_2-a_1)}$$

слѣдовательно эти двѣ прямыя перпендикулярны, откуда слѣдуетъ предложеніе:

Предложеніе. Центры восьми касательныхъ круговъ къ тремъ даннымъ находятся по парно на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ радикальнаго центра круговъ на оси подобія.

Доказательство. Возьмемъ тотъ изъ искомыхъ круговъ, который касается внѣшне всѣхъ трехъ данныхъ круговъ. Пусть x', y' будутъ координаты точки его касанія съ кругомъ S_1, эта точка дѣлитъ разстояніе OO_1, между центрами, на два отрѣзка r_1 и r, слѣдовательно:

$$x'=\frac{r_1x+ra_1}{r_1+r} \quad , \quad y'=\frac{r_1x+rb_1}{r_1+r} \tag{49}$$

откуда:

$$x=\frac{(r+r_1)x'-ra_1}{r_1} \quad , \quad y=\frac{(r+r_1)r'-rb_1}{r_1} \tag{50}$$

Эти величины должны удовлетворять уравненія (46). Замѣтимъ сначала,

что подстановленіе этихъ выраженій въ функціи формы $ax+by+c$ даетъ въ результатѣ:

$$\frac{r+r'}{r_1}(ax'+by'+c)-\frac{r}{r_1}(aa_1+bb_1+c)$$

т. е. надобно функцію $ax+by+c$ помножить на $\frac{r+r_1}{r_1}$ и подставить вмѣсто x, y координаты x', y', затѣмъ изъ этого произведенія вычесть ту же функцію, умноживъ ее на $\frac{r}{r_1}$, и подставивъ въ нее вмѣсто x, y координаты a_1, b_1. Въ силу этого подстановленія, выраженій (50) въ два послѣднія уравненія (46), будемъ имѣть:

$$\frac{r+r_1}{r_1}(S'_3-S'_1)-\frac{r}{r_1}(\overline{O_1O_3}^2+r^2_1-r^2_3)=2r(r_3-r_1)$$

$$\frac{r+r_1}{r_1}(S'_1-S'_2)-\frac{r}{r_1}(-r^2_1-\overline{O_1O_2}^2+r^2_2)=2r(r_1-r_2)$$

гдѣ S_1', S_2', S_3' суть уравненія круговъ (42), въ которыя подставлены x', y'. Изъ этихъ уравненій, упрощая и отбрасывая черточки, найдемъ:

$$\frac{S_3-S_1}{\overline{O_1O_3}^2-(r_3-r_1)^2}-\frac{r}{r+r_1}=0 \qquad (51)$$

$$\frac{S_2-S_1}{\overline{O_1O_2}^2-(r_2-r_1)^2}-\frac{r}{r+r_1}=0 \qquad (52)$$

уравненія, которыя представляютъ прямыя, проходящія черезъ точку касанія x', y'.

Сравнимъ эти уравненія съ уравненіями поляръ внѣшнихъ центровъ подобія, которыя можно написать въ формѣ:

$$\frac{S_3-S_1}{\overline{O_1O_3}^2-(r_3-r_1)^2}-1=0 \quad , \quad \frac{S_2-S_1}{\overline{O_1O_2}^2-(r_2-r_1)^2}-1=0$$

вычитая ихъ, найдемъ новое уравненіе прямой, проходящей черезъ радикальный центръ и полюсъ внѣшней оси подобія, именно:

$$\frac{S_3-S_1}{\overline{O_1O_3}^2-(r_3-r_1)^2}-\frac{S_2-S_1}{\overline{O_1O_2}^2-(r_2-r_1)^2}=0$$

Тотъ-же результатъ получится, вычитая уравненія (51) и (52). Тоже получимъ, если измѣнимъ r_1, r_2, r_3 въ $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$. Изъ этого заключаемъ, что прямая, проходящая черезъ радикальный центръ и полюсъ внѣшней оси подобія, относительно круга S_1, проходитъ и черезъ точки касанія этого круга съ кругами, которые касаются данныхъ круговъ внутренне и внѣшне.

Слѣдовательно прямыя, проходящія черезъ радикальный центръ и полюсы одной и той-же оси подобія относительно каждаго изъ данныхъ круговъ, встрѣчаютъ эти круги въ шести точкахъ, которыя суть точки касанія двухъ круговъ съ кругами (42).

Откуда вытекаетъ слѣдующее построеніе круга, который касается внѣшне всѣхъ трехъ круговъ: построить полюсы p_1, p_2, p_3, внѣшней оси подобія, относительно круговъ (42), и если R есть радикальный центръ, то прямыя Rp_1, Rp_2, Rp_3 встрѣчаютъ круги (42) въ точкахъ касанія. Изъ точки R опускаютъ перпендикуляръ на ось подобія, прямая соединяющая центръ одного изъ круговъ съ его точкою касанія, встрѣчаясь съ выше опущеннымъ перпендикуляромъ, опредѣляетъ центръ искомаго круга.

Общій полярный треугольникъ системы круговъ, проходящихъ черезъ двѣ данныя точки.

§ 326. Мы выше видѣли, что если система круговъ проходитъ черезъ двѣ мнимыя точки, то есть на прямой, проходящей черезъ центры круговъ двѣ дѣйствительныя точки, которыя мы назвали предѣльными. Эти точки, какъ мы выше показали, суть гармоническіе полюсы, а прямыя, проходящія черезъ нихъ, перпендикулярно линіи центровъ, суть гармоническія поляры. Онѣ встрѣчаются въ точкѣ на безконечно-удаленной прямой и образуютъ общій, всей системѣ круговъ, полярный треугольникъ, коего вершины суть двѣ предѣльныя точки и точка на безконечности, а стороны двѣ гармоническія поляры, проходящія черезъ предѣльныя точки, и линія центровъ системы круговъ.

ГЛАВА XIX.

Условія, при которыхъ коническое сѣченіе представляетъ пару прямыхъ и ихъ опредѣленіе.

§ 327. Въ §§ 203 и 216 видѣли, при какомъ условіи уравненіе коническаго сѣченія въ декартовыхъ координатахъ представляетъ пару прямыхъ линій, а въ линейныхъ координатахъ пару точекъ. Тамъ-же мы по-

казали, что это условіе есть $\Delta = 0$ или $\Delta' = 0$, но геометрическаго смысла не выяснили, въ настоящей главѣ мы разберемъ эти случаи подробно и выяснимъ ихъ геометрическое значеніе.

Мы знаемъ, что зависимость между координатами полюса (y_1, y_2, y_3) и координатами его поляры (ξ_1, ξ_2, ξ_3) относительно коническаго сѣченія:

$$f(x_1x_2x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \quad (1)$$

опредѣляется уравненіями:

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ \sigma\xi_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ \sigma\xi_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{32}y_3 \end{aligned} \quad (2)$$

при этомъ было обусловлено, что опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

инваріантъ формы (1), не равенъ нулю.

Мы видѣли, что при этомъ условіи, каждой произвольно взятой точкѣ соотвѣтствуетъ поляра и, обратно, каждая произвольная прямая имѣетъ полюсъ. Посмотримъ, что случится если $\Delta = 0$?

Въ этомъ случаѣ уравненія (2) продолжаютъ существовать, но онѣ не разрѣшимы относительно y, т. е. что всякой произвольно взятой точкѣ соотвѣтствуетъ опредѣленная поляра, но, обратно, этой полярѣ не соотвѣтствуетъ опредѣленный полюсъ.

Такъ какъ $\Delta = 0$, то всегда существуетъ система количествъ u_1, u_2, u_3, удовлетворяющихъ уравненія:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= 0 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 &= 0 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

слѣдовательно поляра точки (u_1, u_2, u_3) будетъ неопредѣленная въ томъ смыслѣ, что мы можемъ всякую прямую на плоскости разсматривать, какъ поляру точки u. Тогда какъ поляра всякой другой точки проходитъ че-

резъ точку u, что легко видѣть изъ уравненій (2), помножая ихъ соотвѣтственно на u_1, u_2, u_3 и складывая, найдемъ:

$$\sigma(\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3) = 0 \tag{5}$$

уравненіе, которое удовлетворяется координатами u независимо отъ y_1, y_2, y_3, т. е. для всѣхъ точекъ плоскости. Множитель σ, который входитъ въ уравненіе (5) можетъ быть тогда только равенъ нулю, когда всѣ $a_{i,k} = 0$, случай, который мы исключаемъ.

Слѣдовательно можемъ принимать за поляры точекъ только тѣ прямыя, которыя проходятъ черезъ точку u, если не хотимъ принимать всѣ прямыя за поляры точки u. Но каждой изъ этихъ прямыхъ ξ принадлежитъ безконечное число точекъ, какъ полюсы, такъ какъ, если точка y удовлетворяетъ уравненіямъ (2), то имъ удовлетворяютъ, вслѣдствіи уравненій (4), и всѣ точки:

$$u + \lambda y$$

прямой, соединяющей точки u и y.

§ 328. Посмотримъ теперь, какую форму имѣетъ коническое сѣченіе (1), при условіи:

$$\Delta = 0$$

Чтобы видѣть форму кривой разсмотримъ прямую линію, соединяющую точку u (4) съ какою-нибудь точкою x кривой. Подставимъ въ уравненіе (1) кривой вмѣсто x, $u + \lambda x$, то найдемъ уравненіе (§ 207):

$$P + 2Q\lambda + R\lambda^2 = 0 \tag{6}$$

въ которомъ всѣ коэфиціенты равны нулю, такъ какъ въ силу уравненій (4):

$$f(u_1, u_2, u_3) = 0 = P$$

и:

$$R = f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

такъ какъ точка x находится на кривой; а также изъ уравненій (4) и (§ 207):

$$Q = (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_2)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0$$

слѣдовательно прямая:

$$u + \lambda x$$

вся находится на кривой, которая въ этомъ случаѣ, будетъ состоять изъ двухъ прямыхъ, пересѣкающихся въ точкѣ u; а изъ двухъ прямыхъ потому, что уравненіе (1) второй степени.

§ 329. Координаты точки (u_1, u_2, u_3) опредѣляются двумя изъ трехъ уравненій (4), слѣдовательно уравненіе этой точки можно написать въ слѣдующихъ трехъ формахъ (§ 186):

$$\begin{aligned} A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 &= 0 \\ A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_2 &= 0 \\ A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

изъ коихъ каждое имѣетъ смыслъ уравненія (5):

$$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0$$

слѣдовательно можемъ положить:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \mu u^2_1 \quad , \quad A_{12} = \mu u_1 u_2 \\ A_{22} &= \mu u^2_2 \quad , \quad A_{13} = \mu u_1 u_3 \\ A_{33} &= \mu u^2_3 \quad , \quad A_{23} = \mu u_2 u_3 \end{aligned} \tag{8}$$

Откуда видимъ, что миноры опредѣлителя Δ, когда $\Delta = 0$, пропорціональны квадратамъ и произведеніямъ величинъ, которыя суть координаты двойной точки (u_1, u_2, u_3) коническаго сѣченія.

Эту двойную точку, т. е ея уравненіе, получимъ если выразимъ въ линейныхъ координатахъ коническое сѣченіе. Это уравненіе есть:

$$A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_2 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \tag{9}$$

Мы видѣли выше (§ 214, 71), что (9) есть условіе, которому должны удовлетворять координаты прямой, чтобы она встрѣчала кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ. Этотъ послѣдній случай можетъ только тогда случится, если двѣ прямыя, представляющія коническое сѣченіе, совмѣщаются, или если прямая проходитъ черезъ ихъ точку пересѣченія; и въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (9) преобразуется въ уравненіе:

$$(u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3)^2 = 0 \tag{10}$$

если въ него подставимъ вмѣсто A_{11}, A_{12}, ... ихъ выраженія (8). Уравненіе (10) представляетъ, очевидно, двойную точку, коей координаты суть (u_1, u_2, u_3).

§ 330. Пусть прямыя, на которыя распадается коническое сѣченіе:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

будуть:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad , \quad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0 \tag{11}$$

Слѣдовательно:

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) \tag{12}$$

перемножая и сравнивая коэфиціенты, найдемъ:

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 &= a_{11} \quad , \quad \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 2a_{12} \\ \alpha_2\beta_2 &= a_{22} \quad , \quad \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 = 2a_{13} \\ \alpha_3\beta_3 &= a_{33} \quad , \quad \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 = 2a_{23} \end{aligned} \tag{13}$$

Изъ этихъ уравненій, раздѣляя второе, третье и четвертое на первое, найдемъ:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{a_{22}}{a_{11}} \quad , \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2a_{12}}{a_{11}} \tag{14}$$

и

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{a_{33}}{a_{11}} \quad , \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{2a_{13}}{a_{11}} \tag{15}$$

изъ этихъ послѣднихъ уравненій можемъ составить два квадратныя уравненія, коихъ корни суть отношенія:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad , \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad , \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \quad , \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} \tag{16}$$

Означая эти отношенія черезъ λ_1, λ_2; μ_1, μ_2, уравненія, коихъ корни λ_1, λ_2; μ_1, μ_2, будутъ:

$$\lambda^2 - 2\frac{a_{12}}{a_{11}}\lambda + \frac{a_{22}}{a_{11}} = 0 \quad , \quad \mu^2 - 2\frac{a_{13}}{a_{11}}\mu + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0 \tag{17}$$

Изъ этихъ двухъ уравненій, найдемъ отношенія (16).

Если послѣднее изъ уравненій (13) раздѣлимъ на первое, то найдемъ:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_3}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2a_{23}}{a_{11}} \tag{18}$$

Такъ какъ уравненіями (17) отношенія (16) вполнѣ опредѣляются, то ихъ выраженія, вставленныя въ (18), должны удовлетворять этому уравненію, т. е. дать зависимость между a_{ik}, которая будетъ ничто иное какъ: $\Delta = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\lambda_1+\lambda_2=2\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad , \quad \lambda_1\lambda_2=\frac{a_{22}}{a_{11}} \quad , \quad \mu_1+\mu_2=2\frac{a_{13}}{a_{11}} \quad , \quad \mu_1\mu_2=\frac{a_{33}}{a_{11}} \tag{19}$$

изъ уравненія (18) имѣемъ:

$$\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1=\frac{2a_{23}}{a_{11}} \tag{20}$$

перемножая первое и третье изъ выраженій (19), найдемъ:

$$(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)=\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1=4\frac{a_{12}a_{13}}{a^2_{11}}$$

откуда:

$$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2=4\frac{a_{12}a_{13}}{a^2_{11}}-(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)=4\frac{a_{12}a_{13}}{a^2_{11}}-\frac{2a_{23}}{a_{11}}$$

или, наконецъ:

$$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2=2\frac{2a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}}{a^2_{11}} \tag{21}$$

Перемножая (20) и (21), найдемъ:

$$(\lambda^2_1+\lambda^2_2)\mu_1\mu_2+(\mu^2_1+\mu^2_2)\lambda_1\lambda_2=4\frac{2a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}}{a^2_{11}}\cdot\frac{a_{23}}{a_{11}}$$

откуда, замѣчая, что:

$$\lambda^2_1+\lambda^2_2=2\frac{2a^2_{12}-a_{11}a_{22}}{a^2_{11}} \quad , \quad \mu^2_1+\mu^2_2=2\frac{2a^2_{13}-a_{11}a_{33}}{a^2_{11}}$$

найдемъ, послѣ сокращеній:

$$a^2_{12}a_{33}+a^2_{13}a_{22}+a^2_{23}a_{11}-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{12}a_{13}a_{23}=0 \tag{22}$$

но это послѣднее выраженіе есть ничто иное, какъ опредѣлитель:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

Остается только опредѣлить изъ уравненій (17) λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, или отношенія:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad , \quad \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad , \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \quad , \quad \frac{\beta_3}{\beta_1}$$

Эти уравненія даютъ:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{a_{12} + \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{a_{12} - \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}}$$

$$\mu_1 = \frac{a_{13} + \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}} \quad , \quad \mu_2 = \frac{a_{13} - \sqrt{-A_{22}}}{a_{11}} \tag{23}$$

Такъ какъ изъ уравненій (19) имѣемъ:

$$\lambda_1\mu_2 \,.\, \lambda_2\mu_1 = \frac{a_{22}a_{33}}{a^2_{11}}$$

а (20) даетъ:

$$\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = \frac{2a_{23}}{a_{11}}$$

$\lambda_1\mu_2$ и $\lambda_2\mu_1$ суть корни уравненія:

$$t^2 - 2\frac{a_{23}}{a_{11}}t + \frac{a_{23}a_{33}}{a^2_{11}} = 0 \tag{24}$$

откуда:

$$\lambda_1\mu_2 = \frac{a_{33} + \sqrt{-A_{11}}}{a_{11}} \quad , \quad \lambda_2\mu_1 = \frac{a_{23} - \sqrt{-A_{11}}}{a_{11}}$$

Легко также составить уравненіе, коего корни суть: $\lambda_1\lambda_2$, $\mu_1\mu_2$. Опредѣливъ такимъ образомъ λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, уравненіе:

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3) = 0$$

можно написать въ формѣ:

$$f = \alpha_1\beta_1\,(x_1 + \lambda_1 x_2 + \mu_1 x_3)(x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_2 x_3) = 0$$

или, замѣчая, что:

$$\alpha_1\beta_1 = a_{11}$$

найдемъ:

$$f = a_{11}\,(x_1 + \lambda_1 x_2 + \mu_1 x_3)(x_1 + \lambda_2 x_2 + \mu_2 x_3) = 0$$

Пр. 1. Пусть данное уравненіе будетъ:

$$f = 6x^2_1 + 15x^2_2 + 7x^2_3 + 19x_1x_2 + 17x_1x_3 + 7x_2x_3 = 0$$

въ которомъ условіе $\Delta = 0$ удовлетворено, требуется разложить его на два линейныхъ множителя?

Въ этомъ случаѣ:

$$a_{11} = 6,\; a_{22} = 15,\; a_{33} = 7,\; a_{12} = \frac{19}{2},\; a_{13} = \frac{17}{2},\; a_{23} = \frac{7}{2}$$

Составляя уравненія (17) и рѣшая, найдемъ:

$$\lambda_1 = \frac{5}{3},\; \lambda_2 = \frac{3}{2},\; \mu_1 = \frac{7}{3},\; \mu_2 = \frac{1}{2}$$

Слѣдовательно:

$$f=(3x_1+5x_2+7x_3)(2x_1+3x_2+x_3)$$

Пр. 2. Показать, что:

$$x^2_1+4x^2_2-2x^2_3-5x_1x_2+x_1x_3+2x_2x_3=0$$

разлагается на линейные множители:

$$x_1-x_2-x_3 \quad \text{и} \quad x_1-4x_2+2x_3$$

Пр. 3. Опредѣлить въ уравненіи:

$$x^2_1+x^2_2+6x^2_3+hx_1x_2+5x_1x_3-7x_2x_3=0$$

h такъ, чтобы оно разложилось на два линейные множителя?

§ 331. Вотъ еще способъ, болѣе симметричный, для опредѣленія коэфиціентовъ α_r и β_r въ уравненіяхъ (11).

Пусть y_1, y_2, y_3 будутъ координаты точки пересѣченія прямыхъ (11):

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=0 \quad , \quad \beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3=0$$

то будемъ имѣть:

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\alpha_3y_3=0 \quad , \quad \beta_1y_1+\beta_2y_2+\beta_3y_3=0$$

откуда имѣемъ:

$$2\rho y_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2 \quad , \quad 2\rho y_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3 \quad , \quad 2\rho y_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \qquad (25)$$

Такъ какъ y должны удовлетворять уравненіямъ (4), то соображаясь съ уравненіями (13), найдемъ слѣдующія девять уравненій:

$$\begin{aligned} &\alpha_1\beta_1=a_{11} \quad , && \alpha_2\beta_1=a_{31}-\rho y_3 \quad , && \alpha_3\beta_1=a_{31}+\rho y_2 \\ &\alpha_1\beta_2=a_{12}+\rho y_3 \quad , && \alpha_2\beta_2=a_{22} \quad , && \alpha_3\beta_2=a_{32}-\rho y_1 \qquad (26) \\ &\alpha_1\beta_3=a_{13}-\rho y_2 \quad , && \alpha_2\beta_3=a_{23}+\rho y_1 \quad , && \alpha_3\beta_3=a_{33} \end{aligned}$$

откуда отношенія $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ и $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3$ будутъ непосредственно даны, если будетъ извѣстенъ коэфиціенъ ρ. Количество ρ было введено, какъ коэфиціентъ пропорціональности и въ качествѣ таковаго онъ остается совершенно произвольнымъ, но здѣсь онъ зависитъ въ силу уравненій (6) отъ коэфиціента пропорціональности μ. Въ самомъ дѣлѣ, въ силу уравненій (13) мы можемъ миноры $A_{r,s}$ выразить черезъ α и β и придемъ къ тождественнымъ выраженіямъ, которыя вытекаютъ изъ уравненій (25), для квадратовъ и произведеній y. Такъ, напримѣръ:

$$4A_{11}=-(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2=-4\rho^2y^2_1$$

а слѣдовательно, соображаясь съ (8), найдемъ $\rho^2=-\mu$, это такъ опредѣляетъ ρ, что во вторыхъ частяхъ уравненій (26) $a_{i,k}$ входитъ линейно.

Для ρ имѣемъ два значенія:

$$\rho = +\sqrt{-\mu} \quad , \quad \rho = -\sqrt{-\mu}$$

но оба эти значенія даютъ одинъ и тотъ же результатъ, что легко видѣть изъ того, что α и β только перемѣняются, если ρ замѣстимъ черезъ $+\sqrt{-\mu}$, а потомъ черезъ $-\sqrt{-\mu}$. Такимъ образомъ, получимъ для координатъ двухъ прямыхъ слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned}
\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 &= a_{11} : a_{12} + \sqrt{-A_{33}} : a_{13} - \sqrt{-A_{22}} \\
&= a_{11} - \sqrt{-A_{33}} : a_{22} : a_{23} + \sqrt{-A_{11}} \\
&= a_{31} + \sqrt{-A_{32}} : a_{32} - \sqrt{-A_{11}} : a_{33}
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 &= a_{21} : a_{21} - \sqrt{-A_{33}} : a_{31} + \sqrt{-A_{22}} \\
&= a_{12} + \sqrt{-A_{33}} : a_{22} : a_{32} - \sqrt{-A_{11}} \\
&= a_{13} - \sqrt{-A_{22}} : a_{23} + \sqrt{-A_{11}} : a_{33}
\end{aligned}$$

§ 332. Обратно, если коническое сѣченіе переходитъ въ пару прямыхъ линій, то необходимо $\Delta = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (2), въ силу уравненій (13), преобразуются въ слѣдующія:

$$\rho_1 \xi_1 = \beta_1 \Sigma \alpha_i x_i + \alpha_1 \Sigma \beta_i x_i$$

$$\rho_1 \xi_2 = \beta_2 \Sigma \alpha_i x_i + \alpha_2 \Sigma \beta_i x_i$$

$$\rho_1 \xi_3 = \beta_3 \Sigma \alpha_i x_i + \alpha_3 \Sigma \beta_i x_i$$

которыя тождественно обращаются въ нуль для $x = y$, такъ какъ уравненія:

$$\Sigma \alpha_i y_i = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma \beta_i y_i = 0$$

изъ коихъ вытекаетъ условіе $\Delta = 0$, имѣютъ мѣсто.

§ 333. Во всѣхъ предъидущихъ изслѣдованіяхъ мы предположили, что уравненія (4) опредѣляютъ дѣйствительно двойную точку, т. е. точку пересѣченія прямыхъ. Но не то бываетъ если эти три уравненія (4) представляютъ одно:

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0 \tag{28}$$

такъ, что онѣ отличаются отъ (28) только постояннымъ множителемъ m_i. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ, можемъ положить:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1\gamma_1 \quad , \quad a_{12} = m_1\gamma_2 \quad , \quad a_{13} = m_1\gamma_3 \\ a_{21} &= m_2\gamma_1 \quad , \quad a_{22} = m_2\gamma_2 \quad , \quad a_{23} = m_2\gamma_3 \\ a_{31} &= m_3\gamma_1 \quad , \quad a_{32} = m_3\gamma_2 \quad , \quad a_{33} = m_3\gamma_3 \end{aligned} \tag{29}$$

но такъ какъ $a_{i,k} = a_{k,i}$, то имѣемъ:

$$m_1 : m_2 : m_3 = \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$$

означая черезъ μ коэфиціентъ пропорціональности, найдемъ:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mu\gamma_1^2 \quad , \quad a_{23} = \mu\gamma_2\gamma_3 \\ a_{22} &= \mu\gamma_2^2 \quad , \quad a_{31} = \mu\gamma_3\gamma_1 \\ a_{33} &= \mu\gamma_3^2 \quad , \quad a_{12} = \mu\gamma_1\gamma_2 \end{aligned} \tag{30}$$

откуда уравненіе кривой или коническаго сѣченія (1) сдѣлается:

$$\Sigma a_{i,k} x_i x_k = (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)^2 \mu \tag{31}$$

Слѣдовательно коническое сѣченіе состоитъ изъ двойной прямой, которой каждая точка должна разсматриваться какъ двойная.

Уравненія (29) влекутъ за собой слѣдующія:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0 \quad , \quad A_{23} = 0 \\ A_{22} &= 0 \quad , \quad A_{31} = 0 \\ A_{33} &= 0 \quad , \quad A_{12} = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Съ другой стороны, уничтоженіе этихъ миноровъ влечетъ за собой уравненія (29), слѣдовательно: если не только инваріантъ $\Delta = 0$, но и его миноры равны нулю, то коническое сѣченіе состоитъ изъ двойной прямой. И въ самомъ дѣлѣ, взаимное уравненіе:

$$\Sigma A_{i,k} \xi_i \xi_k = 0$$

удовлетворяется координатами всякой прямой, какъ и должно быть, такъ какъ всякая прямая пересѣкаетъ, въ двухъ совпадающихъ точкахъ, прямую, которая принимается за двойную.

§ 334. Приложимъ выше-изложенный способъ къ разложенію на линейные множители уравненія (§ 208):

$$PR - Q^2 = 0 \tag{33}$$

которое представляетъ, какъ мы видѣли, двѣ касательныя, проведенныя изъ точки y къ коническому сѣченію $f=0$.

Чтобы разложить уравненіе (33) на линейные множители, поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Пусть η_i будутъ координаты поляры точки y_i, относительно коническаго сѣченія:

$$f=\Sigma a_{i,k} x_i x_k=0$$

коэфиціенты при z_i въ выраженіи Q суть:

$$\sigma\eta_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + a_{i3} y_3 \tag{34}$$

полагая $i=1, 2, 3$.

Въ уравненіяхъ (26) надобно поставить вмѣсто $a_{i,k}$ коэфиціенты при $z_i z_k$ изъ уравненія (33), т. е:

$$a_{ik} P - \sigma^2\eta_i\eta_k$$

Координаты α_i и β_i обѣихъ касательныхъ опредѣляются уравненіями:

$$\alpha_1\beta_1=a_{11}P-\sigma^2\eta^2_1 \quad , \alpha_2\beta_1=a_{21}P-\sigma^2\eta_2\eta_1-\rho y_3 \ , \alpha_3\beta_1=a_{31}P-\sigma^2\eta_3\eta_1+\rho y_2$$

$$\alpha_1\beta_2=a_{12}P-\sigma^2\eta_1\eta_2+\rho y_3 \ , \alpha_2\beta_2=a_{22}P-\sigma^2\eta^2_2 \quad , \alpha_3\beta_2=a_{32}P-\sigma^2\eta_3\eta_2-\rho y_1$$

$$\alpha_1\beta_3=a_{13}P-\sigma^2\eta_1\eta_3+\rho y_2 \ , \alpha_2\beta_3=a_{23}P-\sigma^2\eta_2\eta_3+\rho y_1 \ , \alpha_3\beta_3=a_{33}P-\sigma^2\eta^2_3$$

y_i непосредственно опредѣляется изъ этихъ уравненій, а необходимо опредѣлить ρ, чтобы имѣть отношеніе между α_i и между β_i; это количество опредѣлится изъ уравненій (8), изъ которыхъ имѣемъ:

$$A'_{i,k} = -\rho^2 y_i y_k \tag{35}$$

гдѣ $A'_{i,k}$ есть $A_{i,k}$, въ которое вмѣсто выраженія $a_{i,k}$ вставлено выраженіе $a_{i,k}P-\sigma^2\eta_i\eta_k$.

Если составимъ всѣ девять уравненій (35) и умножимъ каждое изъ нихъ на $\sigma^2\eta_i\eta_k$ и сложимъ, то, сообразуясь съ (34), найдемъ:

$$\sigma^2 \Sigma A'_{i,k}\eta_i\eta_k = -\rho^2 P^2 \tag{36}$$

Первую часть можемъ еще преобразовать, взявъ ея форму въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

замѣстивъ, для нашего случая, въ этомъ выраженіи a_{ik} выраженіемъ $a_{ik}P-\sigma^2\xi_i\xi_k$, уравненіе (36) сдѣлается:

$$-\rho^2P^2=\sigma^2\begin{vmatrix} a_{11}P-\sigma^2\xi^2_1 & , a_{12}P-\sigma^2\xi_1\xi_2 & , a_{13}P-\sigma^2\xi_1\xi_3 & , \xi_1 \\ a_{21}P-\sigma^2\xi_2\xi_1 & , a_{22}P-\sigma^2\xi^2_2 & , a_{23}P-\sigma^2\xi_2\xi_3 & , \xi_2 \\ a_{31}P-\sigma^2\xi_3\xi_1 & , a_{32}P-\sigma^2\xi_3\xi_2 & , a_{33}P-\sigma^2\xi^2_3 & , \xi_3 \\ \xi_1 & , \xi_2 & , \xi_3 & , 0 \end{vmatrix}$$

или, если послѣднюю горизонталь умножимъ на $\sigma^2\xi_1$, $\sigma^2\xi_2$, $\sigma^2\xi_3$ и сложимъ съ первою, со второю и съ третьею, то найдемъ:

$$-\rho^2P^2=\sigma^2\begin{vmatrix} a_{11}P & , a_{12}P & , a_{13}P & , \xi_1 \\ a_{21}P & , a_{22}P & , a_{23}P & , \xi_2 \\ a_{31}P & , a_{32}P & , a_{33}P & , \xi_3 \\ \xi_1 & , \xi_2 & , \xi_3 & , 0 \end{vmatrix}=\sigma^2P^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Если теперь умножимъ первыя три вертикальныя линіи на y_1, y_2, y_3 и прибавимъ ихъ къ четвертой, умноженной на $-\sigma$, то, соображаясь съ (34), имѣемъ:

$$\sigma\Sigma\xi_iy_i=\Sigma a_{ik}y_iy_k=P$$

откуда найдемъ:

$$\rho^2=\sigma\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \frac{1}{\sigma}P \end{vmatrix}=P\Delta \qquad (37)$$

Слѣдовательно мы должны въ уравненіи (35) подставить вмѣсто ρ два его значенія:

$$\rho=+\sqrt{P\Delta} \quad , \quad \rho=-\sqrt{P\Delta} \qquad (38)$$

замѣщеніе одного значенія другимъ измѣняетъ только α на β. Знакъ ρ^2 даетъ признакъ положенія точки y_i относительно коническаго сѣченія. Когда имѣемъ дѣйствительное коническое сѣченіе, то необходимо различать три случая:

1. $\rho^2=P\Delta>0$. Двѣ дѣйствительныя касательныя.

2. $\rho^2=P\Delta<0$. Двѣ мнимыя касательныя.

3. $\rho^2=P\Delta=0$. Двѣ касательныя совпадаютъ.

Слѣдовательно вся плоскость дѣлится коническимъ сѣченіемъ на двѣ части: на одной находятся точки, изъ которыхъ можно провести только

мнимыя касательныя къ коническому сѣченію—это *внутренняя часть*; на другой находятся точки, изъ которыхъ можно провести дѣйствительныя касательныя—это *внѣшняя часть.*

Точки, находящіяся на кривой служатъ переходомъ отъ дѣйствительныхъ касательныхъ къ мнимымъ, и обратно; въ этихъ точкахъ пара касательныхъ совпадаетъ.

§ 335. Система касательныхъ, проведенныхъ изъ точки y, есть перерожденіе коническаго сѣченія формы (§ 207):

$$(\alpha+1)^2 PR - 4\alpha Q^2 = 0 \tag{39}$$

Если въ уравненіи будемъ разсматривать α, какъ перемѣнный параметръ, то это уравненіе будетъ представлять безконечную систему коническихъ сѣченій, между которыми находится поляра точки y, дважды повторенная, и пара касательныхъ. Эти двѣ послѣднія прямыя получатся, замѣщая коническое сѣченіе $P=0$, какимъ-нибудь, другимъ изъ системы; другими словами: всѣ коническія сѣченія системы имѣютъ для точки y одну и туже пару касательныхъ и одну и туже поляру. Въ самомъ дѣлѣ, если вмѣсто z подставимъ $z+\lambda y$, то найдемъ:

$$(\alpha+1)^2 P(R+2\lambda Q+\lambda^2 P) - 4\alpha(Q+\lambda P)^2 = 0$$

или:

$$\lambda^2 R_1 + 2\lambda Q_1 + P_1 = 0$$

полагая:

$$P_1 = (\alpha+1)^2 PR - 4\alpha Q^2$$

$$Q_1 = (\alpha-1)^2 PQ$$

$$R_1 = (\alpha-1)^2 P^2$$

откуда:

$$P_1 R_1 - Q^2_1 = (\alpha^2-1)^2 P^2 (PR - Q^2)$$

Слѣдовательно выраженія $P_1 R_1 - Q^2_1$ и Q^2_1, которыя будучи приравнены нулю, даютъ пару касательныхъ и поляру, для одного изъ системы коническихъ сѣченій, отличаются только постояннымъ множителемъ, отличнымъ отъ нуля, отъ подобныхъ выраженій относительно даннаго коническаго сѣченія. Слѣдовательно мы, такимъ образомъ, доказали слѣдующее предложеніе.

Предложеніе. Всѣ коническія сѣченія системы (39) касаются въ двухъ точкахъ, а y есть полюсъ ихъ общей хорды соприкосновенія.

Пр. 1. Для примѣра возьмемъ пару касательныхъ къ каноническому уравненію эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

требуется найти пару касательныхъ, проведенныхъ къ нему изъ точки x_1y_1. Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$P=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1 \quad , \quad Q=\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}-1 \quad , \quad R=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$

пара касательныхъ будетъ:

$$a^2b^2(PR-Q^2)=(xy_1-xy_1)^2-(x-x_1)^2b^2-(y-y_1)^2a^2=0$$

Чтобы разложить это уравненіе на два линейные множителя:

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0 \quad , \quad \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0$$

воспользуемся уравненіями относительно $\alpha_i\beta_i$ (13), которыя, если всѣ ихъ умножимъ на a^2b^2 и вмѣсто ρ напишемъ ρa^2b^2, примутъ форму:

$$\begin{aligned}
&\alpha\alpha_1=y_1^2-b^2 && , \quad \beta\alpha_1=-x_1y_1-\rho && , \quad \gamma\alpha_1=b^2x_1+\rho y_1\\
&\alpha\beta_1=-x_1y_1+\rho && , \quad \beta\beta_1=x_1^2-a^2 && , \quad \gamma\beta_1=a^2y_1-\rho x_1\\
&\alpha\gamma_1=b^2x_1-\rho y_1 && , \quad \beta\gamma_1=a^2y_1+\rho x_1 && , \quad \gamma\gamma_1=-b^2x_1^2-a^2y_1^2
\end{aligned}$$

гдѣ, соображаясь съ (37), легко найти:

$$\rho^2=b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2$$

Уравненія двухъ искомыхъ касательныхъ, если ρ есть корень уравненія относительно ρ^2, будутъ даны уравненіями:

$$b^2x(x-x_1)+a^2y_1(y-y_1)+\rho(x_1y-xy_1)=0$$

и

$$b^2x_1(x-x_1)+a^2y_1(y-y_1)+\rho(x_1y-xy_1)=0$$

Пр. 2. Рѣшить туже задачу относительно гиперболы и параболы.

ГЛАВА XX.

Опредѣленіе точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій.

§ 336. Въ § 204 показали, что два коническія сѣченія, данныя уравненіями:

$$\begin{aligned}
f(x)&=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0\\
f_1(x)&=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2+2b_{12}x_1x_2+2b_{13}x_1x_3+2b_{23}x_2x_3=0
\end{aligned} \qquad (1)$$

пересѣкаются въ четырехъ точкахъ, координаты которыхъ даются рѣшеніемъ уравненія четвертой степени. Затѣмъ въ § 218 показали, что эти два коническія сѣченія, данныя въ линейныхъ координатахъ:

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \\ f'_1(\xi) &= B_{11}\xi^2_1 + B_{22}\xi^2_2 + B_{33}\xi^2_3 + 2B_{12}\xi_1\xi_2 + 2B_{13}\xi_1\xi_3 + 2B_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ $A_{i,k}$, $B_{i,k}$ суть миноры опредѣлителей Δ и Δ_1, имѣютъ четыре общія касательныя, координаты которыхъ даются также уравненіемъ четвертой степени.

Въ настоящей главѣ мы покажемъ, какимъ способомъ можно опредѣлить координаты, какъ точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, такъ и координаты общихъ ихъ касательныхъ.

Для большаго удобства мы будемъ писать уравненія (1) и (2) въ слѣдующихъ символическихъ формахъ:

$$\begin{aligned} f(x) &= \Sigma a_{i,k} x_i x_k = 0 \quad , \quad f_1(x) = \Sigma b_{i,k} x_i x_k = 0 \\ f'(\xi) &= \Sigma A_{i,k} \xi_i \xi_k = 0 \quad , \quad f'_1(\xi) = \Sigma B_{i,k} \xi_i \xi_k = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

гдѣ Σ есть символъ суммы, давая индексамъ всѣ значенія отъ 1 до 3 включительно. Инваріанты коническихъ сѣченій f и f_1 означимъ чрезъ Δ и Δ_1 (§ 203, 39).

§ 337. Если:

$$f(x) = 0 \quad , \quad f_1(x) = 0 \tag{4}$$

суть уравненія двухъ коническихъ сѣченій, то уравненіе:

$$f - \lambda f_1 = 0 \tag{5}$$

есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія двухъ данныхъ. Давая коэфиціенту λ всѣ величины отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ систему или связку коническихъ сѣченій, которыя всѣ проходятъ черезъ четыре точки пересѣченія коническихъ сѣченій (4).

Между коническими сѣченіями системы (5) есть нѣкоторыя, которыя состоятъ изъ пары прямыхъ линій, слѣдовательно, если найдемъ такую пару, то точки пересѣченія двухъ данныхъ коническихъ сѣченій (4) опредѣлятся пересѣченіемъ одного изъ нихъ съ найденною парою прямыхъ линій, или двухъ паръ между собою.

Мы видѣли (§ 203, 39), что для того, чтобы коническое сѣченіе обра-

тилось въ пару прямыхъ линій должна существовать между коэфиціентами слѣдующая зависимость:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Такъ какъ въ уравненіи (5) коэфиціенты его имѣютъ форму $a_{i,k} - \lambda b_{i,k}$, то для того чтобы коническое сѣченіе (5) обратилось въ пару прямыхъ, должны имѣть:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & , & a_{12} - \lambda b_{12} & , & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & , & a_{22} - \lambda b_{22} & , & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & , & a_{32} - \lambda b_{32} & , & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

таково уравненіе, опредѣляющее то значеніе λ, при которомъ коническое сѣченіе (5) распадается на два линейные множителя. Какъ видимъ это уравненіе третьей степени, относительно λ, слѣдовательно, есть три значенія λ, при которыхъ коническія сѣченія изъ системы (5) распадаются на пару прямыхъ линій Слѣдовательно задача сводится на розысканіе этихъ трехъ паръ прямыхъ линій и на опредѣленіе точекъ пересѣченія двухъ изъ этихъ паръ. Очевидно, три пары прямыхъ линій образуютъ полный четыреугольникъ, стороны котораго образуютъ двѣ пары, а діагонали третюю пару.

Выше видѣли (§ 205, 44), что для опредѣленія точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій необходимо рѣшить уравненіе четвертой степени, между тѣмъ здѣсь, какъ видно, требуется рѣшить уравненіе третьей степени; но если вспомнимъ, что разрѣшающее уравненіе четвертой степени есть уравненіе третьей степени, то настоящій случай самъ собою выясняется.

Далѣе, уравненіе третьей степени само рѣшается съ помощью разрѣшающаго уравненія второй степени и дѣйствительно въ концѣ концовъ разложеніе квадратичной троичной формы на два линейные множителя требуетъ рѣшенія уравненія только второй степени (§ 330).

§ 338. Если означимъ корни кубическаго уравненія (7) черезъ λ_1, λ_2, λ_3, то будемъ имѣть:

$$f - \lambda_1 f_1 = A'B' \quad , \quad f - \lambda_2 f_1 = A''B'' \quad , \quad f - \lambda_3 f_1 = A'''B''' \qquad (8)$$

гдѣ A и B суть линейныя функціи относительно x_1, x_2, x_3. Разложеніе этихъ формъ на два линейные множителя, каждый разъ, требуетъ рѣшенія

квадратнаго уравненія, какъ уже замѣтили выше. Три пары найденныхъ прямыхъ:

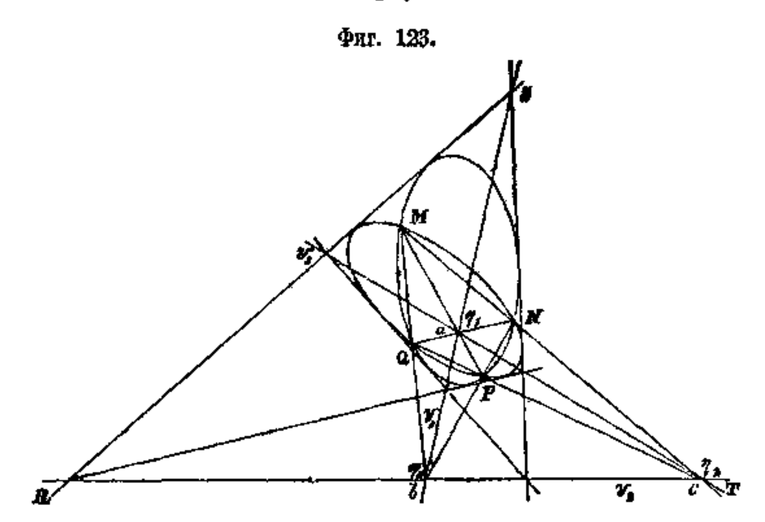
$$A'B'=0 \quad , \quad A''B''=0 \quad , \quad A'''B'''=0 \tag{9}$$

образуютъ четыреугольникъ, въ которомъ пересѣченія противуположныхъ сторонъ и пересѣченія діагоналей суть вершины полярнаго треугольника *abc*, общаго всѣмъ коническимъ сѣченіямъ системы:

$$f-\lambda f_1=0$$

Въ этомъ легко убѣдится бросивъ взглядъ на прилагаемый чертежъ (фиг. 123) и вспомнивъ свойства полнаго четыреугольника.

Фиг. 123.



Очевидно, это единственный полярный треугольникъ системы (5).

§ 339. Положеніе данныхъ коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$ отнесено къ извѣстному данному координатному треугольнику, коего уравненія сторонъ суть:

$$x_1=0 \quad , \quad x_2=0 \quad , \quad x_3=0$$

а вершины даны уравненіями:

$$x_1=0 \;,\; x_2=0 \;;\; x_1=0 \;,\; x_3=0 \;;\; x_2=0 \;,\; x_3=0$$

измѣнимъ теперь нашъ координатный треугольникъ и возьмемъ общій полярный. Пусть уравненія его сторонъ, относительно даннаго координатного треугольника будутъ:

$$\begin{aligned} y_1&=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3 \\ y_2&=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3 \\ y_3&=\alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3 \end{aligned} \tag{10}$$

гдѣ коэфиціенты $a_{i,k}$ неизвѣстны, а требуется такъ ихъ опредѣлить, чтобы $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$ были уравненія сторонъ общаго полярнаго треугольника.

Если изъ уравненій (10) опредѣлимъ x_1, x_2, x_3, черезъ y_1, y_2, y_3 и вставимъ въ уравненія (4), то онѣ примутъ форму:

$$\begin{aligned} f&=a_1y^2_1+a_2y^2_2+a_3y_3{}^2=0\\ f_1&=b_1y^2_1+b_2y^2_2+b_3y^2_3=0 \end{aligned} \tag{11}$$

такъ какъ уравненіе коническаго сѣченія, отнесеннаго къ полярному треугольнику, имѣетъ эту форму (§ 241). Далѣе коэфиціенты b во второмъ изъ уравненій (11) можно положить равными единицѣ, такъ какъ уравненія (10) преобразованій, можемъ помножить на постоянныя, извѣстнымъ образомъ выбранныя, величины и опредѣлить координаты y такъ, чтобы коэфиціенты b вошли въ составъ этихъ координатъ. Слѣдовательно уравненія данныхъ коническихъ сѣченій, отнесенныхъ къ общему полярному треугольнику, будутъ:

$$\begin{aligned} f&=a_1y^2_1+a_3y_2{}^2+a_3y_3{}^2=0\\ f_1&=y^2_1+y^2_2+y^2_3=0 \end{aligned} \tag{12}$$

При этомъ предполагается, что $f_1=0$ не есть пара прямыхъ линій, такъ какъ, въ этомъ случаѣ, одинъ изъ коэфиціентовъ b будетъ равенъ нулю, а коническое сѣченіе $f_1=0$ будетъ само одной изъ искомыхъ паръ, пересѣченіе которой съ коническимъ сѣченіемъ $f=0$ и дастъ искомыя точки пересѣченія.

§ 340. Такимъ опредѣленіемъ коэфиціентовъ b въ коническомъ сѣченіи $f_1=0$, коэфиціенты коническаго сѣченія $f=0$ вполнѣ опредѣляются. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы три уравненія (8) имѣли мѣсто необходимо, чтобы ихъ первыя части заключали только два перемѣнныя изъ трехъ y_1, y_2, y_3, такъ какъ сумма квадратовъ трехъ величинъ не можетъ быть разложена на два линейные множителя. А для того, чтобы первыя части уравненій (8) заключали только два перемѣнныя необходимо положить въ формѣ:

$$a_1y^2_1+a_2y^2_2+a_3y^2_3=f$$

слѣдующее:

$$a_1=\lambda_1 \quad , \quad a_2=\lambda_2 \quad , \quad a_3=\lambda_3$$

что даетъ:

$$\begin{aligned} f-\lambda_1f_1&=(\lambda_2-\lambda_1)\,y^2_2+(\lambda_3-\lambda_1)\,y^2_3=0\\ f-\lambda_2f_1&=(\lambda_1-\lambda_2)\,y^2_1+(\lambda_3-\lambda_2)\,y^2_3=0\\ f-\lambda_3f_1&=(\lambda_1-\lambda_3)\,y^2_1+(\lambda_2-\lambda_3)\,y^2_2=0 \end{aligned} \tag{13}$$

Вторыя части этихъ уравненій разлагаются на линейные множители:

$$(y_2\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}+y_3\sqrt{\lambda_1-\lambda_3})(y_2\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}-y_3\sqrt{\lambda_1-\lambda_3})$$

$$(y_1\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}+y_3\sqrt{\lambda_3-\lambda_2})(y_1\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}-y_3\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}) \qquad (14)$$

$$(y_1\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}+y_2\sqrt{\lambda_3-\lambda_2})(y_1\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}-y_2\sqrt{\lambda_3-\lambda_2})$$

приравнивая нулю эти выраженія будемъ имѣть уравненія трехъ паръ искомыхъ прямыхъ, отнесенныхъ къ общему полярному треугольнику, какъ координатному.

Возвратимся къ уравненіямъ (13), изъ которыхъ найдемъ:

$$\frac{y^2_1}{\lambda_2-\lambda_3}=\frac{y^2_2}{\lambda_3-\lambda_1}=\frac{y^2_3}{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{1}{\rho} \qquad (15)$$

откуда:

$$\rho y^2_1=\lambda_2-\lambda_3 \quad , \quad \rho y^2_2=\lambda_3-\lambda_1 \quad , \quad \rho y^2_3=\lambda_1-\lambda_3$$

полагая $\sqrt{\rho}=\sigma$, найдемъ:

$$\sigma y_1=\pm\sqrt{\lambda_2-\lambda_3} \quad , \quad \sigma y_2=\pm\sqrt{\lambda_3-\lambda_1} \quad , \quad \sigma y_3=\pm\sqrt{\lambda_1-\lambda_2} \qquad (16)$$

Это координаты точекъ пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій. Такъ какъ передъ каждымъ корнемъ стоятъ два знака, то есть восемь комбинацій, но изъ нихъ тѣ пары комбинацій, которыя отличаются телько общимъ множителемъ—1, даютъ одну и туже точку. Таковы комбинаціи:

$$\begin{array}{cccc} +y_1\,,-y_1 & +y_1\,,-y_1 & +y_1\,,-y_1 & +y_1\,,-y_1 \\ +y_2\,,-y_2\,, & +y_2\,,-y_2\,, & -y_2\,,+y_2\,, & -y_2\,,+y_2 \\ +y_3\,,-y_3 & -y_3\,,+y_3 & +y_3\,,-y_3 & -y_3\,,+y_3 \end{array} \qquad (17)$$

§ 341. Остается только опредѣлить коэфиціенты $a_{i,k}$ преобразованій (10). Для этого возьмемъ уравненія тѣхъ-же коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$ въ линейныхъ координатахъ (2):

$$f'(\xi)=0 \quad \text{и} \quad f'_1(\xi)=0 \qquad (18)$$

Уравненіе:

$$f'(\xi)-\mu f'_1(\xi)=0 \qquad (19)$$

представляетъ систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ общія касательныя съ коническими сѣченіям (18).

Въ этой системѣ есть три пары коническихъ сѣченій, которыя разлагаются на линейные множители, слѣдовательно, каждое представляетъ пару точекъ. Эти шесть точекъ суть пересѣченія общихъ касательныхъ, онѣ образуютъ полный четыреугольникъ и если вспомнимъ построеніе поляры данной точки, то увидимъ, что въ этомъ четыреугольникѣ, какъ и въ предъидущемъ, образуется общій полярный треугольникъ, а такъ какъ онъ и единственный для системы коническихъ сѣченій, то это тотъ самый, который мы выше построили.

Слѣдовательно, уравненія данныхъ коническихъ сѣченій въ линейныхъ координатахъ, отнесенныя къ общему полярному треугольнику, будутъ:

$$f'(\xi) = \lambda_2\lambda_3\eta^2_1 + \lambda_1\lambda_3\eta^2_2 + \lambda_1\lambda_2\eta^2_3 = 0$$
$$f'_1(\xi) = \eta^2_1 + \eta^2_2 + \eta^2_3 = 0 \qquad (20)$$

гдѣ коэфиціенты при η составлены изъ корней уравненія:

$$\Delta(\lambda) = 0$$

Легко видѣть изъ уравненій (20), что корни кубическаго уравненія, составленнаго такъ изъ $A_{i,k}$ и $B_{i,k}$, какъ уравненіе $\Delta(\lambda)$ составлено изъ $a_{i,k}$ и $b_{i,k}$, суть обратные корнямъ λ_1, λ_2, λ_3.

Пары точекъ опредѣлятся изъ уравненія:

$$f'(\xi) - \mu f'_1(\xi) = 0 \qquad (21)$$

полагая въ немъ послѣдоватетьно μ равнымъ $\lambda_2\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_3$, что даетъ:

$$f' - \mu f'_1 = \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^2_2 + \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_3)\eta^2_3 = 0$$
$$f' - \mu f'_1 = \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1)\eta^2_1 + \lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)\eta^2_3 = 0 \qquad (22)$$
$$f' - \mu f'_1 = \lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)\eta^2_1 + \lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2)\eta^2_2 = 0$$

Каждое изъ этихъ уравненій разлагается на два линейные множителя и представляетъ слѣдовательно пару точекъ.

Координаты четырехъ общихъ касательныхъ найдутся изъ уравненій (20):

$$\rho\eta_1 = \pm\sqrt{\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2)}\ ,\ \rho\eta_2 = \pm\sqrt{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_3)}\ ,\ \rho\eta_3 = \pm\sqrt{\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1)} \qquad (23)$$

и здѣсь, какъ выше, изъ восьми комбинацій, тѣ которыя отличаются множителемъ —1, даютъ одну и туже касательную.

§ 342. Перейдемъ къ опредѣленію коэфиціентовъ $\alpha_{i,k}$. Для этого означимъ черезъ r опредѣлитель:

$$r = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \tag{24}$$

и рѣшимъ уравненія (10) относительно x, то найдемъ:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \quad , \quad x_1 = \beta_{11}y_1 + \beta_{21}y_2 + \beta_{31}y_3 \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \quad , \quad x_2 = \beta_{12}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{32}y_3 \\ y_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \quad , \quad x_3 = \beta_{13}y_1 + \beta_{23}y_2 + \beta_{33}y_3 \end{aligned} \tag{25}$$

Соображаясь съ § 186 будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3 \quad , \quad \xi_1 = \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \alpha_{31}\xi_3 \\ \eta_2 &= \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 \quad , \quad \xi_2 = \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \alpha_{32}\eta_3 \\ \eta_3 &= \beta_{31}\xi_1 + \beta_{32}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 \quad , \quad \xi_3 = \alpha_{13}\eta_1 + \alpha_{23}\eta_2 + \alpha_{33}\eta_3 \end{aligned} \tag{26}$$

$\beta_{i,k}$ суть миноры опредѣлителя r (24).

Изъ этихъ уравненій видимъ, что:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{matrix} \tag{27}$$

суть координаты сторонъ общаго полярнаго треугольника относительно стараго координатнаго треугольника, а:

$$\begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{matrix} \tag{28}$$

суть координаты вершинъ новаго общаго полярнаго треугольника, противулежащихъ сторонамъ (27).

Но эти вершины суть полюсы противулежащихъ сторонъ общаго полярнаго треугольника, относительно обѣихъ коническихъ сѣченій, слѣдо-

вательно уравненія поляръ, обѣихъ коническихъ сѣченій, относительно каждой изъ вершинъ, должны быть тождественны.

Но поляры одной изъ вершинъ $\beta_{i,1}$, $\beta_{i,2}$, $\beta_{i,3}$ относительно коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$ суть:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial\beta_{i,1}}+z_2\frac{\partial f}{\partial\beta_{i,2}}+z_3\frac{\partial f}{\partial\beta_{i,3}}=0 \quad , \quad z_1\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,1}}+z_2\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,2}}+z_3\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,3}}=0$$

Слѣдовательно должны имѣть:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial\beta_{i,1}}+z_2\frac{\partial f}{\partial\beta_{i,2}}+z_3\frac{\partial f}{\partial\beta_{i,3}}=\mu\left(z_1\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,1}}+z_2\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,2}}+z_3\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,3}}\right)$$

откуда:

$$\frac{\partial f}{\partial\beta_{i,1}}=\mu\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,1}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial\beta_{i,2}}=\mu\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial\beta_{i,3}}=\mu\frac{\partial f_1}{\partial\beta_{i,3}}$$

а изъ этого:

$$\begin{aligned}
a_{11}\beta_{i,1}+a_{12}\beta_{i,2}+a_{13}\beta_{i,3}&=\mu(b_{11}\beta_{i,1}+b_{12}\beta_{i,2}+b_{13}\beta_{i,3})\\
a_{21}\beta_{i,1}+a_{22}\beta_{i,2}+a_{23}\beta_{i,3}&=\mu(b_{21}\beta_{i,1}+b_{22}\beta_{i,2}+b_{23}\beta_{i,3})\\
a_{31}\beta_{i,1}+a_{32}\beta_{i,2}+a_{33}\beta_{i,3}&=\mu(b_{31}\beta_{i,1}+b_{32}\beta_{i,2}+b_{33}\beta_{i,3})
\end{aligned} \tag{29}$$

или:

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\mu b_{11})\beta_{i,1}+(a_{12}-\mu b_{12})\beta_{i,2}+(a_{13}-\mu b_{13})\beta_{i,3}&=0\\
(a_{21}-\mu b_{21})\beta_{i,1}+(a_{22}-\mu b_{22})\beta_{i,2}+(a_{23}-\mu b_{23})\beta_{i,3}&=0\\
(a_{31}-\mu b_{31})\beta_{i,1}+(a_{32}-\mu b_{32})\beta_{i,2}+(a_{33}-\mu b_{33})\beta_{i,3}&=0
\end{aligned} \tag{30}$$

исключая изъ этихъ уравненій β, найдемъ, уже выше найденное, кубическое уравненіе $\Delta(\mu)=0$. Слѣдовательно корни μ суть ничто иное, какъ λ_1, λ_2, λ_3.

Подставляя каждый изъ этихъ корней въ (30) и полагая $i=1, 2, 3$, найдемъ координаты вершинъ, именно:

$$\begin{aligned}
\beta_{11}&=\rho_1\beta_1 \quad ; \quad \beta_{12}=\rho_1\beta_2 \quad ; \quad \beta_{13}=\rho_1\beta_3\\
\beta_{21}&=\rho_2\beta'_1 \quad ; \quad \beta_{22}=\rho_2\beta'_2 \quad ; \quad \beta_{23}=\rho_2\beta'_3\\
\beta_{31}&=\rho_3\beta''_1 \quad ; \quad \beta_{32}=\rho_3\beta''_2 \quad ; \quad \beta_{33}=\rho_3\beta''_3
\end{aligned} \tag{31}$$

коэфиціенты пропорціональности ρ_1, ρ_2, ρ_3 опредѣляются условіемъ преобразованія формы $f_1=0$ въ форму $y^2_1+y^2_2+y^2_3=0$ подстановленіями (25).

Такимъ образомъ наша задача рѣшена вполнѣ, но можно рѣшить ее еще изящнѣе, слѣдующимъ образомъ, на основаніи свойствъ инваріантовъ.

§ 343. Троичная квадратичная форма:

$$\Sigma a_{i,k} x_i x_k = f \tag{32}$$

имѣетъ инваріантомъ, какъ видѣли, опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \tag{33}$$

и коваріантомъ или, лучше, контраковаріантомъ (§ 191), взаимную функцію функціи (32):

$$\Sigma A_{i,k} \xi_i \xi_k = f' \tag{34}$$

Если форму (32) преобразуемъ линейными преобразованіями (25), а взаимную форму (34) преобразованіями (26), то по свойству инваріантовъ вообще будемъ имѣть:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{35}$$

или:

$$\Delta' = R^2 . \Delta \tag{36}$$

$a'_{i,k}$ суть коэфиціенты преобразованной формы:

$$\Sigma a'_{i,k} y_i y_k$$

Преобразуя форму (34), найдемъ:

$$\Sigma A'_{i,k} \eta_i \eta_k = R^2 \Sigma A_{i,k} \xi_i \xi_k \tag{37}$$

гдѣ $A'_{i,k}$ суть коэфиціенты въ преобразованной формѣ. Замѣтивъ это, возьмемъ опредѣлитель или инваріантъ:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & , & a_{12} - \lambda b_{12} & , & a_{13} - \lambda b_{13} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & , & a_{22} - \lambda b_{22} & , & a_{23} - \lambda b_{23} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & , & a_{32} - \lambda b_{32} & , & a_{33} - \lambda b_{33} \end{vmatrix} \tag{38}$$

формы:

$$\Sigma a_{i,k} x_i x_k - \lambda \Sigma b_{i,k} x_i x_k = f - \lambda f_1 \tag{39}$$

Выше видѣли, что преобразованіемъ къ полярному треугольнику, коническое сѣченіе (39) приводится къ виду:

$$f-\lambda f_1=(\lambda_1-\lambda)\,y_1^2+(\lambda_2-\lambda)\,y_2^2+(\lambda_3-\lambda)\,y_3^2=0 \qquad (40)$$

откуда найдемъ, соображаясь съ сдѣланными выше замѣчаніями:

$$R^2\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda_1-\lambda, & 0, & 0\\ 0, & \lambda_2-\lambda, & 0\\ 0, & 0, & \lambda_3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda) \qquad (41)$$

и:

$$R^2\Sigma\Delta_{i,k}(\lambda)\xi_i\xi_k=(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)\eta_1^2+(\lambda_3-\lambda)(\lambda_1-\lambda)\eta_2^2+(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\eta_3^2 \qquad (42)$$

гдѣ $\Delta_{i,k}(\lambda)$ суть миноры опредѣлителя $\Delta(\lambda)$ (38).

Изъ уравненія (41) видимъ, что λ_1, λ_2, λ_3 суть корни уравненія $\Delta(\lambda)=0$.

Приравнивая коэфиціенты при λ^3 въ уравненіи (41), найдемъ:

$$1=R^2\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix} \qquad (43)$$

или:

$$R^2=\frac{1}{\Delta_1}$$

гдѣ Δ_1 есть инваріантъ коническаго сѣченія $f_1=0$, который, по условію, не равенъ нулю.

Въ этомъ предположеніи сдѣлаемъ въ уравненіи (42), послѣдовательно, $\lambda=\lambda_1$, λ_2, λ_3, то найдемъ:

$$\eta_1^2=(\beta_{11}\xi_1+\beta_{12}\xi_2+\beta_{13}\xi_3)^2=\frac{1}{\Delta_1(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}\sum\Delta_{i,k}(\lambda_1)\,\xi_i\xi_k$$

$$\eta_2^2=(\beta_{21}\xi_1+\beta_{22}\xi_2+\beta_{23}\xi_3)^2=\frac{1}{\Delta_1(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}\sum\Delta_{i,k}(\lambda_3)\,\xi_i\xi_k \qquad (44)$$

$$\eta_3^2=(\beta_{31}\xi_1+\beta_{32}\xi_2+\beta_{33}\xi_3)^2=\frac{1}{\Delta_1(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\sum\Delta_{i,k}(\lambda_2)\,\xi_i\xi_k$$

Въ этихъ уравненіяхъ можно извлечь квадратный корень изъ обѣихъ частей и изъ полученныхъ трехъ линейныхъ уравненій опредѣлить коэ-

фиціенты $\beta_{i,k}$ подстановленій (25). Мы можемъ въ предъидущихъ уравненіяхъ просто приравнять коэфиціенты при $\xi_i\xi_k$, что даетъ вообще:

$$\beta_{i,h}\beta_{k,h} = \frac{\Delta_{i,k}(\lambda_h)}{\Delta_1\mu_h} \tag{45}$$

въ выраженіи (45) индексу h надобно дать значенія 1, 2, 3 и положить:

$\mu_1 = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)$, $\mu_2 = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\mu_3 = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$

знаки при коэфиціентахъ $\beta_{i,k}$ останутся неопредѣленными.

§ 344. Если опредѣлитель $\Delta(\lambda)$ (38) расположимъ по степенямъ λ, то найдемъ, что уравненіе $\Delta(\lambda) = 0$ будетъ:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1\lambda^3 - Q_1\lambda^2 + Q\lambda - \Delta = 0 \tag{46}$$

гдѣ:

$$Q = A_{11}b_{11} + A_{22}b_{22} + A_{33}b_{33} + 2A_{12}b_{12} + 2A_{13}b_{13} + 2A_{23}b_{23} \tag{47}$$

$$Q_1 = B_{11}a_{11} + B_{22}a_{22} + B_{33}b_{33} + 2B_{12}a_{12} + 2B_{13}a_{13} + 2B_{23}a_{23} \tag{48}$$

$A_{i,k}$ и $B_{i,k}$ суть миноры опредѣлителей Δ и Δ_1. Очевидно Q_1 получается изъ Q, измѣняя $a_{i,k}$ на $b_{i,k}$ и обратно.

Исключая λ изъ уравненій (46) и $f - \lambda f_1 = 0$, найдемъ уравненіе:

$$\Delta_1 f^3 - Q_1 f_1 f^2 + Q f_1^2 f - \Delta f_1^3 = 0 \tag{49}$$

Какъ видно уравненіе шестой степени и представляетъ три пары прямыхъ линій, проходящихъ чрезъ четыре точки пересѣченія даныхъ коническихъ сѣченій $f = 0$ и $f_1 = 0$. Замѣтимъ, что коэфиціенты въ кубическомъ уравненіи (46), суть инваріанты, а уравненіе (49) есть коваріантъ.

§ 345. Уравненіе (42):

$$R^2\Sigma\Delta_{i,k}\xi_i\xi_k = (\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)\eta^2_1 + (\lambda_2-\lambda)(\lambda_1-\lambda)\eta^2_2 + (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\eta^2_3 = 0 \tag{50}$$

представляетъ систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ общими касательными четыре касательныя къ кривымъ $f = 0$ и $f_1 = 0$. Чтобы найти то изъ системы коническихъ сѣченій, которое касается данной координатами η'_1, η'_2, η'_3 прямой, надобно эти координаты подставить въ уравненіе (50) и опредѣлить изъ него λ. Такъ какъ уравненіе (50) относительно λ второй степени, то имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Каждая прямая на плоскости есть касательная къ двумъ коническимъ сѣченіямъ изъ системы или связки $f - \lambda f_1 = 0$.

Предложеніе взаимное этому есть слѣдующее:

Предложеніе. Черезъ каждую точку плоскости, проходятъ два коническія сѣченія изъ системы или связки $f-\lambda f_1=0$.

§ 346. Относительное положеніе точекъ, въ которыхъ какое-нибудь изъ коническихъ сѣченій системы встрѣчаетъ данную прямую, и двухъ точекъ касанія ея съ двумя коническими сѣченіями той же системы, заслуживаетъ особеннаго вниманія.

Чтобы опредѣлить это положеніе, возьмемъ за данную прямую сторону координатнаго треугольника $x_1=0$. Если затѣмъ положимъ $x_1=0$ въ одномъ изъ коническихъ сѣченій, которыя касаются этой прямой, то должно получиться квадратное уравненіе относительно x_2, x_3, имѣющее равные корни относительно отношенія $\frac{x_2}{x_3}$, или что тоже полный квадратъ линейнаго выраженія въ x_2 и x_3. Слѣдовательно уравненія коническихъ сѣченій, касающихся прямой, должны имѣть форму:

$$f=x_1M+N^2 \quad , \quad f_1=x_1M_1+N^2_1$$

гдѣ M и M_1 суть линейныя функціи изъ x_1, x_2, x_3, а N и N_1 линейныя только въ x_2 и x_3. Слѣдовательно, какое-нибудь изъ системы коническихъ сѣченій будетъ дано уравненіемъ:

$$f-\lambda f_1=x_1(M-M_1)+N^2-\lambda N^2_1=0$$

а его точки пересѣченія съ данною прямою даются уравненіями:

$$x_1=0 \quad \text{и} \quad N^2-\lambda N^2_1=0$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій представляетъ пару прямыхъ линій, идущихъ изъ вершины $x_2=0$, $x_1=0$ координатнаго треугольника къ искомымъ точкамъ пересѣченія. Эти прямыя суть:

$$N-N_1\sqrt{\lambda}=0 \quad \text{и} \quad N+N_1\sqrt{\lambda}=0$$

эти двѣ прямыя, очевидно, гармоническія съ прямыми:

$$N=0 \quad \text{и} \quad N_1=0$$

проходящими чрезъ точку ихъ пересѣченія и чрезъ точки касанія данной прямой съ коническими сѣченіями $f=0$ и $f_1=0$. Слѣдовательно искомыя точки пересѣченія суть гармоническія съ точками касанія. Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если система коническихъ сѣченій:

$$f-\lambda f_1=0$$

пересѣкается прямою линіею, то полученный рядъ точекъ будетъ инво-

люціонный, коего двойныя точки суть точки касанія съ данною прямою двухъ изъ системы коническихъ сѣченій.

Такое же разсужденіе относительно системы коническихъ сѣченій въ линейныхъ координатахъ:

$$f' - \lambda f'_1 = 0$$

даетъ взаимное предложеніе.

Предложеніе. Если изъ какой-нибудь точки проходятъ къ системѣ коническихъ сѣченій касательныя, то эта связка касательныхъ будетъ инволюціоная, коей двойные лучи будутъ касательныя къ двумъ коническимъ сѣченіямъ изъ системы, которыя проходятъ чрезъ данную точку. Съ этими предложеніями мы встрѣтимся еще ниже.

Слѣдующіе примѣры служатъ для вычисленія инваріантовъ Δ, Q; Δ_1, Q_1 въ случаяхъ, которые часто встрѣчаются.

Пр. 1. Найти геометрическое мѣсто пересѣченія нормалей къ коническому сѣченію, проведенныхъ въ концахъ хордъ, проходящихъ чрезъ данную точку $(x_1 y_1)$?

Рѣшеніе. Пусть данное коническое сѣченіе будетъ эллипсъ:

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

точки на эллипсѣ, чрезъ которыя проходятъ нормали, проведенныя чрезъ данную точку $(x'y')$, какъ мы видѣли (§ 256), даются пересѣченіемъ эллипса f съ гиперболой:

$$f_1 = 2(c^2xy + b^2y'x - a^2x'y)$$

Составимъ уравненіе шести хордъ (49), проходящихъ чрезъ пересѣченіе коническихъ сѣченій:

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{и} \quad f_1 = 2(c^2xy + b^2x'y - a^2x'y) = 0$$

для нихъ имѣемъ:

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2}\ ,\quad Q = 0\ ,\quad Q_1 = -(a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^4)\ ,\quad \Delta = -2a^2b^2c^2x'y'$$

Слѣдовательно уравненіе шести хордъ будетъ:

$$\frac{8}{a^2b^2}(a^2x'y - b^2y'x - c^2xy)^3 + 2(a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^4)(a^2x'y - b^2xy' - c^2xy)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 +$$
$$+ 2a^2b^2c^2x'y'\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^3 = 0$$

это уравненіе должно удовлетворятся координатами (x_1, y_1), слѣдовательно, если подставимъ x_1, y_1 на мѣсто x, y и измѣнимъ x', y' на x, y, то найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$\frac{8}{a^2b^2}(a^2y_1x - b^2x_1y - c^2x_1y_1)^3 + 2(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)(a^2y_1x - b^2x_1y - c^2x_1y_1)\left(\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} - 1\right)^2 +$$
$$+ 2a^2b^2c^2x_1y_1\left(\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} - 1\right)^3 = 0.$$

Какъ видимъ кривая третей степени. Если данная точка находится на одной изъ осей, то кривая будетъ коническое сѣченіе, которое получится, полагая $x_1 = 0$. Геометрически видно, что въ этомъ случаѣ ось есть часть геометрическаго мѣста. Геометрическое мѣсто будетъ коническое сѣченіе въ томъ случаѣ, когда данная точка $(x_1 y_1)$ находится на безконечности, т. е. когда, хорды проводятся параллельно данной прямой.

Пр. 2. Вычислить инваріанты, когда коническія сѣченія отнесены къ общему полярному треугольнику?

Рѣшеніе. Если коническія сѣченія отнесены къ общему полярному треугольнику, то ихъ форма будетъ:

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad , \quad f_1 = a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 = 0$$

одно изъ уравненій можно упростить, напримѣръ второе, написавъ x, y, z вмѣсто $x\sqrt{a_1}$, $y\sqrt{b_1}$, $z\sqrt{c_1}$, послѣ чего данныя коническія сѣченія примутъ форму:

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \quad , \quad f_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

откуда, найдемъ инваріанты:

$$\Delta = abc \quad , \quad Q = bc + ca + ab \quad , \quad Q_1 = a + b + c \quad , \quad \Delta_1 = 1$$

слѣдовательно $f - \lambda f_1 = 0$ будетъ представлять прямыя линіи, когда:

$$\lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + (bc + ca + ab)\lambda - abc = 0$$

корни этого уравненія суть a, b, c. Что эти величины обращаютъ $f - \lambda f_1 = 0$ въ пару прямыхъ само собою очевидно.

Пр. 3. Возьмемъ, какъ выше, $f_1 = x^2 + y^2 + z^2$, а f пусть будетъ общей формы, то будемъ имѣть:

$$\Delta \quad , \quad Q = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad , \quad Q_1 = a + b + c \quad , \quad \Delta_1 = 1.$$

Пр. 4. Пусть f и f_1 будутъ два круга:

$$f = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad , \quad f_1 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2_1 = 0$$

Рѣшеніе. $\Delta = -r^2, Q = \alpha^2 + \beta^2 - 2r^2 - r^2_1, Q_1 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 - 2r^2_1, \Delta = -r^2_1$ и если означимъ чрезъ d разстояніе между центрами круговъ, то найдемъ:

$$r^2_1\lambda^3 + (d^2 - 2r^2_1 - r^2)\lambda^2 - (d^2 - 2r^2 - r^2_1)\lambda - r^2 = 0$$

но мы знаемъ, что $f - f_1 = 0$ представляетъ пару прямыхъ линій изъ коихъ одна на безконечности, слѣдовательно одинъ изъ корней есть $+1$, и предъидущее уравненіе должно дѣлиться на $\lambda - 1$ и въ частномъ получиться:

$$r^2_1\lambda^2 + (d^2 - r^2 - r^2_1)\lambda + r^2 = 0$$

Пр. 5. Пусть:

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad f_1 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

то:

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2} \quad , \quad Q = \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 - r^2)$$

$$Q_1 = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 - r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \quad , \quad \Delta_1 = -r^2$$

Пр. 6. Пусть:

$$f = y^2 - 2px = 0 \quad , \quad f_1 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0$$

то:

$$\Delta = -p^2 \quad , \quad Q = -2p\alpha - p^2 \quad , \quad Q_1 = \beta^2 - 2p\alpha - r^2 \quad , \quad \Delta_1 = -r^2$$

ГЛАВА XXI.

Нѣкоторыя замѣчательныя свойства коническихъ сѣченій.

§ 347. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи системы коническихъ сѣченій:

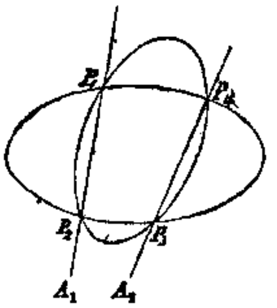
$$f - \lambda f_1 = 0 \tag{1}$$

Случай 1. Положимъ, что коническое сѣченіе $f_1 = 0$ распадается на два линейные множителя $f_1 = A_1 A_2$, т. е. представляетъ пару прямыхъ линій $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Слѣдовательно уравненіе (1) будетъ:

$$f - \lambda A_1 A_2 = 0 \tag{2}$$

Оно представляетъ, очевидно, систему коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре точки p_1, p_2, p_3, p_4 пересѣченія прямыхъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ съ коническимъ сѣченіемъ $f = 0$ (фиг. 124).

Фиг. 124.



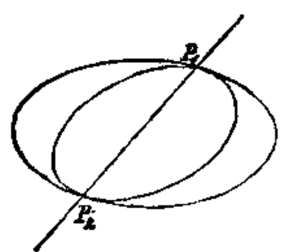
Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ $\Delta_1 = 0$, то кубическое уравненіе (§ 344, 46) сдѣлается квадратнымъ

$$Q_1\lambda^2 - Q\lambda + \Delta = 0 \tag{3}$$

Слѣдовательно одинъ изъ корней кубическаго уравненія $\lambda = \infty$; онъ даетъ пару хордъ $A_1 A_2 = 0$ общихъ системѣ коническихъ сѣченій (2), остальныя двѣ пары общихъ хордъ даются корнями квадратнаго уравненія (3). Эти двѣ пары хордъ будутъ p_1p_4 и p_2p_2; p_1p_3 и p_4p_2. Если точка p_2 совпадетъ съ p_1, а p_3 съ p_4, то хорды $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ будутъ касательныя къ коническому сѣченію $f = 0$, а двѣ пары остальныхъ хордъ совпадутъ и составятъ хорду, которая проходитъ чрезъ

точки касанія хордъ $A_1=0$ и $A_2=0$ съ коническимъ сѣченіемъ $f=0$. Такъ какъ двѣ пары хордъ совпадаютъ, то уравненіе (3) будетъ имѣть въ этомъ случаѣ два равные корня, а это дается условіемъ:

Фиг. 125.



$$Q_1\Delta-4Q^2=0 \qquad (4)$$

При этомъ условіи система коническихъ сѣченій (2) имѣетъ общія касательныя $A_1=0$ и $A_2=0$, а ихъ общая хорда соприкосновенія p_1p_2 (фиг. 125) дается уравненіемъ:

$$2Q_1f-QA_1A_2=0 \qquad (5)$$

которое должно быть полнымъ квадратомъ.

Положимъ, что въ уравненіи (2) A_2 есть постоянная величина k, то это уравненіе сдѣлается:

$$f-\lambda kA_1=0 \qquad (6)$$

преобразуя это уравненіе въ трилинейныя координаты, полагая (§ 182, 6):

$$x=\frac{A}{C}\quad,\quad y=\frac{B}{C}$$

найдемъ:

$$f-\lambda CA_1=0 \qquad (7)$$

гдѣ $C=0$ есть уравненіе безконечно удаленной прямой. Изъ этой формы видимъ, что коническія сѣченія системы (7) пересѣкаются въ двухъ конечныхъ точкахъ на прямой $A_1=0$ и въ двухъ безконечно удаленныхъ на прямой $C=0$. Прямыя $A_1=0$ и $C=0$ суть общія хорды системы коническихъ сѣченій (7).

Положимъ еще, что двѣ общія хорды $A_1=0$ и $A_2=0$ системы (2) совпадутъ, т. е. $A_2=A_1=0$, то это уравненіе сдѣлается:

$$f-\lambda A_1^2=0 \qquad (8)$$

Если хорды $A_1=0$ и $A_2=0$ совпадутъ, то совпадетъ съ ними и другая пара p_1p_3 и p_2p_4, а третяя пара p_1p_4 и p_2p_3 сдѣлается общими касательными къ системѣ (2), $A_1^2=0$ ихъ общая хорда соприкосновенія. Такъ какъ въ этомъ случаѣ не только $\Delta_1=0$, но и $Q_1=0$ (§ 333, 32), то кубическое уравненіе (§ 344, 46) будетъ имѣть два безконечно большіе корня, а третій дается уравненіемъ:

$$Q\lambda-\Delta=0 \qquad (9)$$

первые два корня даютъ пару хордъ $A_1^2=0$, а корень $\lambda=\dfrac{\Delta}{Q}$ даетъ остальную пару:

$$Qf-\Delta A_1^2=0 \qquad (10)$$

т. е. общія касательныя. Если $A_1 = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$, то легко видѣть, что $Q = f'$, слѣдовательно уравненіе (10) будетъ:

$$f'f - \Delta A_1^2 = 0 \tag{11}$$

Если бы случилось, что $A_1 = 0$ есть касательная къ коническому сѣченію $f = 0$, то и пара (10) совпадетъ съ нею, а для этого необходимо условіе $f' = 0$, какъ намъ уже извѣстно.

Случай 2. Положимъ теперь, что въ системѣ (1) оба коническія сѣченія $f = 0$ и $f_1 = 0$ распадаются, на каждой, на пару прямыхъ линій $f = A_1 A_2$, $f_1 = A_3 A_4$, то система будетъ:

$$A_1 A_2 - \lambda A_3 A_4 = 0$$

и какъ мы видѣли выше (§ 299) есть система коническихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ точки пересѣченія прямыхъ:

$$A_1 = 0 \text{ и } A_3 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \text{ и } A_3 = 0,$$

$$A_1 = 0 \text{ и } A_4 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \text{ и } A_4 = 0$$

Въ этомъ случаѣ $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = 0$, слѣдовательно кубическое уравненіе (§ 344, 46) сдѣлается:

$$Q_1 \lambda^2 - Q\lambda = 0 \tag{12}$$

Слѣдовательно оно имѣетъ одинъ корень $\lambda = \infty$, другой $\lambda = 0$, а третій $\lambda = \frac{Q}{Q_1}$.

Первый корень, т. е. $\lambda = \infty$, даетъ пару общихъ хордъ $A_3 A_4 = 0$, второй, т. е. $\lambda = 0$, даетъ другую пару $A_1 A_2 = 0$, а третій даетъ остальную пару:

$$Q_1 A_1 A_2 - Q A_3 A_4 = 0$$

Если положимъ, что хорды $A_3 = 0$ и $A_4 = 0$ совпадаютъ, то очевидно $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ будутъ общія касательныя къ системѣ:

$$A_1 A_2 - \lambda A_3^2 = 0 \tag{13}$$

но въ этомъ случаѣ и $Q_1 = 0$, слѣдовательно третій корень $\lambda = \infty$, который даетъ $A_3^2 = 0$.

Если A_3 будетъ постоянное C, то система:

$$A_1 A_2 - \lambda C^2 = 0 \tag{14}$$

будетъ очевидно коническое сѣченіе, коего ассимптоты будутъ $A_1=0$ и $A_2=0$.

Гипербола $xy=k^2$ есть частный случай предъидущаго уравненія.

Примѣръ. Уравненіе параболы $y^2=2px$, есть частный случай уравненія:

$$A^2_1=\lambda A_2 C$$

слѣдовательно $x=0$ и $C=0$ суть касательныя, а $y=0$ хорда соприкосновенія, т. е. одна изъ касательныхъ къ параболѣ есть ось y, другая, прямая на безконечности, а ось x, есть хорда соприкосновенія.

Такъ какъ самая общая форма параболы есть:

$$(\alpha x+\beta y)^2+2gx+2cx+f=0$$

то изъ этого заключаемъ, что всѣ параболы касаются безконечно удаленной прямой (§ 232).

§ 348. Уравненіе коническаго сѣченія:

$$f-\lambda k A_3=0 \quad \text{или} \quad f-\lambda A_3 C=0$$

представляетъ систему коническихъ сѣченій, которыя пересѣкаются въ двухъ конечныхъ точкахъ, гдѣ прямая $A_3=0$ пересѣкаетъ коническое сѣченіе $f=0$, и въ двухъ безконечно-удаленныхъ точкахъ на прямой $C=0$.

Но коэфиціенты при x^2, xy и y^2 въ уравненіяхъ:

$$f=0 \quad , \quad f-\lambda A_3=0$$

равны, слѣдовательно эти кривыя подобны и подобно расположены (§ 288). Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Два подобныя и подобно расположенныя коническія сѣченія пересѣкаются въ двухъ безконечно-удаленныхъ точкахъ, а слѣдовательно пересѣкаться могутъ только въ двухъ конечныхъ точкахъ.

Если коническія сѣченія суть параболы, то онѣ обѣ касаются прямой на безконечности (§ 232), но такъ какъ направленіе къ точкѣ касанія дается только тремя первыми членами уравненія, слѣдовательно будетъ для обѣихъ параболъ одно и тоже, откуда заключаемъ, что двѣ подобныя и подобно расположенныя параболы касаются въ безконечно-удаленной точкѣ. Общія безконечно удаленныя точки, подобныхъ и подобно расположенныхъ коническихъ сѣченій, будутъ дѣйствительныя, совпадающія или мнимыя, смотря потому будетъ-ли коническое сѣченіе гипербола, парабола и эллипсъ.

§ 349. Уравненіе $f-\lambda k=0$ *или* $f-\lambda C^2=0$ представляетъ коническое сѣченіе, которое, очевидно, не только подобно и подобно распо-

ложено коническому сѣченію $f=0$, но и концентрическое съ нимъ. Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

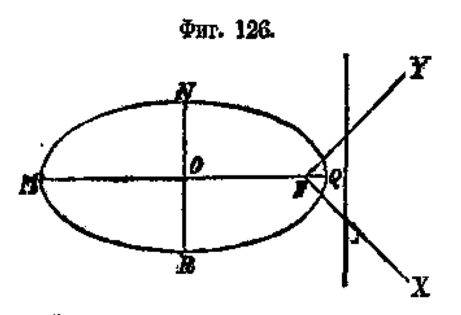
Предложеніе. Два подобныя и концентрическія коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе въ двухъ точкахъ на безконечно удаленной прямой, поэтому не могутъ пересѣкатся въ конечныхъ точкахъ.

§ 350. Разсмотримъ еще уравненіе:

$$x^2+y^2=e^2A^2_1 \tag{15}$$

гдѣ $x=0$, $y=0$ суть перпендикулярныя координатныя оси, а $A_1=0$ уравненіе прямой въ нормальной формѣ. Очевидно, что это уравненіе коническаго сѣченія, коего фокусъ находится въ началѣ координатъ, а директриса есть $A_1=0$ (фиг. 126).

Фиг. 126.



Изъ формы этого уравненія видимъ, что координатныя оси и директриса образуютъ полярный треугольникъ, коего вершины суть: фокусъ и точки пересѣченія директрисы съ координатными осями. Изъ этого видимъ, что поляра каждой точки на директрисѣ перпендикулярна къ прямой, проходящей чрезъ фокусъ и точку на директрисѣ.

Изъ формы уравненія (15) видимъ, что мнимыя прямыя:

$$y-xi=0 \quad , \quad y+xi=0 \tag{16}$$

суть касательныя, проведенныя изъ фокуса къ коническому сѣченію. Такъ какъ эти прямыя не зависятъ отъ директрисы, то заключаемъ, *что всѣ коническія сѣченія, имѣющія общій фокусъ имѣютъ и двѣ общія касательныя, проходящія черезъ этотъ фокусъ.* Слѣдовательно всѣ коническія сѣченія, имѣющія общіе оба фокуса, имѣютъ четыре общія касательныя, а потому могутъ быть разсматриваемы какъ вписанныя въ одинъ и тотъ же четыреугольникъ. Эти касательныя суть тѣ прямыя, которыя идутъ изъ фокуса къ циклическимъ точкамъ на безконечно удаленной прямой (§ 306). Изъ этого составляемъ слѣдующее представленіе о фокусахъ: изъ каждой циклической точки на кругѣ проведено двѣ касательныя къ коническому сѣченію, которыя образуютъ четыреугольникъ, двѣ вершины котораго суть фокусы кривой, а двѣ другія могутъ быть разсматриваемы, какъ ея мнимые фокусы.

§ 351. *Задача.* Найти условіе касанія двухъ коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$?

Рѣшеніе. Пусть p_1, p_2, p_3, p_4 (фиг. 124) будутъ четыре точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій. Если изъ этихъ точекъ, напримѣръ p_1 и p_4, совпадутъ, то очевидно, что пара хордъ p_1p_3, p_4p_2 совпадетъ съ парою хордъ p_1p_2 и p_3p_4, слѣдовательно кубическое уравненіе:

$$\Delta_1\lambda^3 - Q_1\lambda^2 + Q\lambda - \Delta = 0 \tag{17}$$

будетъ имѣть два равные корня; а изъ алгебраическаго анализа извѣстно, что въ такомъ случаѣ призначная (discriminent), единственный инваріантъ кубическаго уравненія и одинъ изъ инваріантовъ двухъ коническихъ сѣченій, равна нулю, именно:

$$Q^2Q^2_1 + 18\,\Delta\Delta_1\,QQ_1 - 27\,\Delta^2\Delta^2_1 - 4\Delta Q^3_1 - 4\,\Delta_1 Q^3 = 0 \tag{18}$$

или:

$$(QQ_1 - 9\Delta\,\Delta_1)^2 = 4\,(Q^2 - 3\Delta Q_1)(Q^2_1 - 3\,\Delta_1 Q) \tag{19}$$

Извѣстно, что призначная (19) пропорціональна произведенію квадратовъ равностей корней кубическаго уравненія (17) и если призначная (18) есть величина положительная, то всѣ три корня уравненія (17) дѣйствительные, а если она есть величина отрицательная, то два изъ трехъ корней мнимы. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ коническія сѣченія $f=0$ и $f_1=0$ пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ и двухъ мнимыхъ точкахъ. Въ первомъ же случаѣ, онѣ пересѣкаются въ четырехъ дѣйствительныхъ или четырехъ мнимыхъ точкахъ. Для отличія этихъ двухъ случаевъ простаго признака не существуетъ.

Если три точки p_1, p_4, p_3 пересѣченія совпадутъ, то коническія сѣченія въ этой тройной точкѣ имѣютъ общую касательную и общій радіусъ кривизны.

Въ этомъ случаѣ всѣ три корня уравненія (17) равны, т. е. оно есть полный кубъ, для чего необходимо имѣть:

$$\frac{3\Delta}{Q} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q_1}{3\Delta_1} \tag{20}$$

Условіе для двойнаго соприкосновенія двухъ коническихъ сѣченій будетъ показано ниже.

Пр. 1. Найти предъидущимъ способомъ условіе касанія двухъ круговъ?

Рѣшеніе. Составляя условіе, при которомъ уравненіе (§ 346, пр. 4):

$$r^2_1\lambda^2 + (d^2 - r^2 - r^2_1)\,\lambda + r^2 = 0$$

имѣетъ равные корни, это условіе дастъ:

$$d^2 = r^2 + r^2_1 \pm 2rr_1 \quad , \quad d = r \pm r_1$$

какъ извѣстно изъ элементарной геометріи.

Пр. 2. Найти условія касанія коническихъ сѣченій, когда онѣ даны въ трехчленной формѣ?

Рѣшеніе. Для уравненій:

$$a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3=0 \quad , \quad \sqrt{ax_1}+\sqrt{bx_2}+\sqrt{cx_3}=0$$

Отв.

$$\sqrt{aa_{23}}+\sqrt{ba_{13}}+\sqrt{ca_{12}}=0$$

Для уравненій:

$$a_{11}x^2_1+a_{22}x^2_2+a_{33}x^2_3=0 \quad , \quad \sqrt{ax_1}+\sqrt{bx_2}+\sqrt{cx_3}=0$$

Отв.

$$\left(\frac{a^2}{a_{11}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{b^2}{a_{22}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{c^2}{a_{33}}\right)^{\frac{1}{3}}=0$$

Для уравненій:

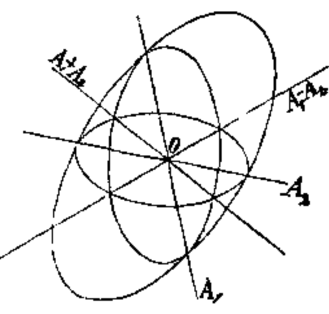
$$a_{11}x^2_1+a_{22}x^2_2+a_{33}x^2_3=0 \quad , \quad a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3=0$$

Отв.

$$(a_{11}a_{23}^2)^{\frac{1}{3}}+(a_{22}a_{13}^2)^{\frac{1}{3}}+(a_{33}a_{12}^2)^{\frac{1}{3}}=0$$

§ 352. Если два коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе съ третьимъ (фиг. 127), то ихъ уравненія будутъ имѣть форму:

$$f+A^2_1=0 \quad , \quad f+A^2_2=0 \qquad (21)$$



Фиг. 127.

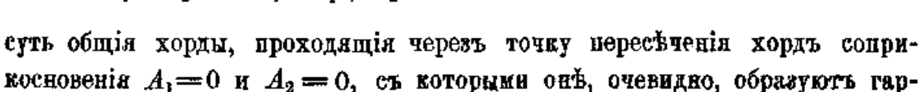
$A_1=0$ и $A_2=0$ суть хорды соприкосновенія коническихъ сѣченій (21) съ $f=0$.

Если вычтемъ уравненія (21), то найдемъ:

$$A^2_1-A^2_2=0$$

откуда

$$A_1-A_2=0 \quad , \quad A_1+A_2=0$$


суть общія хорды, проходящія черезъ точку пересѣченія хордъ соприкосновенія $A_1=0$ и $A_2=0$, съ которыми онѣ, очевидно, образуютъ гармоническую связку.

Пр. 1. Хорды соприкосновенія двухъ коническихъ сѣченій съ общими касательными проходятъ чрезъ пересѣченіе пары ихъ общихъ хордъ. Это предложеніе есть частный случай предъидущаго, полагая въ немъ, что коническое сѣченіе f распадается на двѣ прямыя линіи.

Пр. 2. Діагонали какого-нибудь вписаннаго и соотвѣтствующаго описаннаго четыреугольника около коническаго сѣченія пересѣкаются въ одной точки и образуютъ гармоническую связку. Это предложеніе есть также частный случай предъидущаго, полагая въ немъ, что коническія сѣченія $f+A^2_1$, $f+A_2^2$ распадаются, каждое, на пару прямыхъ линій. Впрочемъ это можно показать слѣдующимъ образомъ: пусть t_1, t_2, c_1; t_3, t_4, c_2 будутъ двѣ пары касательныхъ и соотвѣтствующія хорды соприкосновенія, другими словами c_1 и c_2 суть діагонали соотвѣтствующаго вписаннаго че-

тыреугольника. Слѣдовательно уравненіе коническаго сѣченія f можетъ быть написанно въ формахъ:

$$t_1t_2 - c_1{}^2 = 0 \quad , \quad t_3t_4 - c^2{}_2 = 0$$

Вторая форма должна быть тождественна съ первой или отличается отъ нея только постояннымъ множителемъ. Слѣдовательно $t_1t_2 - \lambda t_3t_4$ должно быть тождественно съ $c_1{}^2 - \lambda c^2{}_2$. Но $c^2{}_1 - \lambda c^2{}_2$ есть пара прямыхъ линій, проходящихъ чрезъ точки пересѣченія $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$ и гармоническихъ съ ними, а тождественная форма $t_1t_2 - \lambda t_3t_4 = 0$ показываетъ, что эти прямыя линіи проходятъ чрезъ точки t_1t_3, t_2t_4 и t_1t_4, t_2t_3, такъ какъ $t_1t_2 - \lambda t_3t_4$ есть геометрическое мѣсто проходящее чрезъ эти точки.

§ 353. Если три коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то ихъ уравненія будутъ:

$$f + A^2{}_1 = 0 \quad , \quad f + A^2{}_2 = 0 \quad , \quad f + A^2{}_3 = 0 \tag{22}$$

вычитая попарно, найдемъ уравненія общихъ хордъ:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - A_3 = 0 \quad , \quad A_2 - A_3 = 0$$

$$A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_3 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0$$

Изъ этихъ уравненій видно, что слѣдующія общія хорды пересѣкаются по три въ одной точкѣ:

$$\begin{array}{lll} A_1 - A_2 = 0 \quad , & A_1 - A_3 = 0 \quad , & A_2 - A_3 = 0 \\ A_1 + A_2 = 0 \quad , & A_1 + A_3 = 0 \quad , & A_2 - A_3 = 0 \\ A_1 + A_2 = 0 \quad , & A_1 - A_3 = 0 \quad , & A_2 + A_3 = 0 \\ A_1 - A_2 = 0 \quad , & A_1 + A_3 = 0 \quad , & A_2 + A_3 = 0 \end{array} \tag{23}$$

Полагая, что нѣкоторыя изъ коническихъ сѣченій (22) распадаются на линейные множители, а также и f, получимъ весьма замѣчательныя предложенія.

1. Положимъ, что коническое сѣченіе f распадается на два линейные множителя, то эти множители суть общія касательныя къ коническимъ сѣченіямъ:

$$f + A^2{}_2 = 0 \quad , \quad f + A^2{}_3 = 0$$

Если при этомъ $A_1 = 0$ есть прямая, проходящая черезъ пересѣченіе общихъ касательныхъ, то коническое сѣченіе:

$$f + A^2{}_1 = 0$$

распадается также на линейные множители и представляетъ пару прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія общихъ касательныхъ. Изъ этого вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если черезъ точку пересѣченія общихъ касательныхъ двухъ коническихъ сѣченій проведемъ, какую-нибудь, пару прямыхъ линій, то общія хорды каждаго изъ коническихъ сѣченій съ этими прямыми пересѣкаются на одной изъ общихъ хордъ двухъ коническихъ сѣченій.

Слѣдствіе. Касательныя, проведенныя черезъ точки встрѣчи съ сѣкущей, пересѣкаются на общей хордѣ коническихъ сѣченій.

2. Положимъ, что всѣ три коническія сѣченія.

$$f+A^2_1=0 \quad , \quad f+A^2_2=0 \quad , \quad f+A^2_3=0$$

распадаются на линейные множители, въ этомъ случаѣ, это суть три пары касательныхъ, образующихъ шестиугольникъ, въ который вписано коническое сѣченіе $f=0$.

Соображаясь съ предъидущимъ предложеніемъ, будемъ имѣть знаменитую теорему Бріаншона.

Предложеніе Бріаншона. Три противуположныя діагонали, описаннаго около коническаго сѣченія шестиугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если стороны шестиугольника означимъ черезъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, то прямыя, соединяющія вершины (1, 2) съ (4, 5), (2, 3) съ (5, 6), (3, 4) съ (6, 1) будутъ противуположныя діагонали.

3. Если три коническія сѣченія имѣютъ общую хорду, то ихъ уравненія будутъ:

$$f=0 \quad , \quad f+A_1A_2=0 \quad , \quad f+A_1A_3=0$$

вычитая два послѣднія, найдемъ:

$$A_1(A_2-A_3)=0$$

Изъ этого видимъ, что три остальныя общія хорды $A_2=0$, $A_3=0$, $A_2-A_3=0$ пересѣкаются въ одной точкѣ.

Это свойство можетъ быть выражено еще слѣдующимъ образомъ. Общія хорды системы коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре данныя точки, съ даннымъ коническимъ сѣченіемъ, проходящимъ черезъ двѣ изъ данныхъ точекъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

§ 354. *Предложеніе Паскаля.* Три точки пересѣченія, противуположныхъ сторонъ вписаннаго въ коническое сѣченіе шестиугольника, лежатъ на одной прямой линіи.

Доказательство. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 будутъ вершины шестиугольника; пусть $a_r a_s = 0$ означаетъ уравненіе прямой, проходящей черезъ вершины a_r и a_s.

Такъ какъ коническое сѣченіе описано около шестиугольника, то его уравненіе можетъ быть написано въ формѣ (§ 299):

$$a_1 a_2 . a_3 a_4 - a_2 a_3 . a_1 a_4 = 0 \tag{24}$$

но такъ какъ то же коническое сѣченіе описано и около четыреугольника $a_4 a_5 a_6 a_1$, то его уравненіе можетъ быть написано и въ формѣ:

$$a_4 a_5 . a_6 a_1 - a_5 a_6 . a_1 a_4 = 0 \tag{25}$$

Такъ какъ эти уравненія должны быть тождественны, то имѣетъ:

$$a_1 a_2 . a_3 a_4 - a_4 a_5 . a_6 a_1 = (a_2 a_3 - a_5 a_6)\, a_1 a_4 \tag{26}$$

Вторая часть этого уравненія разлагается на два множителя, а такъ какъ первая есть коническое сѣченіе, описанное около четыреугольника, коего стороны суть $a_1 a_2$, $a_3 a_4$; $a_6 a_1$, $a_4 a_5$, то, очевидно, два множителя второй части суть діагонали этого четыреугольника. Но $a_1 a_4$ есть діагональ, проходящая черезъ вершины a_1 и a_4, слѣдовательно $a_2 a_3 - a_5 a_6$ есть другая діагональ, которая должна соединять точки пересѣченія сторонъ $a_1 a_2$ и $a_4 a_5$; $a_3 a_4$ и $a_1 a_6$. Изъ формы этой діагонали видно, что она проходитъ и черезъ точку пересѣченія прямыхъ $a_2 a_3$ и $a_5 a_6$, слѣдовательно три точки:

$$(a_1 a_2,\ a_4 a_5) \quad ; \quad (a_3 a_4,\ a_1 a_6) \quad \text{и} \quad (a_2 a_3,\ a_5 a_5)$$

лежатъ на одной прямой линіи: $a_2 a_3 - a_5 a_6 = 0$.

Подобныя предложенія получаемъ относительно тѣхъ же шести точекъ, если ихъ будемъ брать въ различныхъ порядкахъ. Такъ напримѣръ, коническое сѣченіе описано около четыреугольника $a_2 a_3 a_5 a_6$, слѣдовательно его уравненіе будетъ:

$$a_2 a_5 . a_3 a_6 - a_2 a_3 . a_5 a_6 = 0 \tag{27}$$

но это выраженіе должно быть тождественно съ выраженіемъ (24), откуда:

$$a_1 a_2 . a_3 a_4 - a_2 a_5 . a_3 a_6 = (a_1 a_4 - a_5 a_6)\, a_2 a_3$$

изъ этого уравненія слѣдуетъ, какъ выше, что три точки:

$$(a_1a_2, a_3a_6) \quad ; \quad (a_3a_4, a_2a_5) \quad ; \quad (a_1a_4, a_5a_6)$$

лежатъ на одной прямой:

$$a_1a_4 - a_5a_6 = 0$$

Точно также, приравнивая формы (25) и (27) коническаго сѣченія, найдемъ, что три точки:

$$(a_4a_5, a_3a_6) \quad ; \quad (a_6a_1, a_2a_5) \quad ; \quad (a_1a_4, a_3a_5)$$

лежатъ на одной прямой линіи:

$$a_2a_3 - a_1a_4 = 0$$

но три прямыя:

$$a_2a_3 - a_5a_6 = 0 \quad , \quad a_5a_6 - a_1a_4 = 0 \quad , \quad a_1a_4 - a_2a_5 = 0$$

пересѣкаются въ одной точкѣ, слѣдовательно три Паскалевы линіи, которыя получили, взявъ вершины шестиугольника въ порядкахъ:

$$a_1a_3a_2a_4a_5a_6 \quad ; \quad a_1a_4a_3a_6a_5a_3 \quad ; \quad a_1a_6a_3a_2a_5a_4$$

пересѣкаются въ одной точкѣ—это извѣстное *предложеніе Штейнера.*

Соотвѣтствующія предложенія можно получить и относительно предложенія Бріаншона.

§ 355. На основаніи предложенія Паскаля, по даннымъ пяти точкамъ a, b, c, d, e, можно построить коническое сѣченіе, т. е. можно построить какое угодно число точекъ, которыя будутъ находится на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ пять данныхъ точекъ

Проведемъ черезъ точку a, какую-нибудь, прямую ap; мы можемъ построить точку f, въ которой прямая ap пересѣкаетъ еще разъ коническое сѣченіе, слѣдовательно, такимъ образомъ, можемъ построить, какое угодно число точекъ на коническомъ сѣченіи. По теоремѣ Паскаля точки пересѣченія (ab, de), (bc, ef), (cd, af) лежатъ на одной прямой линіи, но точки (ab, de) или O, (cd, af) или p, извѣстны; проведемъ прямую pO, которая пересѣчетъ cb въ точкѣ q, наконецъ прямая qe пересѣчетъ ab въ точкѣ f на коническомъ сѣченіи.

Примѣръ. По даннымъ пяти точкамъ на коническомъ сѣченіи найти его центръ.

Рѣшеніе. Проведемъ $ap \parallel bc$ и опредѣлимъ точку f Отрѣзки af и bc будутъ хорды, а прямая проходящая чрезъ ихъ средины будетъ діаметръ. Проведя $qe \parallel dc$ легко найдемъ, точно также, другой діаметръ, а слѣдовательно искомый центръ.

Уравненіе коническаго сѣченія отнесеннаго къ двумъ касательнымъ и къ хордѣ ихъ соприкосновенія.

§ 356. Мы видѣли въ § 300, что если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

суть уравненія прямыхъ въ нормальной формѣ, то уравненіе:

$$A_1 A_2 = A^2_3 \tag{28}$$

есть коническое сѣченіе, въ которомъ $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ суть касательныя, а $A_3 = 0$ ихъ хорда соприкосновенія.

Если:

$$\mu A_1 = A_3$$

есть прямая, проходящая черезъ, какую-нибудь, точку коническаго сѣченія, которую назовемъ черезъ μ и точку $(A_1 A_3)$, то изъ этого уравненія и изъ уравненія (28), найдемъ:

$$A_3 = \mu A_3 \quad \text{и} \quad \mu^2 A_1 = A_2$$

это суть прямыя, соединяющія точку μ съ точками $(A_2 A_3)$ и $(A_1 A_2)$. Два какія-нибудь изъ трехъ уравненій:

$$\mu A_1 = A_3 \quad , \quad A_2 = \mu A_3 \quad , \quad \mu^2 A_1 = A_2 \tag{29}$$

опредѣляютъ точку на коническомъ сѣченіи.

Легко видѣть, что уравненіе хорды, соединяющей точки μ и μ' на коническомъ сѣченіи будетъ:

$$\mu\mu' A_1 - (\mu + \mu') A_3 + A_2 = 0 \tag{30}$$

Если точки μ, μ' совпадутъ, то уравненіе (30) будетъ касательная въ точкѣ μ:

$$\mu^2 A_1 - 2\mu A_3 + A_2 = 0 \tag{31}$$

Обратно, если уравненіе прямой, какъ (31) содержитъ неопредѣленный коэфиціентъ μ во второй степени, то прямая будетъ всегда касаться коническаго сѣченія $A_1 A_2 = A^2_3$.

§ 357. *Задача.* Найти уравненіе поляры данной точки?

Рѣшеніе. Если въ уравненіе касательной, проходящей черезъ полюсъ, поставимъ его координаты, то уравненіе (31) сдѣлается:

$$\mu^2 A'_1 - 2\mu A'_3 + A'_2 = 0 \tag{32}$$

гдѣ A'_1, A'_2, A'_3 суть значенія A_1, A_2, A_3, когда въ нихъ подставимъ координаты полюса; но въ точкѣ касанія имѣемъ:

$$\mu^2 = \frac{A_2}{A_1} \quad , \quad \mu = \frac{A_3}{A_1}$$

подставляя въ (32), найдемъ:

$$A_1 A'_2 - 2A_3 A'_3 + A_2 A'_1 = 0 \tag{33}$$

Если полюсъ будетъ данъ пересѣченіемъ прямыхъ:

$$aA_1 = A_3 \quad , \quad bA_3 = A_2$$

то уравненіе поляры будетъ:

$$abA_1 - 2aA_3 + A_2 = 0 \tag{34}$$

§ 358. Замѣтимъ, что если между уравненіями:

$$\mu^2 A_1 - 2\mu A_3 + A_2 = 0 \quad , \quad \mu'^2 A_1 - 2\mu' A_3 + A_2 = 0 \tag{35}$$

исключимъ A_3, то найдемъ уравненіе:

$$\mu\mu' A_1 = A_2$$

прямой, соединяющей точку пересѣченія касательныхъ (35) съ точкою $(A_1 A_2)$. Слѣдовательно, если намъ дано произведеніе $\mu\mu' = a$, то геометрическое мѣсто точки пересѣченія касательныхъ (35) будетъ прямая линія:

$$aA_1 = A_2$$

Если въ уравненіи хорды (30) подставимъ вмѣсто $\mu\mu' = a$, то легко видѣть, что геометрическое мѣсто такихъ хордъ будетъ точка:

$$aA_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

Такъ какъ уравненіе прямой, соединяющей точку μ съ точкою $(A_1 A_2)$, есть $\mu^2 A_1 = A_2$, то точки μ и $-\mu$ лежатъ на прямой, проходящей черезъ точку $(A_1 A_2)$.

Если уравненія двухъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ общими касательными $A_1=0$, $A_2=0$, будутъ:

$$A_1A_2=A_3^2 \quad , \quad A_1A_2=A_4^2$$

то такъ какъ прямая $\mu^2A_1=A_2$ несодержитъ A_3 и A_4, то прямая, соединяющая точку $+\mu$, на одномъ изъ коническихъ сѣченій съ одною изъ точекъ $\pm\mu$ на другомъ, проходитъ черезъ точку (A_1A_2).

Говорятъ, что точка $+\mu$ на одномъ коническомъ сѣченіи соотвѣтствуетъ прямо точкѣ $+\mu$ на другомъ, и обратно, на другомъ точкѣ $-\mu$. Мы будемъ называть *соотвѣтственными хордами* хорды, соединяющія соотвѣтственныя точки.

Пр. 1. Соотвѣтствующія хорды двухъ коническихъ сѣченій пересѣкаются на одной изъ общихъ хордъ съ коническимъ сѣченіемъ. Въ самомъ дѣлѣ, коническія сѣченія:

$$A_1A_2=A_3^2 \quad , \quad A_1A_2=A_4^2$$

имѣютъ общими хордами пару прямыхъ:

$$A_3-A_4=0 \quad , \quad A_3+A_4=0$$

Но хорды (30):

$$\mu\mu' A_1-(\mu+\mu')A_4+A_2=0 \quad , \quad \mu\mu' A_1-(\mu+\mu')A_3+A_2=0$$

очевидно пересѣкаются на общей хордѣ $A_3-A_4=0$.

Если во второмъ изъ предъидущихъ уравненій перемѣнимъ знаки при μ и μ', то эти хорды пересѣкутся на общей хордѣ $A_3+A_4=0$.

Пр. 2. Двѣ вершины, описаннаго около коническаго сѣченія, треугольника скользятъ по даннымъ двумъ прямымъ, найти геометрическое мѣсто третей вершины?

Рѣшеніе. Отнесемъ коническое сѣченіе къ двумъ касательнымъ, проведеннымъ къ коническому сѣченію чрезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ, и къ ихъ хордѣ соприкосновенія. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$aA_1-A_2=0 \quad , \quad bA_1-A_2=0$$

а коническое сѣченіе:

$$A_1A_2=A_3^2$$

Мы выше показали, что двѣ касательныя, пересѣкающіяся на прямой $aA_1-A_2=0$, будутъ имѣть произведеніе $\mu\mu'=a$, слѣдовательно если одна изъ сторонъ треугольника касается коническаго сѣченія въ точкѣ μ, то другія будутъ касаться въ точкахъ $\frac{a}{\mu}$ и $\frac{b}{\mu}$ и ихъ уравненія будутъ:

$$\frac{a^2}{\mu^2}A_1-2\frac{a}{\mu}A_3+A_2=0 \quad , \quad \frac{b^2}{\mu^2}A_1-2\frac{b}{\mu}A_3+A_2=0$$

исключая μ, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$A_1A_2=\frac{4ab}{(a+b)^2}A_3^2$$

Очевидно это есть коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ даннымъ.

Пр. 3. Найти обвертку основанія треугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, коего двѣ стороны проходятъ черезъ двѣ данныя точки?

Рѣшеніе: Возьмемъ прямую, соединяющую данныя двѣ точки за A_3, а уравненіе коническаго сѣченія пусть будетъ:

$$A_1 A_2 = A_3^2$$

пусть прямыя, соединяющія данныя точки съ точкою $(A_1 A_2)$, будутъ:

$$aA_1 = A_2 \quad , \quad bA_1 = A_2$$

Мы выше показали, что если точки пересѣченія какой-нибудь хорды, проходящей черезъ точку $(aA_1 - A_2, A_3)$ суть μ' и μ'', то означая черезъ μ вершину треугольника, вершины угловъ основанія будутъ $\mu\mu' = a$, $\mu\mu'' = b$, откуда:

$$\mu' = \frac{a}{\mu} \quad , \quad \mu'' = \frac{b}{\mu}$$

Слѣдовательно уравненіе основанія будетъ:

$$abA_1 - (a+b)\mu A_3 + \mu^2 A_2 = 0$$

хорда, которая есть обвертка (§ 356) коническаго сѣченія:

$$A_1 A_2 = \frac{(a+b)^2}{4\,ab} A_3^2$$

Это коническое сѣченіе имѣетъ двойное соприкосновеніе съ прямыми $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, а $A_3 = 0$ есть хорда соприкосновенія.

Пр. 4. Вписать въ данное коническое сѣченіе треугольникъ, котораго бы три стороны проходили черезъ три данныя точки?

Рѣшеніе. Если двѣ изъ данныхъ точекъ возьмемъ, какъ въ предъидущемъ примѣрѣ, то уравненіе основанія искомаго треугольника будетъ:

$$abA_1 - (a+b)\mu A_3 + \mu^2 A_2 = 0$$

Если эта прямая проходитъ черезъ точку:

$$a'A_1 - A_3 = 0 \quad , \quad b'A_3 - A_2 = 0$$

то должны имѣть:

$$ab - (a+b)a'\mu + a'b'\mu^2 = 0$$

уравненіе, изъ котораго можно опредѣлить μ.

Но въ точкѣ μ имѣемъ:

$$\mu A_1 = A_3 \quad , \quad \mu^2 A_1 = A_2$$

Слѣдовательно координаты этой точки должны удовлетворять уравненіе:

$$abA_1 - (a+b)a'A_3 + a'b'A_2 = 0$$

Задача, очевидно, имѣетъ два рѣшенія, такъ какъ каждая изъ точекъ пересѣченія, предъидущей прямой съ коническимъ сѣченіемъ, можетъ быть взята за вершину искомаго треугольника.

Пр. 5. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего основаніе касается даннаго коническаго сѣченія, вершины при основаніи скользятъ по двумъ касательнымъ, а стороны проходятъ черезъ двѣ данныя точки?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе коническаго сѣченія будетъ:

$$A_1 A_2 = A^2_3 \tag{36}$$

Очевидно координаты A_1, A_3, A_2 точки пересѣченія прямой $A_1 = 0$, съ какою-нибудь касательною:

$$\mu^2 A_1 - 2\mu A_3 + A_2 = 0 \tag{37}$$

будутъ пропорціональны количествамъ 0, 1, 2μ, слѣдовательно уравненіе прямой, соединяющей эту точку съ точкою данною координатами A'_1, A'_3, A'_2, будетъ:

$$A_1 A'_2 - A'_1 A_2 = 2\mu(A_1 A'_3 - A'_1 A_3) \tag{38}$$

Точно также уравненіе прямой, соединяющей данную координатами A''_1, A''_3, A''_2 точку съ точкою $(2, \mu, 0)$, которая есть пересѣченіе прямой $A_2 = 0$ съ тою-же касательной (37), есть:

$$2(A_2'' A_3 - A_3'' A_2) = \mu(A_2'' A_1 - A_1'' A_2) \tag{39}$$

Исключая μ изъ уравненій (38) и (39), найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$(A'_2 A_1 - A'_1 A_2)(A''_2 A_1 - A''_1 A_2) = 4(A'_3 A_1 - A'_1 A_3)(A''_2 A_3 - A''_3 A_2)$$

которое есть коническое сѣченіе, очевидно, проходящее черезъ двѣ данныя точки.

§ 358. **Хорда, соединяющая точки $\mu \operatorname{tg}\varphi$ и $\mu \operatorname{cotg}\varphi$, гдѣ φ есть постоянный уголъ, всегда касается коническаго сѣченія, имѣющаго двойное соприкосновеніе съ даннымъ.**

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе хорды есть:

$$\mu^2 A_1 - \mu A_3(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi) + A_2 = 0$$

и такъ какъ:

$$\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{cotg}\varphi = 2\operatorname{cosec} 2\varphi$$

то обвертка этой хорды (§ 356) есть коническое сѣченіе:

$$A_1 A_2 = A^2_3 \operatorname{cosec}^2 2\varphi$$

Легко можно показать, что геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ къ коническому сѣченію въ точкахъ $\mu \operatorname{tg}\varphi$, $\mu \operatorname{cotg}\varphi$, есть:

$$A_1 A_2 = A^2_3 \sin^2 2\varphi$$

Примѣръ. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего основаніе касается даннаго коническаго сѣченія; вершины при основаніи скользятъ по данному коническому сѣченію, имѣющему двойное соприкосновеніе съ даннымъ, а стороны проходятъ черезъ двѣ данныя точки?

Рѣшеніе. Пусть данныя коническія сѣченія будутъ:

$$A_1 A_2 = A^2_3 \quad , \quad A_1 A_2 = A^2_3 \operatorname{cosec}^2 2\varphi$$

Слѣдовательно изъ предъидущаго слѣдуетъ, что если, какая-нибудь, прямая касается втораго коническаго сѣченія въ точкѣ μ, то она пересѣкаетъ первое въ точкахъ $\mu \operatorname{tg} \varphi$ и $\mu \operatorname{cotg} \varphi$.

Если μ' и μ'' суть данныя точки, то уравненія сторонъ будутъ:

$$\mu\mu' \operatorname{tg} \varphi . A_1 \quad (\mu' + \mu \operatorname{tg} \varphi) A_3 + A_2 = 0$$

$$\mu\mu'' \operatorname{tg} \varphi . A_1 - (\mu'' + \mu \operatorname{tg} \varphi) A_3 + A_2 = 0$$

исключая μ, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$(A_2 - \mu' A_3)(\mu'' A_1 - A_3) = \operatorname{tg}^2\varphi (A_2 - \mu'' A_3)(\mu' A_1 - A_3)$$

§ 359. *Предложеніе.* Ангармоническое отношеніе связки, соединяющей четыре данныя точки на коническомъ сѣченіи съ какою-нибудь пятою, есть величина постоянная.

Доказательство. Пусть данныя четыре точки будутъ μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, а пятая μ. Пусть уравненіе коническаго сѣченія будетъ:

$$A_1 A_2 = A_3^2$$

Уравненія прямыхъ, соединяющихъ четыре точки съ пятою, суть:

$$\mu\mu_1 A_1 - (\mu + \mu_1) A_3 + A_2 = 0 \quad , \quad \mu\mu_2 A_1 - (\mu + \mu_2) A_3 + A_2 = 0$$

$$\mu\mu_3 A_1 - (\mu + \mu_3) A_3 + A_2 = 0 \quad , \quad \mu\mu_4 A_1 - (\mu + \mu_4) A_3 + A_2 = 0$$

эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$\mu_1 (\mu A_1 - A_3) + (A_2 - \mu A_3) = 0 \quad , \quad \mu_2 (\mu A_1 - A_3) + (A_2 - \mu A_3) = 0$$

$$\mu_3 (\mu A_1 - A_3) + (A_2 - \mu A_3) = 0 \quad , \quad \mu_4 (\mu A_1 - A_3) + (A_2 - \mu A_3) = 0$$

коихъ ангармоническое отношеніе, есть:

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_3 - \mu_4}$$

какъ видно величина независящая отъ μ, а слѣдовательно постоянная. Это предложеніе было уже доказано выше (§ 231, пред. 3).

§ 360. *Предложеніе.* Ангармоническое отношеніе ряда точекъ полученныхъ пересѣченіемъ четырехъ данныхъ касательныхъ къ коническому сѣченію, какою-нибудь, пятою есть величина постоянная.

Доказательство. Пусть уравненіе коническаго сѣченія будетъ:

$$A_1 A_2 = A_3^2$$

пусть μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 будутъ точки касанія четырехъ данныхъ касательныхъ, μ — пятой. Ангармоническое отношеніе четырехъ полученныхъ точекъ на пятой касательной, очевидно, равно ангармоническому отношенію связки, соединяющей эти точки съ точкою $(A_1 A_2)$. Но уравненія этихъ прямыхъ, какъ мы видѣли (§ 358), суть:

$$\mu\mu_1 A_1 = A_2 \quad , \quad \mu\mu_2 A_1 = A_2 \quad , \quad \mu\mu_3 A_1 = A_2 \quad , \quad \mu\mu_4 A_1 = A_2$$

слѣдовательно ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ равно ангармоническому отношенію этихъ прямыхъ, которое есть:

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4}$$

величина независимая отъ μ, слѣдовательно постоянная. Это предложеніе было уже доказано выше (§ 231).

§ 361. Выраженіе:

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_1 - \mu_4} : \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_4}$$

неизмѣняется, если измѣнимъ знаки при μ_1, μ_2 ....., слѣдовательно, если проведемъ черезъ точку $(A_1 A_2)$ четыре прямыя, то ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, въ которыхъ эти прямыя пересѣкаютъ коническое сѣченіе, будетъ равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ $-\mu_1$, $-\mu_2$, $-\mu_3$, $-\mu_4$, въ которыхъ эти прямыя еще разъ встрѣчаютъ коническое сѣченіе.

По той же причинѣ ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ, на одномъ коническомъ сѣченіи, равно ангармоническому отношенію четырехъ соотвѣтствующихъ точекъ, на другомъ.

Ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 не измѣняется, если μ помножимъ на $\operatorname{tg}\varphi$ или на $\operatorname{cotg}\varphi$, откуда будемъ имѣть *предложеніе Товсенда.*

Предложеніе. Если два коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе, то ангармоническое отношеніе точекъ касанія четырехъ касательныхъ къ одному изъ нихъ, равно ангармоническому отношенію четырехъ точекъ, въ которыхъ эти касательныя встрѣчаютъ другое и четырехъ точекъ, въ которыхъ эти касательныя встрѣчаютъ еще разъ коническое сѣченіе.

§ 362. *Предложеніе.* Если даны три хорды въ данномъ коническомъ сѣченіи aa_1, bb_1, cc_1 и четвертая хорда dd_1 такого свойства, что $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$, то она будетъ всегда касаться коническаго сѣченія, имѣющаго двойное соприкосновеніе съ даннымъ (предложеніе обратное предъидущему).

Доказательство. Если положимъ, что a, b, c и a_1, b_1, c_1 означаютъ величины μ для шести данныхъ точекъ, μ и μ' суть точки четвертой перемѣнной хорды, то будемъ имѣть:

$$\frac{(a-b)(c-\mu)}{(a-c)(b-\mu)} = \frac{(a_1-b_1)(c_1-\mu')}{(a_1-c_1)(b_1-\mu')}$$

откуда:

$$A\mu\mu' + B\mu + C\mu' + D = 0 \tag{40}$$

A, B, C, D суть извѣстныя постоянныя величины. Опредѣляя μ' изъ этого уравненія и подставляя въ уравненіе хорды:

$$\mu\mu A_1 - (\mu + \mu')A_3 + A_2 = 0$$

найдемъ:

$$\mu(B\mu + D)A_1 + A_3\{\mu(A\mu + C) - (B\mu + D)\} - A_2(A\mu + C) = 0$$

или

$$\mu^2(BA_1 + AA_3) + \mu\{DA_1 + (C - B)A_3 - AA_2\} - (DA_3 + CA_2) = 0$$

откуда обвертка этой хорды будетъ (§ 356):

$$\{DA_1 + (C - B)A_3 - AA_2\}^2 + 4(BA_1 + AA_3)(CA_2 + DA_3) = 0$$

уравненіе, которое можно написать въ формѣ:

$$4(BC - AD)(A_1A_2 - A^2_3) + \{DA_1 + (B + C)A_3 + AA_2\}^2 = 0$$

эта форма показываетъ, что это коническое сѣченіе имѣетъ двойное соприкосновеніе съ даннымъ.

Въ частномъ случаѣ, когда $B = C$, уравненіе (40) сдѣлается:

$$A\mu\mu' + B(\mu + \mu') + D = 0$$

которое показываетъ, что хорда:

$$\mu\mu' A_1 - (\mu + \mu')A_3 + A_2 = 0$$

проходитъ черезъ постоянную точку.

§ 363. Уравненіе коническаго сѣченія, отнесеннаго къ фокусу, какъ началу, коего директриса есть $A_1 = 0$, какъ видѣли выше (§ 350) есть:

$$x^2 + y^2 = e^2 A^2_1$$

его можно написать въ формѣ:

$$(eA_1 - x)(eA_1 + x) = y^2$$

откуда слѣдуетъ, что:

$$eA_1 - x = 0 \quad , \quad eA_1 + x = 0$$

суть касательныя къ коническому сѣченію изъ точки (x A_1) на директрисѣ.

Если кривая будетъ парабола, то $e=1$, а потому касательныя, проведенныя изъ какой-нибудь точки на директрисѣ, къ параболѣ, будутъ:

$$A_1 - x = 0 \quad , \quad A_1 + x = 0$$

Слѣдовательно, касательныя съ осью x и директрисой составляютъ гармоническую связку и такъ какъ изъ ихъ уравненій видно, что онѣ суть равнодѣлящія углы между x и A_1, то онѣ перпендикулярны. Слѣдовательно касательныя, проведенныя, изъ какой-нибудь точки на директрисѣ къ параболѣ, перпендикулярны.

§ 364. Если черезъ φ означимъ уголъ, который, какой-нибудь радіусъ векторъ, проведенный черезъ фокусъ, составляетъ съ осью x, то очевидно выраженія:

$$x = eA_1 \cos\varphi \quad , \quad y = eA_1 \sin\varphi$$

удовлетворяютъ уравненіе:

$$x^2 + y^2 = e^2 A^2_1$$

Если φ_1 и φ_2 суть углы, которые радіусы векторы, проведенные изъ фокуса коническаго сѣченія, къ концамъ данной хорды, образуютъ съ осью x, то ея уравненіе будетъ:

$$x \cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + y \sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = eA_1 \cos\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Если данная хорда перемѣщается такъ, что уголъ $\varphi_1 \quad \varphi_2$ остается постояннымъ, то обвертка этой хорды будетъ:

$$x^2 + y^2 = e^2 A^2_1 \cos^2\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

очевидно коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ даннымъ и общую съ нимъ директрису.

§ 365. Если уравненіе коническаго сѣченія будетъ:

$$x^2 + y^2 = e^2 A^2_1$$

то касательная къ нему въ точкѣ $x_1 = eA'_1 \sin\varphi_1$, $y_1 = eA'_1 \sin\varphi_1$ будетъ:

$$xx_1 + yy_1 = e^2 A'_1 A_1$$

гдѣ A'_1 есть A_1, въ которое подставленны координаты (x_1, y_1). Подставляя въ это уравненіе вмѣсто x_1, y_1 ихъ выраженія, найдемъ:

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - eA_1 = 0$$

касательная въ точкѣ:

$$x_2 = eA'_1 \cos\varphi_2 \quad , \quad y_2 = eA'_1 \sin\varphi_2$$

будетъ:

$$x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - eA_1 = 0$$

вычитая эти уравненія, найдемъ уравненіе:

$$x\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - y\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0 \tag{41}$$

которое есть прямая, соединяющая фокусъ съ пересѣченіемъ касательныхъ въ точкахъ (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Изъ уравненія этой прямой видимъ, что она составляетъ съ осью x, уголъ $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, а слѣдовательно дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами, проведенными къ точкамъ $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$.

Уравненіе прямой, проведенной изъ фокуса въ точку пересѣченія хорды соприкосновенія съ директрисой, очевидно, есть:

$$x\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + y\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$$

слѣдовательно перпендикулярна къ прямой (41).

§ 366. *Задача.* Найти геометрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ точкахъ, въ которыхъ радіусы, проведенные въ фокусъ, составляютъ даный уголъ 2δ.

Рѣшеніе. Пусть уравненія касательныхъ будутъ:

$$x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - eA_1 = 0$$

$$x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - eA_1 = 0$$

опредѣляя координаты точекъ пересѣченія, найдемъ:

$$x = eA_1 \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad , \quad y = eA_1 \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

если уголъ $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\delta$, то:

$$x = eA_1 \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos\delta} \quad , \quad y = eA_1 \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos\delta}$$

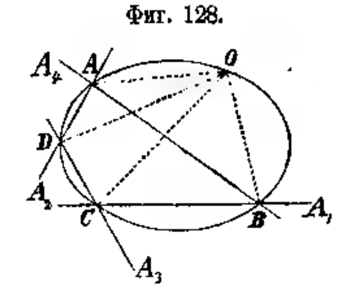
исключая изъ этихъ уравненій уголъ $\varphi_1 + \varphi_2$, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$(x^2 + y^2)\cos^2\delta = e^2 A_1^2$$

коническое сѣченіе, имѣющее одинъ фокусъ и директрису съ даннымъ, а эксцентриситетъ котораго есть $\frac{e}{\cos\delta}$.

§ 367. Ангармоническія свойства коническихъ сѣченій, выраженныя предложеніями § 359 и § 360, можно доказать еще слѣдующимъ образомъ.

Фиг. 128.



Уравненіе коническаго сѣченія, описаннаго около четыреугольника $ABCD$ (фиг. 128), коего стороны даны уравненіями:

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ A_4 = 0 \qquad (42)$$

въ нормальной формѣ, какъ мы видѣли (§ 299) есть:

$$A_1 A_2 - \lambda A_3 A_4 = 0 \qquad (43)$$

Если координаты, какой-нибудь точки O на коническомъ сѣченіи подставимъ въ уравненія (42), то A_1, A_2, A_3, A_4 будутъ выражать длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки O на прямыя (42); слѣдовательно, разсматривая треугольники BOC, AOD, AOB и COD, будемъ имѣть:

$$A_1 = \frac{BO\,.\,CO\sin BOC}{BC} \quad , \quad A_2 = \frac{AO\,.\,DO\,.\sin AOD}{AD} \, ,$$

$$A_3 = \frac{AO\,.\,BO\,.\sin AOB}{AB} \quad , \quad A_4 = \frac{CO\,.\,DO\,.\sin COD}{CD}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (43), найдемъ:

$$\frac{BO.CO.AO.DO.\sin BOC.\sin AOD}{BC\,.\,AD} = \lambda \frac{AO.BO.CO.DO.\sin AOB,\sin COD}{AB\,.\,CD}$$

откуда:

$$\frac{\sin BOC\,.\sin AOD}{\sin AOB\,.\sin COD} = \lambda \frac{AD\,.\,BC}{AB\,.\,CD} \qquad (44)$$

Первая часть этого уравненія выражаетъ ангармоническое отношеніе связки $(O\,.\,ABCD)$, а вторая часть остается постоянною, когда точка O скользитъ по коническому сѣченію, что и выражаетъ предложеніе § 359 (§ 231).

§ 368. Если

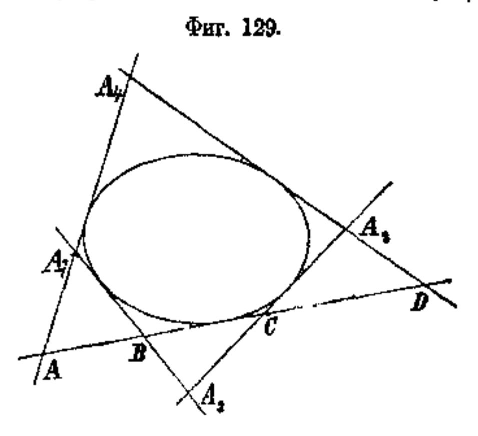
$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_3=(\quad , \quad A_4=0 \qquad (45)$$

будутъ уравненія точекъ въ нормальной формѣ то:

$$A_1A_2-\lambda A_3A_4= \qquad (46)$$

будетъ уравненіе коническаго сѣченія, вписаннаго въ четыреугольникъ $A_1A_3A_2A_4$ (фиг. 129). Уравненіе (46) выражаетъ, что отношеніе произведенія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ $A_1=0$, $A_2=0$ на какую-нибудь касательную AD къ коническому сѣченію, къ произведенію перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ $A_3=0$, $A_4=0$ на туже касательную, есть величина постоянная λ.

Фиг. 129.



Пусть A, B, C, D будутъ точки пересѣченія данныхъ четырехъ касательныхъ A_1A_4, A_1A_3, A_2A_3 и A_2A_4 съ какою-небудь пятою AD. Если въ уравненіе (46) вставимъ координаты касательной AD, то A_1, A_2, A_3, A_4 будутъ длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ (45) на касательную AD. Разсматривая треугольники AA_1B, CA_2D, BA_3C, AA_4D и поступая какъ въ предъидущемъ параграфѣ, найдемъ предложеніе § 360, что ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ A, B, C, D пересѣченія какой-небудь касательной AD съ четырьмя данными касательными A_1A_4, A_1A_3, A_3A_2, A_2A_4 есть величина постоянная, когда перемѣщается касательная AD.

Ангармоническія свойства коническихъ сѣченій.

§ 369. *Предложеніе.* Геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего три стороны проходятъ черезъ три данныя точки, а другія двѣ вершины скользятъ по двумъ даннымъ прямымъ, есть коническое сѣченіе.

Доказательство. Пусть данныя точки будутъ O_1, O_2, O_3 (фиг. 130), данныя двѣ прямыя Oa и Ob. Возьмемъ четыре положенія такого треугольника:

$$\Delta\, aa'u_4\,,\quad \Delta\, bb'u_3\,,\quad \Delta\, cc'u_2\,,\quad \Delta\, dd'u_1$$

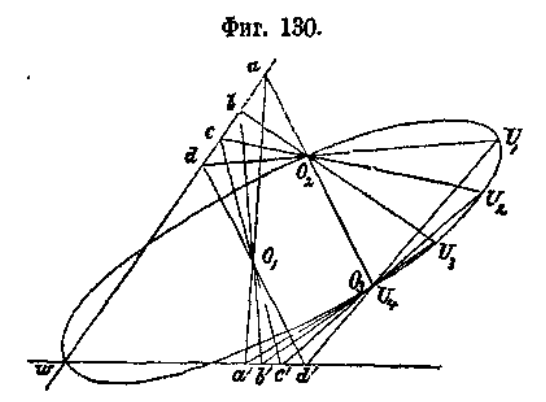
Изъ свойствъ ангармоническихъ отношеній имѣемъ:

$$(O_1.abcd)=(O_1.a'b'c'd')$$

слѣдовательно $(abcd) = (a'b'c'd')$, откуда $(O_2.abcd) = (O_3.a'b'c'd')$, откуда наконецъ:

$$(O_2.u_1u_2u_3u_4) = (O_3.u_1u_2u_3u_4)$$

Фиг. 130.



а изъ этого равенства заключаемъ, что точки u_1, u_2, u_3, u_4 находятся на коническомъ сѣченіи (§ 230). Если три первые треугольника будутъ фиксированы, то геометрическое мѣсто вершины четвертаго будетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки O_2, O_3, u_1, u_2, u_3.

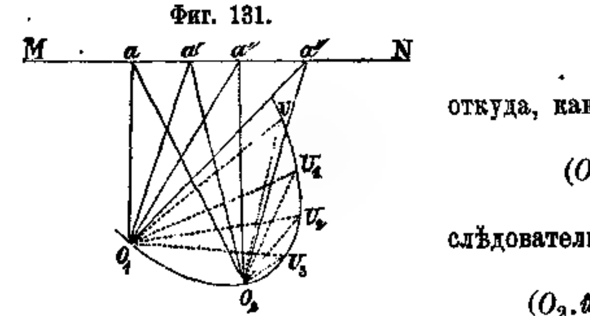
Этотъ способъ образованія коническаго сѣченія принадлежитъ Маклореню. Шаль обобщилъ предъидущее предложеніе, показавъ, что геометрическое мѣсто вершинъ треугольника будетъ коническое сѣченіе и въ томъ случаѣ, если сторона aa' вмѣсто того, чтобы проходить чрезъ точку O_1 будетъ касаться даннаго коническаго сѣченія. Въ самомъ дѣлѣ, въ четырехъ положеніяхъ стороны aa' будемъ имѣть (§ 360):

$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

откуда будетъ слѣдовать, какъ выше, предложеніе Шаля.

Можно положить, что основаніе aa' треугольника скользитъ по какому нибудь коническому сѣченію, проходящему черезъ точки O_2 и O_3. Въ самомъ дѣлѣ, для четырехъ положеній треугольника имѣемъ:

Фиг. 131.



$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

откуда, какъ выше:

$$(O_2.abcd) = (O_3.a'b'c'd')$$

слѣдовательно:

$$(O_2.u_1u_2u_3u_4) = (O_3.u_1u_2u_3u_4)$$

§ 370. *Предложеніе.* Если два данные угла вращаются около своихъ вершинъ O_1 и O_2 такъ, что двѣ ихъ стороны пересѣкаются на данной прямой, то геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ другихъ сторонъ будетъ коническое сѣченіе.

Доказательство. Возьмемъ (фиг. 131) четыре положенія угловъ aO_1u и aO_2u, $a'O_1u_1$ и $a'O_2u_1$, $a''O_1u_2$ и $a''O_2u_2$, $a'''O_1u_3$ и $a'''O_2u_2$.

Изъ свойствъ ангармоническихъ отношеній имѣемъ:

$$(O_1.aa'a''a''') = (O_2.aa'a''a''')$$

но

$$(O_1.aa'a''a'') = (O_1.uu_1u_2u_3) \quad \text{и} \quad (O_2.aa'a''a''') = (O_2.uu_1u_2u_3)$$

откуда:

$$(O_1.uu_1u_2u_3) = (O_2.uu_1u_2u_3)$$

а это показываетъ, что точки u, u_1, u_2, u_2, находятся на коническомъ сѣченіи.

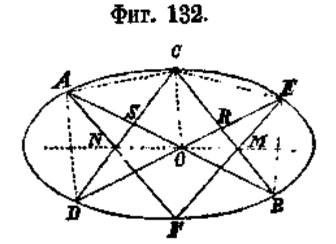
Этотъ способъ образованія коническихъ сѣченій принадлежитъ Ньютону. Шаль показалъ, что если точки a, a', a'', a'', лежатъ не на одной прямой, а на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ точки O_1 и O_2, то геометрическое мѣсто точекъ $u, u_1, u_2, \ldots\ldots$ будетъ также коническое сѣченіе. И въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$(O_1.aa'a''a''') = (O_2.aa_1a_2a_3)$$

§ 371. Свойство ангармоническаго отношенія даетъ возможность доказать предложеніе Паскаля (§ 354) слѣдующимъ образомъ.

Доказательство. Пусть $ABCDEF$ (фиг.132) будетъ вписанный въ коническое сѣченіе шестиугольникъ, коего вершины суть A, B, C, D, E, F, а противуположныя стороны AE и DE, EC и EF, CD и AF.

Фиг. 132.



Изъ ангармоническаго свойства коническаго сѣченія имѣемъ:

$$(E.CDFE) = (A.CDFB)$$

Если теперь разсмотримъ отрѣзки, которые связка $(E.CDFB)$ дѣлаетъ на сторонѣ CB, а связка $(A.CDFB)$ на сторонѣ CD, то:

$$(CRMB) = (CDNS)$$

Если изъ точки O пересѣченія сторонъ AE и DE проведемъ прямыя къ этимъ точкамъ, то найдемъ:

$$(O.CRMB) = (O.CDNS)$$

Эти двѣ связки имѣютъ общими лучи: CO, DE, AB, слѣдовательно OM и ON должны составлять одну прямую линію, но M, O, N суть точки пересѣченія противуположныхъ сторонъ шестиугольника.

§ 372. *Предложеніе.* Рядъ точекъ, полученный пересѣченіемъ связки коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре данныя точки, какою-нибудь прямою, есть инволюціонный (§ 346).

Доказательство. Пусть $f=0$, $f_1=0$ будутъ два коническія сѣченія; система коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре точки пересѣченія этихъ двухъ коническихъ сѣченій, выражается уравненіемъ:

$$f-\lambda f_1=0$$

Если сѣкущую возьмемъ за ось x и положимъ въ предъидущихъ трехъ уравненіяхъ $y=0$, то онѣ сдѣлаются:

$$a_0x^2+2a_1x+a_2=0\quad,\quad b_0x^2+2b_1x+b_2=0 \tag{47}$$

и

$$a_0x^2+2a_1x+a_2+\lambda(b_0x^2+2b_1x+b_2)=0 \tag{48}$$

Это послѣднее уравненіе даетъ точки пересѣченія системы коническихъ сѣченій съ осью x. Но эти точки съ точками (47) составляютъ инволюціонный рядъ (§ 178). Въ числѣ лучей связки считаются двѣ пары противуположныхъ сторонъ и пара діагоналей четыреугольника, коего вершины суть данныя четыре точки.

§ 373. Если коническія сѣченія даны въ линейныхъ координатахъ, то будемъ имѣть слѣдующее, взаимное предъидущему, предложеніе.

Предложеніе. Пары касательныхъ, проведенныхъ, черезъ какую-нибудь точку, къ системѣ коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія касательныя составляютъ инволюціонную связку.

Доказательство. Это предложеніе можно доказать, какъ и предъидущее.

Пр. 1. Если около одного четыреугольника описаны три коническія сѣченія, то общая касательная къ двумъ изъ нихъ пересѣкается третьимъ гармонически, потому что точки касанія суть фокусы инволюціоннаго ряда.

Пр. 2. Если черезъ пересѣченіе общихъ хордъ двухъ коническихъ сѣченій проведемъ касательную къ одному изъ нихъ, то она пересѣкается другимъ гармонически.

Пр. 3. Построить коническое сѣченіе, проходящее черезъ четыре данныя точки и касающееся данной прямой? Точка касанія должна быть фокусомъ инволюціонной системы, слѣдовательно задача имѣетъ два рѣшенія.

§ 374. *Предложеніе.* Система коническихъ сѣченій, имѣющихъ общій полярный треугольникъ, пересѣкается, какою-нибудь прямою, проходящею черезъ одну изъ его вершинъ, въ точкахъ образующихъ инволюціонный рядъ.

Доказательство. По свойству полярнаго треугольника, прямая проходящая черезъ его вершину, пересѣкаетъ каждое изъ коническихъ сѣченій системы въ точкахъ, которыя суть сопряженно-гармоническія съ вершиною и точкою пересѣченія прямой съ противулежащей стороной полярнаго треугольника, слѣдовательно каждая пара точекъ на коническихъ сѣченіяхъ системы, гармонична съ одной и той-же парой, а потому онѣ образуютъ инволюціонный рядъ, коего двойныя точки суть вершины и точка пересѣченія прямой съ противулежащей стороной.

Предложеніе. Если черезъ, какую-нибудь, точку на сторонѣ общаго полярнаго треугольника системы коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре данныя точки, проведемъ пару касательныхъ къ каждому изъ коническихъ сѣченій системы, то онѣ образуютъ инволюціонную связку, коей двойные лучи суть: взятая сторона общаго полярнаго треугольника и прямая, проходящая черезъ взятую на ней точку и ея полюсъ, т. е. противулежащую вершину полярнаго треугольника (предложеніе взаимное предъидущему).

Доказательство основано на свойствѣ полярнаго треугольника (§ 212).

Фокусы коническихъ сѣченій.

§ 375. Выше мы видѣли (§ 350) изъ уравненія коническаго сѣченія отнесеннаго къ фокусу какъ началу, выражающаго основное свойство фокуса и директрисы:

$$x^2 + y^2 = e^2 A_1 \tag{49}$$

что коническое сѣченіе можно разсматривать, какъ вписанное въ четыреугольникъ, коего стороны пересѣкаются въ двухъ *циклическихъ* безконечно удаленныхъ точкахъ, въ двухъ дѣйствительныхъ и въ двухъ мнимыхъ *фокусахъ*.

Разсмотримъ ближе характеръ и свойства этихъ замѣчательныхъ точекъ:

Пусть:

$$f' = 0 \text{ и } f'_1 = 0 \tag{50}$$

будутъ два коническія сѣченія въ линейныхъ координатахъ.

Уравненіе:

$$f' - \lambda f'_1 = 0 \tag{51}$$

будетъ представлять систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія касательныя съ двумя коническими сѣченіями. Между коническими сѣченіями системы (51) есть три пары точекъ, принадлежащихъ этой си-

стемѣ въ качествѣ коническихъ сѣченій. Если предположимъ, что одна изъ этихъ паръ есть пара циклическихъ точекъ, то (51) будетъ система коническихъ сѣченій, въ которой въ качествѣ коническихъ сѣченій будетъ и пара циклическихъ точекъ.

Такъ какъ въ системѣ (51) можно, вмѣсто коническихъ сѣченій (49), выбрать какую-угодно пару другихъ изъ системы, а мы предположили, что въ системѣ (51) находятся и пара циклическихъ точекъ, то вмѣсто $f'_1 = 0$ можемъ взять циклическія точки: $\xi^2 + \eta^2 = 0$. Въ силу этого система (51) приметъ форму:

$$f' - \lambda(\xi^2 + \eta^2) = 0 \qquad (52)$$

изъ которой ясно видно, что между коническими сѣченіями (51) находится и пара циклическихъ точекъ, именно, когда $\lambda = \infty$. Если за координатныя оси возьмемъ оси a и b коническаго сѣченія $f' = 0$, то оно приметъ форму:

$$f' = a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - 1 = 0 \qquad (53)$$

слѣдовательно уравненіе (52) преобразуется въ слѣдующее:

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - 1 - \lambda(\xi^2 + \eta^2) = 0$$

или:

$$(a^2 - \lambda)\xi^2 + (b^2 - \lambda)\eta^2 - 1 = 0 \qquad (54)$$

Чтобы опредѣлить другія двѣ пары точекъ въ системѣ коническихъ сѣченій (54), необходимо опредѣлить λ изъ уравненія (§ 337):

$$\begin{vmatrix} a^2 - \lambda, & 0, & 0 \\ 0, & b^2 - \lambda, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0 \qquad (55)$$

откуда:

$$\lambda = a^2 \quad , \quad \lambda = b^2$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (54), найдемъ:

$$(a^2 - b^2)\xi^2 = 1 \qquad (56)$$

$$(b^2 - a^2)\eta^2 = 1 \qquad (57)$$

Это суть уравненія остальныхъ двухъ паръ точекъ:

$$\pm\sqrt{a^2 - b^2}\,.\,\xi - 1 = 0 \quad , \quad \pm\sqrt{b^2 - a^2}\,.\,\eta - 1 = 0 \qquad (58)$$

если $a > b$, то первая пара будетъ дѣйствительная, а вторая мнимая. Координаты этихъ точекъ, очевидно, суть (§ 64):

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{a^2-b^2} \quad , \quad x=0 \\ y &= 0 \quad\quad\quad\quad , \quad y=\pm\sqrt{b^2-a^2} \end{aligned} \tag{59}$$

Первая пара представляетъ тѣ точки, которыя мы назвали *фокусами* коническихъ сѣченій, а вторая представляетъ *мнимые фокусы*.

§ 376. Такъ какъ выраженія (59) не зависятъ отъ λ, то изъ этого заключаемъ, что система коническихъ сѣченій:

$$(a^2-\lambda)\xi^2+(b^2-\lambda)\eta^2=1 \tag{60}$$

или въ декартовой системѣ (§ 214):

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \tag{61}$$

имѣетъ общіе фокусы; такія коническія сѣченія называются *софокусными* (confocales). Эти общіе фокусы принадлежатъ основному коническому сѣченію $f'=0$.

§ 377. Изъ уравненій софокусныхъ коническихъ сѣченій:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \quad , \quad (a^2-\lambda)\xi^2+(b^2-\lambda)\eta^2=1 \tag{62}$$

вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Черезъ каждую точку на плоскости всегда проходятъ два изъ системы софокусныхъ коническихъ сѣченій.

Доказательство. Пусть данная система будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1 \tag{63}$$

а данная точка (x_1y_1). Подставляя координаты точки (x_1y_1) въ это уравненіе, найдемъ:

$$\frac{x_1^2}{a^2-\lambda}+\frac{y_1^2}{b^2-\lambda}=1$$

откуда:

$$\lambda^2-(a^2+b^2-x_1^2-y_1^2)\lambda-(a^2y_1^2+b^2x_1^2-a^2b^2)=0 \tag{64}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что λ имѣетъ всегда два дѣйствительныя значенія, которыя будучи подставлены въ первое изъ уравненій (62) да-

дутъ два софокусныя коническія сѣченія, проходящія черезъ данную точку (x_1y_1). Если въ уравненіи (64) положимъ послѣдовательно $\lambda = a^2$, $\lambda = b^2$ и $\lambda = -\infty$, то результаты этихъ подстановленій будутъ:

$$x^2_1(a^2-b^2) \quad , \quad y^2_1(b^2-a^2) \quad , \quad +\infty$$

если $a > b$, то будемъ имѣть рядъ знаковъ $+-+$, слѣдовательно одинъ изъ корней заключается между a^2 и b^2, а другой, очевидно, между $+b^2$ и $-\infty$. Откуда, замѣчая, что уравненіе (63) будетъ представлять:

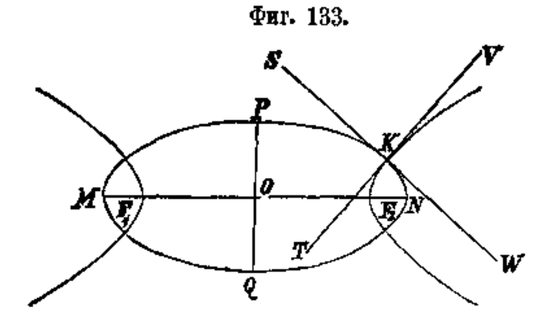
эллипсъ, если $\lambda < b^2$

гиперболу, если $a^2 > \lambda > b^2$

мнимый эллипсъ, если $a^2 < \lambda < b^2$

видимъ, что черезъ каждую дѣйствительную точку на плоскости проходитъ всегда два коническія сѣченія: эллипсъ и гипербола, принадлежащія одной системѣ софокусныхъ коническихъ сѣченій.

Фиг. 133.



Предложеніе. Показать, что два софокусныя коническія сѣченія, проходящія черезъ данную точку (x_1y_1) на плоскости, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ?

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, пусть λ_1, λ_2 будутъ корни уравненія (64), то уравненія:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_2}=1$$

будутъ представлять одно эллипсъ, а другое гиперболу.

Въ точкѣ (x_1y_1) касательныя къ нимъ будутъ:

$$\frac{x_1x}{a^2-\lambda_1}+\frac{y_1y}{b^2-\lambda_1}=1 \quad , \quad \frac{x_1x}{a^2-\lambda_2}+\frac{y_1y}{b^2-\lambda_2}=1 \qquad (65)$$

откуда, вычитая, найдемъ, отбрасывая множитель $\lambda_1-\lambda_2$:

$$\frac{x^2_1}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)}+\frac{y^2_1}{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}=0$$

а это есть условіе перпендикулярности прямыхъ (65).

На чертежѣ видно (фиг. 133) положеніе этихъ двухъ кривыхъ.

Предложеніе 2. Къ каждой прямой на плоскости касается одно изъ системы софокусныхъ коническихъ сѣченій.

Доказательство. Пусть данная система будетъ:

$$(a^2-\lambda)\xi^2+(b^2-\lambda)\eta^2=1 \tag{66}$$

а данная прямая $(\xi_1\eta_1)$. Если коническое сѣченіе (66) касается прямой $(\xi_1\eta_1)$, то имѣемъ:

$$(a^2-\lambda)\xi^2_1+(b^2-\lambda)\eta^2_1=1$$

откуда для λ имѣемъ одно только значеніе, а слѣдовательно и одно коническое сѣченіе изъ системы (66) касается прямой $(\xi_1\eta_1)$.

Предложеніе 3. Въ системѣ софокусныхъ коническихъ сѣченій не существуетъ ни одного, которое бы распадалось на пару прямыхъ линій.

Доказательство. Это легко видѣть изъ формы уравненія (63).

Предложеніе 4. Въ системѣ софокусныхъ коническихъ сѣченій существуютъ три коническія сѣченія распадающіяся на пару точекъ: пара циклическихъ точекъ, пара дѣйствительныхъ и пара мнимыхъ фокусовъ.

Доказательство. Это было показано выше.

Предложеніе 5. Всѣ софокусныя коническія сѣченія имѣютъ общія оси, которыя съ безконечно-удаленною прямою образуютъ полярный, общій всей системѣ, треугольникъ.

Доказательство. Это очевидно (§ 338).

§ 378. *Эллиптическія координаты.* Свойства софокусныхъ коническихъ сѣченій даютъ систему координатъ, съ помощью которой опредѣляется положеніе точки на плоскости пересѣченіемъ двухъ софокусныхъ коническихъ сѣченій. Эти координаты называютъ *эллиптическими.*

Пусть:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

будетъ уравненіе коническаго сѣченія. Пусть его фокусное разстояніе будетъ c, то оно можетъ быть написано въ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

Измѣняя a получимъ систему софокусныхъ коническихъ сѣченій, изъ которыхъ два будутъ проходить черезъ каждую изъ точекъ на плоскости. Найдемъ то изъ нихъ, которое проходитъ черезъ точку (x_1y_1). Координаты этой точки должны удовлетворять уравненіе:

$$\frac{x^2_1}{a^2}+\frac{y^2_1}{a^2-c^2}=1$$

или:

$$a^4-(x_1^2+y_1^2+c^2)a^2+c^2x_1^2=0 \tag{67}$$

Точно такое же уравненіе получимъ, если пожелаемъ опредѣлить ось b, именно:

$$b^4-(x_1^2+y_1^2+c^2)b^2-c^2y_1^2=0 \tag{68}$$

Если назовемъ корни уравненія (67) черезъ a_1, a_2, а корни уравненія (68) черезъ b_1, b_2, то найдемъ:

$$a_1^2a_2^2=c^2x_1^2 \quad ; \quad b_1^2b_2^2=-c^2y_1^2$$

откуда:

$$x_1^2=\frac{a_1^2a_2^2}{c^2} \quad , \quad y_1^2=-\frac{b_1^2b_2^2}{c^2}$$

или:

$$x_1^2=\frac{a_1^2a_2^2}{a^2-b^2} \quad , \quad y_1^2=\frac{b_1^2b_2^2}{b^2-a^2}$$

Такимъ образомъ выражаются координаты Декарта въ функціи осей двухъ софокусныхъ, коническихъ сѣченій, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ. Это и суть эллиптическія координаты.

ГЛАВА XXII.

Геометрическое значеніе инваріантовъ системы коническихъ сѣченій.

§ 379. Если коническія сѣченія:

$$f=0 \quad , \quad f_1=0 \tag{1}$$

преобразуемъ къ другимъ координатамъ декартовымъ или трилинейнымъ, то если f и f_1 сдѣлаются Φ и Φ_1, уравненіе $f-\lambda f_1=0$, очевидно, сдѣлается $\Phi-\lambda\Phi_1=0$. Изъ этого слѣдуетъ, что значенія λ, для которыхъ:

$$f-\lambda f_1=0 \tag{2}$$

распадается на пару прямыхъ линій, должно остаться неизмѣннымъ къ какимъ бы координатамъ не были отнесены коническія сѣченія $f=0$ и $f_1=0$. Слѣдовательно отношеніе между двумя, какими-нибудь, корнями кубическаго уравненія (§ 344, 46):

$$\Delta_1\lambda^3-Q_1\lambda^2+Q\lambda-\Delta=0 \tag{3}$$

неизмѣняется, если перейдемъ отъ одной системы координатъ къ другой. Въ силу этого свойства Δ, Q; Δ_1, Q_1 названы *инваріантами*. Легко провѣрить, что если въ f и f_1 подставимъ вмѣсто x, y, z выраженія:

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3 \quad , \quad y=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3 \quad , \quad z=\gamma_1x_1+\gamma_2x_2+\gamma_3x_3$$

то выраженія Δ, Q; Δ_1, Q_1 для преобразованныхъ f и f_1 равны прежнимъ умноженнымъ на квадратъ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & , & \alpha_2 & , & \alpha_3 \\ \beta_1 & , & \beta_2 & , & \beta_3 \\ \gamma_1 & , & \gamma_2 & , & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Поэтому, если два коническія сѣченія, будучи преобразованы къ другой системѣ координатъ, получаютъ простѣйшую форму и въ этой простѣйшей формѣ вычислимъ выраженія Δ, Q; Δ_1, Q_1 и найдемъ, что между ними существуетъ однородная зависимость, то эта зависимость будетъ существовать, между тѣми же выраженіями, какая бы ни была выбрана координатная система.

Такимъ образомъ можемъ выразить въ функціи этихъ четырехъ количествъ всѣ тѣ зависимости между коническими сѣченіями, которыя не зависятъ отъ координатной системы, къ которой онѣ отнесены. Таково напримѣръ условіе (19) § 351, что два коническія сѣченія касаются. Пояснимъ выше сказанное примѣрами.

§ 380. Если въ коническомъ сѣченіи:

$$f-\lambda f_1=0 \tag{4}$$

f_1 распадается на пару прямыхъ линій $f_1=A_1A_2$, то:

$$f-\lambda A_1A_2=0 \tag{5}$$

есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченія $f=0$ съ прямыми $A_1=0$, $A_2=0$. При этомъ условіи $\Delta_1=0$; посмотримъ значеніе инваріантовъ Q и Q_1?

Для этого возьмемъ прямыя $A_1=0$ и $A_2=0$ за координатныя оси, тогда уравненіе (5) сдѣлается:

$$f-\lambda xy=0 \tag{6}$$

Въ силу свойства инваріантовъ, найденная между ними зависимость для

формы (6) будетъ оставаться и вообще. Призначную (discriminant) формы (6) найдемъ, написавъ въ призначной Δ, значеніе $a_{12}-\lambda$ вмѣсто a_{12}, что даетъ:

$$\Delta - 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})\lambda - a_{33}\lambda^2 \tag{7}$$

Если $a_{33}=0$, то точка (x, y) находится на кривой $f=0$. Если $a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33} = 0$, то прямыя x и y суть сопряженныя поляры относительно коническаго сѣченія $f=0$. Слѣдовательно, если $f_1=0$ есть пара прямыхъ линій, то $\Delta_1=0$, а $Q_1=0$ даетъ условіе, что точка пересѣченія прямыхъ линій $x=0$, $y=0$ находится на $f=0$, и наконецъ $Q=0$ есть условіе, что двѣ прямыя суть сопряженныя поляры коническаго сѣченія $f=0$.

Если уравненіе:

$$Q_1\lambda^2 - Q\lambda + \Delta = 0 \tag{8}$$

есть полный квадратъ, то:

$$Q^2 = 4Q_1\Delta$$

это есть условіе, что одна изъ прямыхъ $f_1=0$ касается коническаго сѣченія $f=0$. Въ выбранномъ примѣрѣ легко найдемъ:

$$Q^2 - 4Q_1\Delta = (a_{22}a_{33} - a^2_{23})(a_{11}a_{33} - a^2_{13})$$

§ 381. *Задача.* Найти уравненіе пары касательныхъ линій въ точкахъ пересѣченія прямой:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

съ коническимъ сѣченіемъ $f=0$?

Рѣшеніе. Если въ уравненіи (5) положимъ:

$$A_1 = A_2 = (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \tag{9}$$

то оно сдѣлается:

$$f - \lambda(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 = 0 \tag{10}$$

и представляетъ, очевидно, систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ двойное соприкосновеніе съ коническимъ сѣченіемъ $f=0$, коихъ общая хорда соприкосновенія будетъ $A_1=0$ (§ 347, фиг. 125). Вся система имѣетъ общія касательныя въ точкахъ пересѣченія $A_1=0$ и $f=0$.

Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ не только $\Delta_1=0$, но и $Q_1=0$ (§ 333, 32), а Q будетъ:

$$Q = f' = A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3$$

при такомъ условіи два корня уравненія (§ 336, 7) равны нулю, а третій дается уравненіемъ:

$$Q.\lambda-\Delta=0 \quad \text{или} \quad f'.\lambda=\Delta$$

подставляя это значеніе λ въ уравненіе (10) найдемъ искомое уравненіе:

$$f'.f=\Delta(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3)^2 \tag{11}$$

Если прямая $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ касается коническаго сѣченія $f=0$, то пара касательныхъ совпадаетъ съ этой прямой, и условіе для этого, какъ намъ извѣстно, есть $f'=0$. Если и f разбивается на линейные множители, то $\Delta=0$ и уравненіе (11) будетъ $f=0$, какъ и слѣдуетъ.

§ 382. Разсмотримъ геометрическое значеніе $Q=0$.

Возьмемъ за координатный треугольникъ одинъ изъ полярныхъ треугольниковъ относительно коническаго сѣченія $f=0$. Его уравненіе будетъ:

$$a_{11}x^2_1+a_{22}x^2_2+a_{33}x^2_3=0 \tag{12}$$

слѣдовательно $a_{12}=0$, $a_{13}=0$ и $a_{23}=0$. При этихъ значеніяхъ:

$$Q=a_{22}a_{33}b_{11}+a_{33}a_{11}b_{22}+a_{11}a_{22}b_{33} \tag{13}$$

и обращается въ нуль при $b_{11}=0$, $b_{22}=0$, $b_{33}=0$, т. е. когда коническое сѣченіе $f_1=0$, отнесенное къ тому же полярному треугольнику, будетъ имѣть форму:

$$f_1=b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3=0$$

Слѣдовательно Q тогда равно нулю, когда какой-нибудь треугольникъ, вписанный въ коническое сѣченіе $f_1=0$, есть полярный относительно коническаго сѣченія $f=0$.

Если за координатный треугольникъ возьмемъ какой-нибудь полярный, относительно коническаго сѣченія $f_1=0$, то $b_{12}=0$, $b_{13}=0$, $b_{23}=0$, слѣдовательно:

$$Q=A_{11}b_{11}+A_{22}b_{22}+A_{33}b_{33} \tag{14}$$

выраженіе, которое обратится въ нуль при:

$$A_{11}=0,\ A_{22}=0,\ A_{33}=0$$

но это суть условія, при которыхъ коническое сѣченіе $f=0$ вписано въ координатный треугольникъ, слѣдовательно Q равно нулю и въ томъ случаѣ, если треугольникъ, описаный около коническаго сѣченія $f=0$, есть полярный относительно $f_1=0$.

Точно также можно показать, что $Q_1 = 0$ есть условіе возможности вписать въ $f = 0$ треугольникъ, который бы былъ полярнымъ для $f_1 = 0$, или описать около $f = 0$ треугольникъ, который бы былъ полярнымъ $f_1 = 0$. Если одно изъ этихъ предложеній возможно, то возможно и другое.

Пара коническихъ сѣченій, связанныхъ условіемъ $Q = 0$, имѣетъ еще другое слѣдующее свойство. Если точку пересѣченія прямыхъ, соединяющихъ вершины какого-нибудь треугольника съ соотвѣтственными вершинами его полярнаго треугольника относительно коническаго сѣченія, назовемъ полюсомъ этого треугольника относительно коническаго сѣченія, а прямую, соединяющую точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ треугольниковъ, назовемъ ихъ осью, то условіе $Q = 0$ показываетъ, что полюсъ относительно коническаго сѣченія $f = 0$ находится на $f_1 = 0$; и что ось, относительно коническаго сѣченія $f_1 = 0$, какого-нибудь описаннаго около $f = 0$ треугольника, касается коническаго сѣченія $f = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, исключая x_1, x_2, x_3 изъ каждыхъ двухъ паръ уравненій:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \;\;,\;\; a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \;\;,\;\; a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$$

получимъ:

$$(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})\,x_1 = (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})\,x_2 = (a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12})\,x_3$$

уравненія прямыхъ, соединяющихъ вершины треугольника $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ съ соотвѣтствеными вершинами его полярнаго, относительно коническаго сѣченія $f = 0$. Эти уравненія можно написать въ формѣ:

$$A_{23}x_1 = A_{13}x_2 = A_{12}x_3$$

координаты полюса треугольника будутъ:

$$\frac{1}{A_{23}}\;,\;\frac{1}{A_{13}}\;,\;\frac{1}{A_{12}} \tag{15}$$

Подставляя эти величины въ $f_1 = 0$, въ которомъ полагаемъ $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, $b_{33} = 0$, получимъ:

$$2A_{23}b_{23} + 2A_{13}b_{13} + 2A_{12}b_{12} = Q = 0 \tag{16}$$

Точно также можно доказать и вторую часть предложенія.

Пр. 1. Если даны два полярные треугольника относительно коническаго сѣченія $f_1 = 0$, то можно описать одно коническое сѣченіе, проходящее черезъ шесть вершинъ данныхъ треугольниковъ, а другое касающееся шести ихъ сторонъ.

Доказательство. Опишемъ коническое сѣченіе чрезъ три вершины одного треугольника и черезъ двѣ другаго, коего стороны пусть будутъ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Такъ какъ искомое коническое сѣченіе описано около перваго треугольника, то $Q_1 = 0$ или $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ (§ 346 пр. 3), но оно проходитъ и чрезъ двѣ вершины втораго треугольника, слѣдовательно $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, откуда и $a_{33} \quad 0$, т. е. коническое сѣченіе проходитъ и черезъ шестую вершину. Вторая часть этого предложенія доказывается точно также.

Пр. 2. Квадратъ касательной, проведенной изъ центра коническаго сѣченія къ кругу описанному около полярнаго треугольника, есть величина постоянная.

Доказательство. Это слѣдуетъ изъ пр. 5. § 346, гдѣ $Q = 0$ или:

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = a^2 + b^2$$

§ 383. Если имѣемъ два произвольно взятыя коническія сѣченія, то вообще нельзя вписать въ одно изъ нихъ треугольникъ, который бы былъ описанъ около другаго, но можно построить безчисленное множество такихъ треугольниковъ, если коэфиціенты данныхъ двухъ коническихъ сѣченій связаны нѣкоторымъ условіемъ, которое мы и разыщемъ. Положимъ, что такой треугольникъ построенъ, возьмемъ его за координатный, то уравненія коническихъ сѣченій будутъ:

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0 \\ f_1 &= 2b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

ихъ инваріанты будутъ:

$$\Delta = -4,\ Q = 4(b_{12} + b_{13} + b_{23}),\ Q = -(b_{12} + b_{13} + b_{23})^2,\ \Delta_1 = 2b_{12}b_{13}b_{23}$$

выраженія, которыя, очевидно связаны уравненіемъ:

$$Q^2 = 4\Delta Q_1 \qquad (18)$$

Это уравненіе составлено изъ инваріантовъ, а слѣдовательно неизмѣняется преобразованіемъ координатъ и въ какой бы формѣ ни были даны коническія сѣченія, условіе (18) должно оставаться, когда коническія сѣченія праобразуются въ форму (17). Обратно, легко показать, что если условіе (18) существуетъ, то треугольникъ описанный около $f = 0$ и котораго двѣ вершины находятся на $f_1 = 0$, то и третяя вершина будетъ ка этомъ коническомъ сѣченіи.

Пр. 1. Найти такіе два круга, чтобы треугольникъ, вписанный въ одинъ изъ нихъ, былъ бы описанъ около другаго?

Рѣшеніе Пусть $d^2 - r^2 - r_1^2 = k$, то условіе (см. пр. 3. § 346):

$$(k \quad r^2)^2 + 4r^2(k - r_1^2) \quad 0 \quad \text{или} \quad (k + r^2)^2 = 4\,r^2r_1^2$$

откуда:

$$d^2 \quad r_1^2 \pm 2rr_1$$

Это извѣстное выраженіе Эйлера для разстоянія между центрами круга описаннаго и одного изъ круговъ касающагося трехъ сторонъ треугольника.

Пр. 2. Найти условіе при которомъ бы стороны треугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе $f_1 = 0$, касались коническихъ сѣченій:

$$f + \lambda f_1 = 0 \quad , \quad f + \mu f_1 = 0 \quad , \quad f + \nu f_1 = 0$$

Пусть:

$$f = x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - 2(1 + \nu a_{12}) x_1 x_2 - 2(1 + \mu a_{13}) x_1 x_3 - 2(1 + \lambda a_{23}) x_2 x_3 = 0$$

$$f_1 = 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0$$

очевидно, коническое сѣченіе $f + \lambda f_1 = 0$ касается сторонъ треугольника $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_2 = 0$. Но мы имѣемъ:

$$\Delta = -(2 + \lambda a_{23} + \mu a_{13} + \nu a_{12})^2 - 2\lambda\mu\nu \, . \, a_{12} a_{13} a_{23}$$

$$Q = 2(a_{12} + a_{13} + a_{23})(2 + \lambda a_{23} + \mu a_{13} + \nu a_{12}) + 2a_{12} a_{23} a_{23} (\mu\nu + \nu\lambda + \mu\lambda)$$

$$Q_1 = \quad (a_{12} + a_{13} + a_{23})^2 - 2(\lambda + \mu + \nu) a_{12} a_{13} a_{23} \quad , \quad \Delta_1 = 2a_{12} a_{13} a_{23}$$

откуда:

$$\left\{Q - \Delta_1 (\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu)\right\}^2 = 4(\Delta + \lambda\mu\nu\, \Delta_1)\left\{Q_1 + \Delta_1 (\lambda + \mu + \nu)\right\}$$

§ 384. Въ § 208 и § 221 мы нашли уравненія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ коническому сѣченію, и двухъ точекъ пересѣченія данной прямой съ коническимъ сѣченіемъ. Эти уравненія суть:

$$PR - Q^2 = 0 \quad \text{и} \quad LN - M^2 = 0 \tag{19}$$

какъ видно изъ значеній P, R, Q; L, N, M, развернуть ихъ, относительно перемѣнныхъ, весьма трудно, но ихъ можно получить въ развернутой формѣ слѣдующимъ образомъ.

Замѣтимъ сначала, что уравненіе коническаго сѣченія:

$$f = a_{11} x^2_1 + a_{22} x^2_2 + a_{33} x^2_3 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 = 0 \tag{20}$$

и

$$f' = A_{11} \xi^2_1 + A_{22} \xi^2_2 + A_{33} \xi^2_3 + 2A_{12} \xi_1 \xi_2 + 2A_{13} \xi_1 \xi_3 + 2A_{23} \xi_2 \xi_3 = 0 \tag{21}$$

первое выражаетъ, что точка данная координатами $(x_1 x_2 x_3)$ лежитъ на коническомъ сѣченіи, а второе, что прямая данная координатами $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ касается коническаго сѣченія.

Задача 1. Найти уравненіе касательныхъ проведенныхъ къ коническому сѣченію (20) изъ данной точки?

Рѣшеніе. Возьмемъ уравненіе прямой проходящей черезъ точки $(y_1 y_2 y_3)$ и $(z_1 z_2 z_3)$ (§ 74):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

ея координаты будутъ (§ 187):

$$\xi_1 = y_2 z_3 - y_3 z_2 \quad , \quad \xi_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3 \quad , \quad \xi_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1 \tag{23}$$

Если прямая (22) касается коническаго сѣченія (20), то ея координаты (23) должны удовлетворять уравненію (21), что даетъ:

$$A_{11}(y_2 z_3 - y_3 z_2)^2 + A_{22}(y_3 z_1 - y_1 z_3)^2 + \ldots\ldots = 0 \tag{24}$$

или разлагая вторую часть относительно z и замѣщая z черезъ x, найдемъ уравненіе:

$$\begin{aligned}
&(A_{22}y^2_3 + A_{33}y^2_2 - 2A_{23}y_2 y_3)\,x^2_1 + \\
&+ (A_{11}y^2_3 + A_{33}y^2_1 - 2A_{13}y_1 y_3)\,x^2_2 + \\
&+ (A_{11}y^2_2 + A_{22}y^2_1 - 2A_{12}y_1 y_2)\,x^2_3 + \\
&+ 2\,(A_{23}y_1 y_3 + A_{13}y_2 y_3 - A_{33}y_1 y_2 - A_{12}y^2_3)\,x_1 x_2 + \\
&+ 2\,(A_{12}y_2 y_3 + A_{23}y_1 y_2 - A_{22}y_1 y_3 - A_{13}y^2_2)\,x_1 x_3 + \\
&+ 2\,(A_{13}y_1 y_2 + A_{12}y_1 y_3 - A_{11}y_2 y_3 - A_{23}y^2_1)\,x_2 x_3 = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

Если фиксируемъ точку $(y_1 y_2 y_3)$, а x_1, x_2, x_3 сдѣлаемъ перемѣнными, удовлетворяющими уравненіе (25), то это уравненіе будетъ выражать, что прямая, проходящая черезъ точки $(y_1 y_2 y_3)$ и $(x_1 x_2 x_3)$, касается коническаго сѣченія (20). Но какъ это уравненіе относительно x_1, x_2, x_3 второй степени, то оно и представляетъ искомыя касательныя и легко убѣдиться, что критеріумъ $\Delta = 0$ удовлетворяется.

Задача 2. Найти уравненіе точекъ пересѣченія данной прямой съ коническимъ сѣченіемъ (20)?

Рѣшеніе. Возьмемъ уравненіе точки пересѣченія двухъ прямыхъ $(\eta_1 \eta_2 \eta_3)$ и $(\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3)$ (§ 187, 15'):

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

координаты этой точки будутъ (§ 187):

$$y_1 = \eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2 \quad , \quad y_2 = \eta_3 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_3 \quad , \quad y_3 = \eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1 \tag{27}$$

Если эта точка лежитъ на коническомъ сѣченіи (20), то ея координаты должны удовлетворять уравненію (20), что даетъ:

$$a_{11}(\eta_2 \zeta_3 - \eta_3 \zeta_2)^2 + a_{22}(\eta_3 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_3)^2 + \ldots\ldots = 0 \tag{28}$$

разлагая по ζ и замѣняя ζ чрезъ ξ найдемъ, очевидно, уравненіе подобное уравненію (25), въ которомъ $A_{i,k}$, y, x замѣнены чрезъ $a_{i,k}$, η, ξ.

Если въ уравненіи (28) фиксируемъ η, а ξ будемъ измѣнять такъ что ξ_1, ξ_2, ξ_3 удовлетворятъ это уравненіе, то это будетъ представлять вращающуюся прямую около точки на коническомъ сѣченіи, а такъ капъ оно второй степени, то и будетъ представлять двѣ точки пересѣченія прямой $(\eta_1\eta_2\eta_3)$ съ коническимъ сѣченіемъ. Изъ этого слѣдуетъ, что уравненія (25) и (28) суть ничто иное какъ уравненія (19) въ развернутой формѣ.

Сдѣлавъ эти преобразованія уравненій (19) можно легко рѣшить слѣдующія двѣ задачи.

Задача 3. Найти геометрическое мѣсто точекъ, касательныя проведенныя изъ которыхъ къ двумъ даннымъ коническимъ сѣченіямъ, составляли-бы гармоническую связку?

Рѣшеніе. Пусть данныя два коническихъ сѣченія будутъ:

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ f_1 &= b_{11}x^2_1 + b_{22}x^2_2 + b_{33}x^2_3 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3 = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

ихъ взаимныя:

$$\begin{aligned} f' &= A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0 \\ f_1' &= B_{11}\xi^2_1 + B_{22}\xi^2_2 + B_{33}\xi^2_3 + 2B_{12}\xi_1\xi_2 + 2B_{13}\xi_1\xi_3 + 2B_{23}\xi_2\xi_2 = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Если гармоническую связку пересѣчемъ какою-нибудь прямою, то получимъ четыре гармоническія точки (§ 93). Сдѣлаемъ въ уравненіи (25) и въ уравненіи полученномъ изъ (25), измѣняя $A_{i,k}$ на $B_{i,k}$, $x_3 = 0$, то найдемъ два слѣдующія уравненія четырехъ точекъ пересѣченія стороны x_3 координатнаго треугольника съ четырьмя касательными, проведенными къ коническимъ сѣченіямъ (29) изъ точки $(y_1y_2y_3)$:

$$(A_{22}y^2_3 + A_{33}y^2_2 - 2A_{23}y_2y_3)x^2_1 + (A_{11}y^2_3 + A_{33}y^2_1 - 2A_{13}y_1y_3)x^2_2 +$$
$$+ 2(A_{23}y_1y_3 + A_{13}y_2y_3 - A_{33}y_1y_2 - A_{12}y^2_3)x_1x_2 = 0$$

и (31)

$$(B_{22}y^2_3 + B_{33}y^2_2 - 2B_{22}y_2y_3)x^2_1 + (B_{11}y^2_3 + B_{33}y^2_1 - 2B_{12}y_1y_3)x^2_2 +$$
$$+ 2(B_{33}y_1y_3 + B_{13}y_2y_3 - B_{33}y_1y_2 - B_{12}y^2_3)x_1x_2 = 0$$

Если четыре точки представляемыя этими двумя уравненіями будутъ гар-

моническія, то условіе (26) § 177 должно быть удовлетворено, т. е. должны имѣть:

$$(A_{22}y^2_3+A_{33}y^2_2-2A_{23}y_2y_3)(B_{11}y^2_3+B_{33}y^2_1-2B_{13}y_1y_3)+$$

$$+(B_{22}y^2_3+B_{33}y^2_2-2B_{23}y_2y_3)(A_{11}y^2_3+A_{33}y^2_1-2A_{13}y_1y_3)= \tag{32}$$

$$=2(A_{23}y_1y_3+A_{13}y_2y_3-A_{33}y_1y_3-A_{12}y^2_3)(B_{22}y_1y_3+B_{13}y_2y_3-B_{33}y_1y_3-B_{13}y^2_3)$$

Развертывая и раздѣляя на y^2_3, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$F=(A_{22}B_{33}+A_{33}B_{22}-2A_{12}B_{12})x^2_1+(A_{33}B_{11}+A_{11}B_{33}-2A_{13}B_{13})x^2_2+$$

$$+(A_{11}B_{22}+A_{22}B_{11}-2A_{23}B_{23})x^2_3+2(A_{13}B_{23}+A_{33}B_{13}-A_{11}B_{12}-A_{12}B_{11})x_1x_2+$$

$$+2(A_{23}B_{12}+A_{12}B_{23}-A_{22}B_{13}-A_{13}B_{22})x_1x_3+ \tag{33}$$

$$+2(A_{12}B_{22}+A_{32}B_{12}-A_{33}B_{23}-A_{23}B_{33})x_2x_3=0$$

какъ видно это коническое сѣченіе, которое имѣетъ важную зависимость съ данными двумя коническими сѣченіями. Если бы ангармоническое отношеніе четырехъ касательныхъ было дано, то геометрическое мѣсто будетъ кривая четвертой степени:

$$F^2=kff_1 \tag{34}$$

гдѣ F есть уравненіе (33), а f и f_1 коническія сѣченія (29).

Задача 4. Найти геометрическое мѣсто (обвертку) прямой, которая бы пересѣкала два данныя коническія сѣченія (29) въ четырехъ гармоническихъ точкахъ?

Рѣшеніе. Это задача взаимная предъидущей, и, разсуждая надъ уравненіями (28) и (21), какъ выше, легко найдемъ слѣдующее геометрическое мѣсто, которое получится изъ (33), замѣняя $A_{i,k}$, $B_{i,k}$, x чрезъ $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, ξ:

$$(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22}-2a_{12}b_{12})\xi^2_1+(a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33}-2a_{13}b_{13})\xi^2_2+$$

$$+(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-2a_{23}b_{23})\xi^2_3+$$

$$+2(a_{13}b_{23}+a_{33}b_{13}-a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11})\xi_1\xi_3+2(a_{23}b_{12}+a_{12}b_{23}-a_{22}b_{13}-a_{13}b_{22})\xi_1\xi_3+ \tag{35}$$

$$+2(a_{12}b_{22}+a_{22}b_{12}-a_{33}b_{23}-a_{23}b_{33})\xi_3\xi_3=0=\Phi$$

какъ видно коническое сѣченіе.

Если ангармоническое отношеніе дано, то обвертка будетъ четвертой степени:

$$\Phi^2=kf'.f_1' \tag{36}$$

Функціи (33) и (35) будемъ всегда обозначать символами F и Φ.

§ 385. *Задача.* Найти уравненіе четырехъ общихъ касательныхъ къ двумъ данымъ коническимъ сѣченіямъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія въ линейныхъ координатахъ данныхъ коническихъ сѣченій будутъ:

$$f'=0 \quad , \quad f_1'=0 \tag{37}$$

Уравненіе:

$$f'+\lambda f_1'=0 \tag{38}$$

представляетъ систему коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія касательныя съ данными двумя. Если это уравненіе преобразуемъ къ трилинейной Декартовой системѣ, то найдемъ:

$$\Delta f+\lambda F+\lambda^2\Delta_1 f_1=0 \tag{39}$$

гдѣ F есть выраженіе (33).

Уравменіе (39) представляетъ систему коническихъ сѣченій, коей обвертка есть:

$$F^2=4\Delta\,\Delta_1 ff_1 \tag{40}$$

Но обвертка системы коническихъ сѣченій (38) есть четыре общія касательныя къ коническимъ сѣченіямъ (·7). Слѣдовательно (40) и есть ихъ уравненіе.

Уравненіе (40) по формѣ представляетъ геометрическое мѣсто, касающееся коническихъ сѣченій (39), а кривая $F=0$ проходитъ черезъ точки касанія. Откуда видимъ, что восемь точекъ касанія двухъ коническихъ сѣченій съ общими ихъ касательными находятся на коническомъ сѣченіи $F=0$. Взаимно, восемь касательныхъ въ точкахъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій, касаются коническаго сѣченія $\Phi=0$.

Если $f_1=0$ есть пара прямыхъ линій, то $F=0$ есть пара касательныхъ, проведенныхъ изъ точки пересѣченія прямыхъ $f_1=0$, къ коническому сѣченію $f=0$.

Пр. Найти уравненіе общихъ касательныхъ къ коническимъ сѣченіямъ:

$$ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2=0 \quad , \quad a'x_2^2+b'x_2^2+c'x_3^2=0?$$

Рѣшеніе. Здѣсь:

$$A_{11}=bc \quad , \quad A_{22}=ca \quad , \quad A_{33}=ab$$

откуда:

$$F=aa'(bc'+b'c)x_1^2+bb'(ca'+c'a)x_2^2+cc'(ab'+a'b)x_3^2$$

слѣдовательно искомое уравненіе будетъ:

$$\left\{aa'(bc'+b'c)x_1^2+bb'(ca'+c'a)x_2^2+cc'(ab'+a'b)x_3^2\right\}^2=$$
$$=4\,abca'b'c'(ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2)(a'x_1^2+b'x_2^2+c'x_3^2)$$

которое легко разлагается на четыре линейные множителя:

$$x_1\sqrt{aa'(bc'+b'c)} \pm x_2\sqrt{bb'(ca'+c'a)} \pm x_3\sqrt{cc'(ab'+a'b)} = 0.$$

§ 386. Если коническія сѣченія $f=0$ и $f_1=0$ касаются, то коническое сѣченіе F касается каждаго въ точкѣ ихъ касанія. Это слѣдуетъ изъ того, что $F=0$ проходитъ чрезъ точки касанія общихъ касательныхъ къ $f=0$ и $f_1=0$. Если $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе, то и $F=0$ имѣетъ двойное соприкосновеніе съ ними въ точкахъ ихъ соприкосновенія. Это можно провѣрить, составляя $F=0$ для коническихъ сѣченій:

$$cx_3^2 + 2hx_1x_2 = 0 \quad \text{и} \quad c'x_3^2 + 2h'x_1x_2 = 0$$

которое будетъ той же формы:

$$2cc'hh'x_3^2 + 2hh'(ch'+c'h)x_1x_2 = 0$$

Замѣтивъ, что если $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе, то $F=0$ имѣетъ форму $lf+mf_1$, найдемъ систему условій, при которыхъ коническія сѣченія $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе. Для этого напишемъ $F=0$ въ формѣ:

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3 + 2hx_1x_2 + 2gx_1x_3 + 2fx_2x_3 = 0$$

гдѣ a, b, c.... имѣютъ значенія коэфиціентовъ при F въ (33). Эти условія очевидно суть рядъ опредѣлителей, выраженныхъ символомъ:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & b_{12} & b_{13} & b_{23} \\ a & b & c & h & g & f \end{matrix}\right\| = 0 \qquad (41)$$

значеніе котораго извѣстно изъ теоріи опредѣлителей.

Что $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ линейную зависимость съ F, если онѣ имѣютъ двойное соприкосновеніе, можно показать слѣдующимъ образомъ. Если $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе, то въ выраженіи $f-\lambda f_1=0$ величина λ имѣетъ такое значеніе, при которомъ это уравненіе представляетъ двѣ совпадающія прямыя. Но если коническое сѣченіе есть двѣ совпадающія прямыя, то его взаимное тождественно равно нулю, слѣдовательно мы должны имѣть тождественно:

$$f'_1\lambda^2 - \Phi.\lambda + f' = 0 \qquad (42)$$

Но значеніе λ, при которомъ это имѣетъ мѣсто, есть двойной корень уравненія:

$$\Delta_1\lambda^3 - Q_1\lambda^2 + Q\lambda - \Delta = 0 \qquad (43)$$

исключая λ изъ предъидущаго уравненія и двухъ дифференціаловъ настоящаго, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} f' & , & \Phi & , & f_1' \\ 3\Delta & , & 2Q & , & Q_1 \\ Q & , & 2Q_1 & , & 3\Delta_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (44)$$

Если два коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе, то ихъ взаимныя имѣютъ его также, и легко видѣть, что предъидущая зависимость между f', Φ и f_1' даетъ слѣдующую между f, F и f_1:

$$\begin{vmatrix} f & F & f_1 \\ 3\Delta & 2\angle Q_1 & Q \\ Q_1 & 2\Delta_1 Q & 3\Delta_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (45)$$

§ 387. *Задача.* Найти условіе, при которомъ прямая:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

проходитъ черезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій $f = 0$ и $f_1 = 0$?

Рѣшеніе. Другими словами, требуется найти уравненіе четырехъ точекъ пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій. Уравненіе въ линейныхъ координатахъ одного изъ системы коническихъ сѣченій $f + \lambda f_1 = 0$ найдемъ, подставивъ въ линейное уравненіе $f' = 0$ коническаго сѣченія $f = 0$ вмѣсто a_{11}, a_{22}, ..., выраженія $a_{11} + \lambda$, $a_{22} + \lambda$, ...

Но

$$f' = A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 + 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 = 0$$

откуда, подставляя, найдемъ:

$$f' + \lambda\Phi + \lambda^2 f_1' = 0 \qquad (46)$$

гдѣ Φ есть выраженіе (35). Обвертка этой системы коническихъ сѣченій есть:

$$\Phi^2 = 4f'f_1' \qquad (47)$$

Но такъ какъ обвертка системы коническихъ сѣченій суть четыре точки ихъ пересѣченія, то уравненіе (47) и есть искомое, т. е. прямая, которой координаты удовлетворяютъ уравненію (47), проходитъ чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія данныхъ коническихъ сѣченій.

§ 388. *Коваріанты и контраваріанты.* Въ главѣ XIII мы опредѣлили, что такое инваріантъ и коваріантъ формы или системы формъ. Въ настоящемъ параграфѣ мы пояснимъ примѣрами данное опредѣленіе и скажемъ, что такое *контраваріантъ.* Инваріантъ и коваріантъ имѣютъ то свойство, что ихъ геометрическое значеніе не зависитъ отъ координатныхъ осей, къ которымъ отнесено уравненіе или уравненія; но инваріанты, какъ мы видѣ-

ли, суть функціи только коэфиціентовъ уравненія, а коваріанты содержатъ и перемѣнныя. Если намъ дана кривая или система кривыхъ и мы найдемъ изъ ихъ общихъ уравненій такое геометрическое мѣсто $U=0$, коего связь съ данными кривыми не зависитъ отъ координатныхъ осей, къ которымъ отнесены уравненія, то кривая $U=0$ называется *коваріантомъ* данной системы кривыхъ. Если мы желаемъ имѣть уравненіе кривой $U=0$, отнесенной къ какимъ-нибудь новымъ координатнымъ осямъ, то мы очевидно получимъ одинъ и тотъ же результатъ, преобразуя уравненіе $U=0$ къ новымъ осямъ, или преобразуя данную кривую или кривыя и изъ преобразованныхъ уравненій составляемъ U такъ, какъ оно было составлено изъ начальныхъ.

Такъ напримѣръ, если преобразуемъ уравненія двухъ коническихъ сѣченій къ новому координатному треугольнику, то должны подставить вмѣсто x_1, x_2, x_3 выраженія:

$$\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3 \quad , \quad \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3 \quad , \quad \alpha_{31}x_1+\alpha_{32}x_2+\alpha_{33}x_3$$

Если теперь подставимъ эти выраженія въ уравненіе $F=4\triangle\triangle_1 ff_1$, а потомъ составимъ тоже уравненіе изъ преобразованныхъ коническихъ сѣченій, то очевидно, что эти два уравненія будутъ отличаться только постояннымъ множителемъ зависящимъ отъ коэфиціентовъ $\alpha_{i,k}$. Это происходитъ вслѣдствіе того, что уравненіе $F^2=4\triangle\triangle_1 ff_1$ представляетъ четыре общія касательныя къ коническимъ сѣченіямъ $f=0$ и $f_1=0$.

Точно такое же свойство имѣетъ и кривая $F=0$, которая есть геометрическое мѣсто точекъ, изъ коихъ четыре касательныя, проведенныя къ двумъ даннымъ коническимъ сѣченіямъ $f=0$ и $f_1=0$, составляютъ гармоническую связку (33). Поляра данной точки относительно даннаго коническаго сѣченія $f=0$ есть коваріантъ. На этихъ свойствахъ основано аналитическое опредѣленіе коваріантовъ. Функція, составленная изъ одной или нѣсколькихъ данныхъ функцій по извѣстному правилу, называется *коваріантомъ*, если она будетъ такого свойства, что результатъ, полученный линейнымъ преобразованіемъ перемѣнныхъ въ ней, будетъ отличаться отъ результата, полученнаго составляя ту же функцію изъ данной или данныхъ функціи линейно преобразованныхъ, только постояннымъ множителемъ.

Есть еще другой родъ коваріантовъ, которые называются *контраваріантами*. Контраваріанты суть ничто иное какъ коваріанты формъ въ линейныхъ координатахъ ξ_1, ξ_2, ξ_3 и въ то время, когда перемѣнныя x_1, x_2, x_3 преобразуются линейно, перемѣнныя ξ_1, ξ_2, ξ_3 преобразуются обратно (§ 186). Пусть стороны координатнаго треугольника будутъ:

$$y_1=0 \quad , \quad y_2=0 \quad , \quad y_3=0 \quad .$$

Если черезъ η_1, η_2, η_3 назовемъ координаты какой-нибудь прямой, отнесенной къ этому треугольнику, то ея уравненіе будетъ:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 = 0 \tag{48}$$

Если положимъ, что x_1, x_2, x_3 суть стороны другаго треугольника, то y_1, y_2, y_3 будутъ линейныя функціи перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3; пусть онѣ будутъ:

$$\begin{gathered} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \quad , \quad y_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \ , \\ y_3 = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{gathered} \tag{49}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (48) и означая коэфиціенты при x_1, x_2, x_3, чрезъ ξ_1, ξ_2, ξ_3, найдемъ:

$$\begin{gathered} \xi_1 = \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \alpha_{31}\eta_3 \quad , \quad \xi_2 = \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \alpha_{32}\eta_3 \ , \\ \xi_3 = \alpha_{13}\eta_1 + \alpha_{23}\eta_2 + \alpha_{33}\eta_3 \end{gathered} \tag{50}$$

откуда, означая черезъ Δ опредѣлитель элемента α_{ik}, найдемъ:

$$\begin{aligned} \Delta\eta_1 &= \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \beta_{13}\xi_3 \\ \Delta\eta_2 &= \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \beta_{23}\xi_3 \\ \Delta\eta_3 &= \beta_{31}\xi_1 + \beta_{32}\xi_2 + \beta_{33}\xi_3 \end{aligned} \tag{51}$$

Слѣдовательно, если перемѣнныя x_1, x_2, x_3 преобразуются уравненіями (51), то η_1, η_2, η_3 должны преобразоваться уравненіями (50). Если теперь функція, составленная изъ коэфиціентовъ уравненія кривой или системы кривыхъ и перемѣнныхъ ξ_1, ξ_2, ξ_3, будетъ имѣть свойство коваріанта относительно линейнаго преобразованія (50), то она называется *контраваріантомъ* данной кривой или системы кривыхъ. Такъ, напримѣръ, уравненіе:

$$f' = A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + \ldots\ldots = 0$$

или условіе, что прямая, данная координатами ($\xi_1\xi_2\xi_3$), касается коническаго сѣченія:

$$f = a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + \ldots\ldots = 0$$

есть его контраваріантъ.

Уравненіе $\Phi = 0$ (35) геометрическаго мѣста прямыхъ, которыя пересѣкаютъ два коническихъ сѣченія $f = 0$ и $f_1 = 0$ въ четырехъ гармоническихъ точкахъ, есть контраваріантъ этой системы.

§ 389. Каждое коническое сѣченіе, коваріантъ съ коническими сѣченіями $f=0$ и $f_1=0$, можетъ быть выражено въ функціи f и f_1 и коваріанта $F=0$, а контраваріантъ можетъ быть выраженъ въ функціи f', f_1' и Φ.

Пр. 1. Выразить въ функціи f, f_1 и F полярное коническое сѣченіе коническаго сѣченія $f=0$ относительно $f_1=0$?

Рѣшеніе. Изъ свойствъ инваріантовъ и коваріантовъ мы знаемъ, что всякая найденная зависимость между ними, при какой-нибудь системѣ координатныхъ осей имѣетъ мѣсто и тогда, когда координаты будутъ преобразованны. Слѣдовательно можно отнести коническія сѣченія $f=0$ и $f_1=0$ къ ихъ общему полярному треугольнику, тогда ихъ форма будетъ:

$$f=ax^2+by^2+cz^2 \quad , \quad f_1=x^2+y^2+z^2$$

при этомъ найдемъ, что ихъ коваріантъ F будетъ:

$$F \quad a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2 \tag{52}$$

Но условіе, что прямая ξ, η, ζ касается коническаго сѣченія $f=0$, очевидно, есть:

$$bc\xi^2+ca\eta^2+ab\zeta^2=0$$

Геометрическое мѣсто полюса относительно $f_1=0$ касательной къ $f-0$ есть:

$$bcx^2+cay^2+abz^2=0$$

но его можно написать въ формѣ:

$$(bc+ca+ab)(x^2+y^2+z^2)=F$$

слѣдовательно искомое геометрическое мѣсто будетъ:

$$Qf_1=F$$

Точно также, можно показать, что полярное коническое сѣченіе коническаго сѣченія f_1 относительно f есть:

$$Q_1f=F$$

Пр. 2. Выразить въ функціи f, f_1, F обвертку прямой, которая пересѣкается коническими сѣченіями $f=0$ и $f_1=0$ въ четырехъ гармоническихъ точкахъ?

Рѣшеніе. Мы видѣли, что уравненіе этой обвертки есть коническое сѣченіе (33) $\Phi=0$, въ этомъ случаѣ:

$$\Phi=(b+c)\xi^2+(c+a)\eta^2+(a+b)\zeta^2=0 \tag{53}$$

слѣдовательно ея уравненіе въ координатахъ x, y, z есть:

$$(c+a)(a+b)x^2+(a+b)(b+c)y^2+(c+a)(b+c)z^2=0$$

или:

$$(bc+ca+ab)(x^2+y^2+z^2)+(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)-F \cdot 0$$

или:

$$Qf_1+Q_1f-F=0$$

Пр. 3. Найти условіе, при которомъ коваріантъ F распадается на двѣ прямыя линіи?

Рѣшеніе. Инваріантъ $\triangle$ коваріанта $F=0$ (52) долженъ быть равенъ нулю, что даетъ:

$$abc(b+c)(c+a)(a+b)=0$$

или

$$abc[(a+b+c)(bc+ca+ab) - abc] = 0$$

откуда:

$$\Delta \cdot \Delta_1 (QQ_1 - \Delta\Delta_1) = 0$$

искомое условіе. Уравненіе $QQ_1 - \Delta\Delta_1 = 0$ есть также условіе распаденія коваріанта Φ на два линейные множителя. Это условіе будетъ удовлетворяться, когда два круга пересѣкаются подъ прямымъ угломъ; въ этомъ случаѣ, каждая изъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ одинъ изъ центровъ, пересѣкается кругами въ четырехъ гармоническихъ точкахъ, а геометрическое мѣсто точекъ, изъ коихъ четыре касательныя къ кругамъ образуютъ гармоническую связку, есть двѣ прямыя линіи. Геометрическое мѣсто и обвертка будутъ такія же, если $d^2 \quad 2(r^2 + r^2_1)$.

Пр. 4. Преобразовать два коническія сѣченія въ формы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad , \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \tag{54}$$

Рѣшеніе. Количества a, b, c опредѣляются изъ уравненія:

$$\Delta_1\lambda^3 - Q_1\lambda^2 + Q\lambda - \Delta = 0 \tag{55}$$

какъ въ § 346 пр. 2. Если изъ уравненій:

$$x^2 + y^2 + z^2 = f \;,\; ax^2 + by^2 + cz^2 = f_1 \;,\; a(b+c)x^2 + b(c+a)y^2 + c(a+b)z^2 = F$$

опредѣлимъ x^2, y^2, z^2, то найдемъ эти величины въ функціи f, f_1, F.

Пр. 5. Преобразовать уравненія:

$$3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 4y = 0 \quad , \quad 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x \quad 2 = 0$$

въ форму (54)?

Рѣшеніе. Отыщемъ опредѣлители Δ и Δ_1 и ихъ миноры:

$$\Delta = -9 \quad , \quad Q = \quad 54 \quad , \quad Q_1 = -99 \quad , \quad \Delta_1 = -54,$$

откуда корни уравненія (55) будутъ 1, 2, 3. Вычисляя F, найдемъ:

$$F = -9(23x^2 - 50xy + 44y^2 \quad 15x + 12y - 4)$$

Полагая:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x - 4y$$

$$X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 = 5x^2 - 14xy + 8y^2 - 6x - 2$$

$$5X^2 + 8Y^2 + 9Z^2 = 23x^2 - 5xy + 44y^2 - 13x + 12y - 4$$

Найдемъ:

$$X^2 = (3y + 1)^2$$

изъ

$$6f + f_1 - F$$

$$Y^2 = (2x - y)^2$$

изъ

$$F - 3f - 2f_1$$

и:

$$Z^2 = -(x + y + 1)^2$$

изъ

$$2f + 3f_1 - F$$

Пр. 6. Найти уравненіе четырехъ касательныхъ въ точкахъ пересѣченія коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$?

Отв.

$$(Qf-\triangle f_1)^2=4\triangle f(Q_1 f-F)$$

Пр. 7. Найти обвертку основанія треугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе $f=0$, и коего двѣ остальныя стороны касаются коническаго сѣченія $f_1=0$?

Рѣшеніе. Возьмемъ за координатный треугольникъ, треугольникъ вписанный въ $f=0$ въ извѣстномъ положеніи, и пусть:

$$f=2(fyz+gzx+2xy)$$

$$f_1=x^2+y^2+z^2-2yz-2xy-2\lambda hxy$$

гдѣ, очевидно, прямыя $x=0$, $y=0$ касаются коническаго сѣченія $f_1=0$. Очевидно, что $\lambda f+f_1=0$ коническое сѣченіе, коего касается третяя сторона треугольника $z=0$; мы покажемъ, что это коническое сѣченіе опредѣленное.

Въ самомъ дѣлѣ, пишемъ:

$\triangle=2fgh$, $Q=-(f+g+h)^2-2\lambda fgh$, $Q_1=2(f+g+h)(2+\lambda h)$, $\triangle_1=-(2+\lambda h)^2$

откуда:

$$Q^2_1-4Q\triangle_1=4\lambda\triangle\triangle_1$$

слѣдокательно уравненіе $\lambda f+f_1=0$ можетъ быть написано въ формѣ:

$$(Q^2_1-4Q\triangle_1)f+4\triangle\triangle_1 f_1=0$$

какъ видно опредѣленное коническое сѣченіе, коего касается третяя сторона треугольника. Если $Q^2_1=4\triangle\triangle_1$, то очевидно третяя сторона треугольника всегда касается коническаго сѣченія $f_1=0$.

Пр. 8. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего стороны касаются коническаго сѣченія $f=0$, а двѣ остальныя вершины находятся на коническомъ сѣченіи $f_1=0$?

Рѣшеніе. Озазчимъ черезъ $f(1)$ и $f_1(1)$ результатъ подстановленія x', y', z' въ данныя коническія сѣченія f и f_1. Рѣшеніе будетъ состоять въ слѣдующемъ: составить уравненіе двухъ касательныхъ къ коническому сѣченію f 0, проведенныхъ изъ точки $(x_1y_1z_1)$, за тѣмъ составимъ уравненіе прямыхъ, соединяющихъ точки пересѣченія касательныхъ съ коническимъ сѣченіемъ $f_1=0$, и наконецъ составимъ условіе, при которомъ одна изъ этихъ прямыхъ (которая должна быть третяя сторона искомаго треугольника) касается коническаго сѣченія $f=0$. Если чрезъ P назовемъ поляру точки $(x_1y_1z_1)$ коническаго сѣченія $f=0$, то пара касательныхъ изъ этой точки къ $f=0$ будетъ $ff(1)-P^2=0$. Чтобы найти хорды пересѣченія этихъ касательныхъ съ $f_1=0$, надобно опредѣлить λ такъ, чтобы уравненіе $ff(1)-P^2+\lambda f_1=0$ представляло пару прямыхъ линій. Призначная (discriminant) этого уравненія есть слѣдующее квадратное уравненіе:

$$\triangle_1\lambda^2+F(1).\lambda+\triangle f(1)f_1(1)=0$$

для опредѣленія λ Наконецъ, чтобы найти условіе касанія одной изъ этихъ хордъ коническаго сѣченія $f=0$, составимъ призначную уравненія:

$$\mu f+(ff(1)-P^2+\lambda f_1)=0$$

и приравнявъ ее нулю, составимъ условіе, чтобы это уравненіе, относительно μ, имѣло равные корни. Эта призначная есть:

$$\Delta\mu^2 + (2\Delta f(1) + \lambda Q)\mu + [\Delta f^2(1) + \lambda(Qf(1) + \Delta f_1(1) + Q_1\lambda^2] = 0$$

искомое условіе равенства корней будетъ:

$$\lambda(4\Delta Q_1 - Q^2) + 4\Delta^2 f_1(1) = 0$$

подставляя, полученное отсюда значеніе λ въ:

$$\Delta_1\lambda^2 + F(1)\lambda + \Delta f(1).f_1(1) = 0$$

найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$16\Delta^2\Delta_1 f_1 - 4\Delta(4\Delta Q_1 - Q^2)F + f(4\Delta Q_1 - Q^2)^2 = 0$$

которое, при $Q^2 = 4\Delta Q_1$, обращается въ $f_1 = 0$.

Пр. 9. Найти геометрическое мѣсто вершины треугольника, коего двѣ стороны касаются коническаго сѣченія $f = 0$, а третья касается коническаго сѣченія $af + bf_1 = 0$, а двѣ остальныя вершины находятся на коническомъ сѣченіи $f_1 = 0$?

Рѣшеніе. Какъ въ предъидущемъ примѣрѣ найдемъ, что искомое мѣсто есть одно изъ коническихъ сѣченій, касающихся четырехъ общихъ касательныхъ къ коническимъ сѣченіямъ $f = 0$ и $f_1 = 0$:

$$\Delta\Delta_1 f_1\lambda^2 + \mu F.\lambda + \mu^2 f = 0$$

гдѣ $\lambda:\mu$ дано квадратнымъ уравненіемъ:

$$a(\alpha b - \beta a)\lambda^2 + a(4a\Delta + 2Qb)\lambda\mu - b^2\mu^2 = 0$$

въ которомъ:

$$\alpha = 4\Delta\Delta_1 \quad , \quad \text{а} \quad \beta = Q^2 - 4\Delta Q_1$$

Пр. 10. Найти геометрическое мѣсто вершины многоугольника, коего стороны касаются коническаго сѣченія $f = 0$, а остальныя вершины скользятъ по коническому сѣченію $f_1 = 0$?

Рѣшеніе. Этотъ примѣръ сводится на предъидущій. Въ самомъ дѣлѣ, прямая, соединяющая смежныя вершины съ вершиною геометрическое мѣста, которое ищется, касается коническаго сѣченія формы $af + af_1 = 0$. Найдемъ, если λ', μ'; λ'', μ''; λ''', μ''' будутъ величины для многоугольниковъ $n-1$, n и $n+1$ сторонъ, что $\lambda''' = \mu'\mu''^2$, $\mu''' = \Delta\lambda'\lambda''(\alpha\mu'' - \Delta_1\beta\lambda'')$. Для треугольника имѣемъ $\lambda' = \alpha$, $\mu' = \Delta_1\beta$; для четыреугольника $\lambda'' = \beta^2$, $\mu'' = \alpha(4\Delta\alpha + \alpha Q\beta)$, и подобнымъ образомъ, послѣдовательно, найдемъ для всякаго многоугольника.

§ 390. *Якобіевская кривая.* Даны три коническія сѣченія. Найти геометрическое мѣста точки, коей три поляры относительно трехъ данныхъ коническихъ сѣченій пересѣкаются въ одной точкѣ.

Рѣшеніе. Пусть данныя коническія сѣченія будутъ:

$$f = 0 \quad , \quad f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0 \tag{56}$$

три ихъ поляры относительно точки $(x_1y_1z_1)$ будутъ:

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=0\quad,\quad x\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+y\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+z\frac{\partial f_1}{\partial z_1}=0\quad,$$
$$x\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+y\frac{\partial f_2}{\partial y_1}+z\frac{\partial f_2}{\partial z_1}=0 \tag{57}$$

Если эти поляры проходятъ чрезъ одну точку, то будемъ имѣть (§ 68):

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\,, & \frac{\partial f}{\partial y_1}\,, & \frac{\partial f}{\partial z_1}\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,, & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\,, & \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1}\end{vmatrix}=0 \tag{58}$$

Такому уравненію должны удовлетворять координаты точки $(x_1y_1z_1)$ встрѣчи трехъ поляръ. Какъ видно это кривая третей степени, которая называется *якобіевскою кривою* трехъ коническихъ сѣченій.

Легко видѣть, что если три поляры, какой-нибудь точки относительно коническихъ сѣченій (56) пересѣкаются въ одной точкѣ, то поляра той же точки относительно всѣхъ коническихъ сѣченій системы:

$$\lambda f+\mu f_1+\nu f_2=0 \tag{59}$$

пройдетъ также чрезъ точку пересѣченія трехъ поляръ (57).

Если поляры точки A, лежащей на якобіевской кривой, всѣхъ коническихъ сѣченій (59), проходятъ чрезъ точку B, то прямая AB пересѣкается гармонически каждымъ коническимъ сѣченіемъ изъ системы (59), а слѣдовательно поляры точки B пройдутъ всѣ чрезъ точку A, поэтому и точка B находится на якобіевской кривой и называется *соотвѣтственной* точкѣ A. Очевидно, прямая AB пересѣкается системою коническихъ сѣченій (59) въ точкахъ образующихъ инволюціонный рядъ, коего двойныя точки суть A и B. Такъ какъ двойныя точки суть совпадающія соотвѣтственныя инволюціоннаго ряда, то изъ этого слѣдуетъ, что если какое-нибудь изъ коническихъ сѣченій системы (59) касается прямой AB, то оно можетъ ее коснуться только въ точкахъ A или B. Если одно изъ коническихъ сѣченій системы (59) распадается на двѣ прямыя линіи, пересѣкающіяся на прямой AB, то точки ихъ пересѣченія должны быть или A или B, исключая того случая, въ которомъ сама линія AB есть одна изъ распавшагося коническаго сѣченія на двѣ прямыя.

Впрочемъ можно прямо доказать, что если коническое сѣченіе:

$$\lambda f + \mu f_1 + \nu f_2 = 0 \tag{60}$$

распадается на пару прямыхъ линій, то точки ихъ пересѣченія находятся на якобіевской кривой. Въ самомъ дѣлѣ, если (60) есть прямая линія, то координаты точки пересѣченія должны удовлетворить уравненіе:

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \nu \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial f_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 \tag{61}$$

$$\lambda \frac{\partial f_2}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_2}{\partial y} + \nu \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$$

исключая изъ этихъ уравненій λ, μ, ν найдемъ якобіевскую кривую (58).

Прямая AB пересѣкаетъ якобіевскую кривую еще въ третей точкѣ, а изъ того, что было сказано выше, слѣдуетъ что сама линія AB есть одна изъ пары прямыхъ линій, проходящихъ чрезъ эту точку, и находится въ системѣ коническихъ сѣченій (59).

Если три данныя коническія сѣченія будутъ:

$$\begin{aligned}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 &= 0\,,\\ (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 &= 0\,,\\ (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)^2 &= 0\end{aligned} \tag{62}$$

въ символической формѣ (§ 199), то очевидно ихъ якобіевская кривая будетъ:

$$\begin{aligned}&(a_{11}b_{13}c_{12})\,x^3{}_1 + (a_{22}b_{12}c_{23})\,x^3{}_2 + (a_{33}b_{23}c_{13})\,x^2{}_3\\ &-[(a_{11}b_{22}c_{13}) + (a_{11}b_{12}c_{23})]\,x^2{}_1x_2 - [(a_{33}b_{11}c_{12}) + (a_{11}b_{23}c_{13})]\,x^2{}_1x_3 -\\ &-[(a_{11}b_{22}c_{23}) + (a_{22}b_{13}c_{12})]\,x_1x^2{}_2 - [(a_{22}b_{33}c_{12}) + (a_{22}b_{23}c_{13})]\,x^2{}_2x_3 -\\ &-[(a_{33}b_{11}c_{23}) + (a_{33}b_{13}c_{12})]\,x^2{}_3x_1 - [(a_{22}b_{33}c_{13}) + (a_{33}b_{12}c_{23})]\,x^2{}_3x_2 -\\ &-[(a_{11}b_{23}c_{33}) + 2\,(a_{23}b_{13}c_{12})]\,x_1x_2x_3 = 0\end{aligned} \tag{63}$$

Символъ, напримѣръ, $(a_{11}b_{13}c_{12})$ означаетъ опредѣлитель полученный изъ члена $a_{11}b_{13}c_{12}$, перемѣщая буквы a, b, c.

Пр. 1. Описать коническое сѣченіе, проходящее чрезъ четыре данныя точки и касающееся даннаго коническаго сѣченія $f_2 = 0$?

Рѣшеніе. Пусть четыре данныя точки будутъ пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$. Легко видѣть, что задача имѣетъ шесть рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, если въ условіе (§ 351) касанія двухъ коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_2=0$ подставимъ $a_{11}+\lambda b_{11}, a_{12}+\lambda b_{12},\ldots$ вмѣсто $a_{11}, a_{12},\ldots$, то λ войдетъ въ это условіе въ шестой степени. Якобіевская кривая трехъ коническихъ сѣченій $f=0$, $f_1=0$, $f_2=0$ пересѣкаетъ $f_2=0$ въ шести искомыхъ точкахъ касанія. Такъ какъ поляра точки касанія съ $f_2=0$ будетъ поляра той же точки относительно коническаго сѣченія $\lambda f+\mu f_1=0$, то она проходитъ чрезъ точку пересѣченія поляръ относительно коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$.

Пр. 2. Если три коническія сѣченія имѣютъ общій полярный треугольникъ, то ихъ якобіевская кривая обращается въ три прямыя линіи.

Рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, если три коническія сѣченія отнесены къ общему ихъ полярному треугольнику, то онѣ имѣютъ формы:

$$ax^2+by^2+cz^2=0 \quad , \quad a_1x^2+b_1y^2+c_1z^2=0 \quad , \quad a_2x^2+b_2y^2+c_2z_2=0$$

очевидно, ихъ якобіевская кривая есть $xyz=0$.

Пр. 3. Если коническія сѣченія имѣютъ двѣ общія точки, то ихъ якобіевская кривая распадается на коническое сѣченіе, проходящее чрезъ двѣ общія точки, и на прямую линію. Геометрически, очевидно, что прямая, проходящая чрезъ двѣ точки, удовлетворяетъ условію. Тоже легко показать аналитически. Въ частномъ случаѣ, якобіевская крикая трехъ круговъ есть кругъ, пересѣкающій три данные круга подъ прямымъ угломъ.

Пр. 4. Якобіевская кривая состоитъ изъ коническаго сѣченія и прямой и въ томъ случаѣ, когда одно изъ коническихъ сѣченій будетъ полный квадратъ, т. е. двѣ совпадающія прямыя $f=L^2=0$. Въ этомъ случаѣ, изъ формы (58) якобіевской кривой видно, что прямая $L=0$ будетъ въ ней множителемъ. Слѣдовательно можно описать четыре коническія сѣченія касающіяся даннаго коническаго сѣченія $f_1=0$ въ двухъ точкахъ пересѣченія $f_1=0$ съ $L=0$, и касающееся $f_2=0$ въ точкахъ пересѣченія его съ якобіевскимъ коническимъ сѣченіемъ.

Если три коническія сѣченія суть: коническое сѣченіе, кругъ и квадратъ безконечно удаленной прямой, то ихъ якобіевская кривая проходитъ чрезъ основанія нормалей, которыя можно провести изъ центра круга къ коническому сѣченію.

§ 391. Выше мы видѣли, что два коническія сѣченія:

$$f=0 \quad \text{и} \quad f_1=0$$

имѣютъ четыре инваріанта Δ, Q; Δ_1, Q_1 и одинъ коваріантъ $F=0$, который есть также коническое сѣченіе (33); но кромѣ этого есть еще кубическій коваріантъ,—это якобіевская кривая трехъ коническихъ сѣченій $f=0$, $f_1=0$ и $F=0$. Мы видѣли выше (§ 390, пр. 2), что коническое сѣченіе $F=0$ имѣетъ общій полярный треугольникъ съ коническими сѣченіями $f=0$ и $f_1=0$, слѣдовательно если составимъ якобіевскую кривую коническихъ сѣченій $f=0$, $f_1=0$, $F=0$, то найдемъ кубическій коваріантъ, который будетъ ни что иное, какъ стороны общаго полярнаго треугольника

коническихъ сѣченій $f=0$ и $f_1=0$. Изъ § 389 также видно, что якобіевская J тождественно уничтожается, если $f=0$ и $f_1=0$ имѣютъ двойное соприкосновеніе. Въ § 389, пр. 4 мы показали, какъ найти уравненіе сторонъ общаго полярнаго треугольника, и если сравнимъ эти два метода, то найдемъ:

$$J=F^3-F^2(Qf_1+Q_1f)+F(\Delta_1Qf^2+\Delta Q_1f_1^2)+Fff_1(QQ_1-3\Delta\Delta_1)-$$
$$-\Delta_1^2\Delta f^3-\Delta^2\Delta_1f_1^3+\Delta_1(2\Delta Q_1-Q^2)f^2f_1+\Delta(2\Delta_1Q-Q_1^2)ff_1^2 \qquad (64)$$

Изъ этого видимъ, что система изъ двухъ коническихъ сѣченій имѣетъ, кромѣ четырехъ инваріантовъ, четыре коваріанта:

$$f \;,\; f_1 \;,\; F \;,\; J$$

которые связаны зависимостію (64). Точно также имѣемъ четыре контраваріанта:

$$f' \;,\; f_1' \;,\; \Phi \text{ и } \Gamma$$

изъ коихъ послѣдній представляетъ вершины общаго полярнаго треугольника въ линейныхъ координатахъ. Эти коваріанты связаны зависимостью подобною (64) между f', f_1', Φ, Γ и инваріантами.

Пр. Написать для коническихъ сѣченій:

$$x^2+y^2+z^2=0 \quad , \quad ax^2+by^2+cz^2=0$$

всѣ двѣнадцать формъ:

$$\Delta,\Delta_1 \;,\; Q,Q_1 \;,\; f,f_1 \;,\; F,F_1 \;,\; f',f'_1 \;,\; \Phi_1,\Gamma?$$

Отв.

$$\Delta=1 \;,\; \Delta_1=abc \;,\; Q=a+b+c \;,\; Q_1=bc+ca+ab$$

$$f=x^2+y^2+z^2 \;,\; f_1=ax^2+by^2+cz^2 \;,\; F=a(b+c)x^2+b(a+c)y^2+c(a+b)z^2$$

$$J=(b-c)(c-a)(a-b)xyz$$

$$f'=\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \;,\; f_1'=bc\xi^2+ca\eta^2+ab\zeta^2 \;,\; \Phi=(b+c)\xi^2+(c+a)\eta^2+(a+b)\zeta^2$$

$$\Gamma=(b-c)(c-a)(a-b)\xi\eta\zeta$$

§ 392. Кромѣ инваріантовъ, коваріантовъ и контраваріантовъ, есть еще смѣшанные коваріанты; это такія функціи отъ коэфиціентовъ, перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3 и перемѣнныхъ ξ_1, ξ_2, ξ_3, которыя имѣютъ характеръ коваріантовъ, когда x_1, x_2, x_3 преобразовываются подстановленіями § 388 (49), а ξ_1, ξ_2, ξ_3 подстановленіями (50). Эти смѣшанные коваріанты можно разсматривать, какъ коваріанты системы двухъ коническихъ сѣченій $f=0$, $f_1=0$ и прямой $\xi x+\eta y+\zeta z=0$. Напримѣръ, мы можемъ составить якобіевскую кривую этой системы, или геометрическое мѣсто точекъ, коихъ по-

ляры относительно f и f_1 пересѣкаются на прямой $\xi x+\eta y+\zeta z=0$. Эта якобіевская функція, очевидно, есть:

$$N=\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{vmatrix}$$

а для уравненій въ канонической формѣ:

$$\xi(b-c)yz+\eta(c-a)zx+\zeta(a-b)xy=0$$

соотвѣтствующая взаимная форма этой послѣдней относительно f', f'_1 будетъ:

$$a\eta\zeta(b-c)x+b\xi\zeta(c-a)y+c\xi\eta(a-b)z=0$$

Это уравненіе представляетъ прямую, проходящую черезъ полюсы прямой $\xi x+\eta y+\zeta z=0$, относительно $f=0$ и $f_1=0$. Мы можемъ взять полюсъ, какой-нибудь, прямой $\xi x+\eta y+\zeta z=0$ относительно $f=0$ и поляру этого полюса относительно $f_1=0$ и получить линію K, которой уравненіе, если f и f_1 даны въ канонической формѣ, будетъ:

$$K=a\xi x+b\eta y+c\zeta z=0$$

мы получимъ другую прямую K_1, если возьмемъ полюсъ прямой $\xi x+\eta y+\zeta z=0$ относительно $f_1=0$ и поляру этого полюса относительно $f=0$. Если f и f_1 будутъ въ канонической формѣ, то:

$$K_1=bc\xi x+ca\eta x+ab\zeta z=0$$

Всѣхъ смѣшанныхъ коваріантовъ системы, состоящей изъ двухъ коническихъ сѣченій, есть восемь, изъ нихъ четыре мы нашли, а четыре суть слѣдующія:

якобіевская функція отъ f, K и $\xi x+\eta y+\zeta z$ въ канонической формѣ:

$$\eta\zeta(b-c)x+\zeta\xi(c-a)y+\xi\eta(a-b)z$$

якобіевская функція отъ f_1, K_1 и $\xi x+\eta y+\zeta z$:

$$\eta\zeta a^2(b-c)x+\zeta\xi b^2(c-a)y+\xi\eta c^2(a-b)z$$

и двѣ ихъ взаимныя:

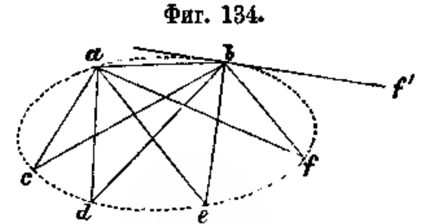
$$\xi ayz(b-c)+\eta bzx(c-a)+\zeta cxy(a-b)$$

$$\xi bc(b-c)yz+\eta ca(c-a)xz+\zeta ab(a-b)xy$$

Построеніе коническихъ сѣченій.

§ 393. *Задача. 1.* По даннымъ пяти точкамъ на коническомъ сѣченіи построить шестую?

Фиг. 134.



Рѣшеніе 1. Пусть a, b, c, d, e (фиг. 134) будутъ данныя точки на коническомъ сѣченіи. Возьмемъ двѣ изъ нихъ, напримѣръ, a и b за вершины двухъ связокъ. Проведемъ лучи ac, ad, ae и bc, bd, be; эти двѣ связки устанавливаютъ (§ 230) ихъ проэктивность, если теперь возьмемъ, какой-нибудь лучъ af и построимъ ему соотвѣтственный bf, то точка пересѣченія ихъ f будетъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ пять данныхъ точекъ.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

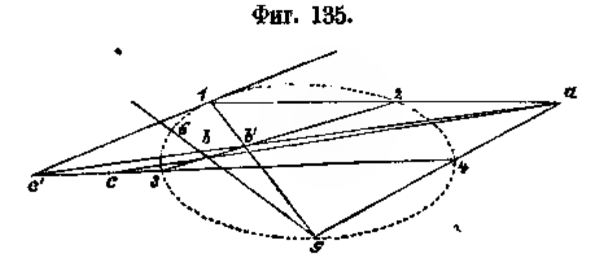
$$(a.cdef) = (b.cdef)$$

Такимъ образомъ можемъ построить сколько угодно точекъ на данномъ коническомъ сѣченіи.

Если вмѣсто луча af возьмемъ лучъ ab, то соотвѣтственный лучъ bf' будетъ касательная въ точкѣ b къ коническому сѣченію.

Рѣшеніе 2. Пусть (фиг. 135) данныя пять точекъ будутъ 1, 2, 3, 4, 5. Соединимъ точки 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 прямыми 12, 23, 34, 45. Черезъ пятую точку проведемъ, какую-нибудь прямую 56, которая встрѣчаетъ данное пятью точками коническое сѣченіе въ неизвѣстной точкѣ, которую означимъ черезъ 6.

Фиг. 135.



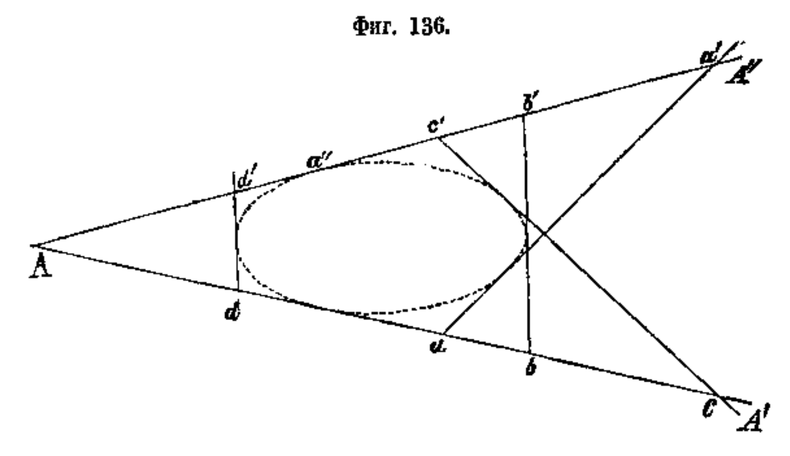
Такимъ образомъ будемъ имѣть, вписанный въ коническое сѣченіе шестиугольникъ 123456, коего противуположныя стороны будутъ 12 и 45, 23 и 56, 34 и 61. По предложенію Паскаля точки пересѣченія этихъ сторонъ лежатъ на одной прямой линіи. Пусть точки встрѣчи 12 и 45; 23 и 56 будутъ a и b. Продолжимъ прямую ab до встрѣчи въ точкѣ c съ прямою 34. Очевидно, искомая точка 6 должна находится на прямой $1c$, но она находится и на 56, слѣдовательно искомая точка будетъ пересѣченіе произвольно проведенной прямой 56 съ $1c$. Проводя черезъ точку 5 прямыя въ произвольномъ направленіи можемъ построить сколько угодно точекъ на коническомъ сѣченіи, коего

пять точекъ даны. Если произвольную прямую 56 проведемъ черезъ точку 1, то 51 пересѣчетъ 23 въ точкѣ b', прямая ab' пересѣчется съ 34 въ точкѣ c'. Если теперь проведемъ прямую $1c'$, то это, очевидно, будетъ касательная къ коническому сѣченію въ точкѣ 1. И въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ построеніи искомая шестая точка совпадаетъ съ 1, слѣдовательно шестая сторона $c'1$ шестиугольника проходитъ черезъ совпадающія двѣ точки. Это самое простое рѣшеніе.

§ 394. *Задача 2.* По даннымъ пяти касательнымъ къ коническому сѣченію построить шестую?

Рѣшеніе 1. Пусть (фиг. 136) данныя касательныя будутъ AA', AA'', aa', bb', cc'. Пусть a, a'; b, b'; c, c' будутъ точки пересѣченія трехъ изъ пяти касательныхъ aa', bb', cc' съ двумя AA', AA''.

Фиг. 136.



Извѣстно, что ангармоническія отношенія точекъ пересѣченія четырехъ постоянныхъ касательныхъ съ пятою перемѣнною равны (§ 230), слѣдовательно, если на касательной AA' возьмемъ, какую-нибудь четвертую точку d и опредѣлимъ на касательной AA'' точку d', такъ чтобы имѣли:

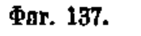
$$(abcd) = (a'b'c'd')$$

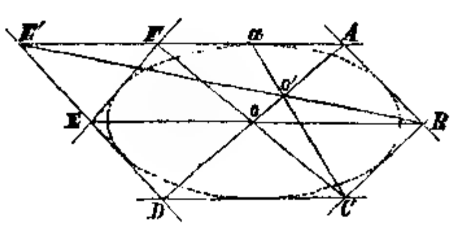
то прямая dd' будетъ искомая шестая касательная. Такимъ образомъ можемъ построить сколько угодно касательныхъ къ коническому сѣченію, котораго пять касательныхъ даны.

Если вмѣсто точки d взята точка A и опредѣлена на AA'' точка a'' такъ, чтобы $(abcA) = (a'b'c'a'')$, то очевидно точка a'' будетъ точка касанія касательной AA''. Если бы точку A разсматривали, какъ находящуюся на касательной AA'' и опредѣлили точку a''' на касательной AA' такъ, чтобы $(abca''') = (a'b'c'A)$, то точка a''' будетъ точка касанія касательной AA'. Это легко видѣть изъ того, что по мѣрѣ приближенія точки d къ A,

точка d' будетъ приближатся къ точкѣ касанія a'' и совпадаетъ съ нею, когда d совпадетъ съ A.

Рѣшеніе 2. Пусть данныя касательныя будутъ FA, AB, BC, CD, DE (фиг. 137). Если на касательной DE возьмемъ произвольную точку E и положимъ, что EF есть искомая шестая касательная, то по предложенію Бріаншона діагонали AD, BF, CF пересѣкутся въ одной точкѣ.


Фиг. 137.



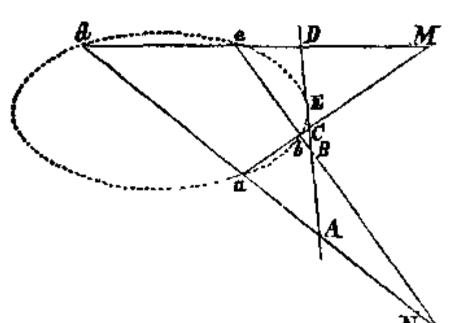
Такъ какъ діагонали AD и BE извѣстны и пересѣкаются въ точкѣ O, то прямая CO встрѣтитъ касательную FA въ точкѣ F, которая будетъ вершина описаннаго шестиугольника, противулежащая вершинѣ C; слѣдовательно EF будетъ шестая искомая касательная.

Если бы точку E на касательной DE взяли на пересѣченіи ея съ касательной AF, то построенная, такимъ образомъ, точка a будетъ точка касанія касательной AF. Въ самомъ дѣлѣ, по мѣрѣ приближенія произвольно взятой точки E къ точкѣ E', точка F приближается къ a и когда E и E' совпадутъ, то F совпадетъ съ точкою a. Это самое простое рѣшеніе задачи.

§ 395. *Задача 3.* По даннымъ четыремъ точкамъ и одной касательной построить пятую точку?

Рѣшеніе. Пусть (фиг. 138) a, b, c, d будутъ данныя четыре точки, AD данная касательная. Точки a, b, c, d образуютъ четыреугольникъ, противуположныя стороны котораго da и bc, ab и cd пересѣкаютъ касательную AD въ точкахъ A, B, C, D,

Фиг. 138.



которыя съ неизвѣстною точкою касанія E касательной AD, образуютъ инволюціонный рядъ, коего двойная точка есть E.

Если эту двойную точку построимъ, то будемъ имѣть пятую точку коническаго сѣченія, слѣдовательно можемъ построить, какъ показано выше (§ 393, зад. 1), сколько угодно точекъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ чрезъ точки a, b, c, d и касающемся прямой AD. Но такъ какъ есть двѣ двойныя точки E и E', составляющихъ инволюцію съ точками A, B, C, D, то есть два коническія сѣченія, удовлетворяющія данному условію.

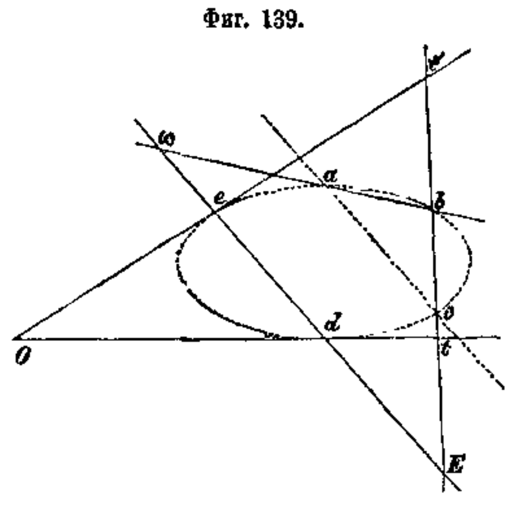
§ 396. *Задача 4.* Даны четыре касательныя и одна точка, построить пятую касательную?

Рѣшеніе. Если данную точку соединимъ прямыми линіями съ вершинами четыреугольника, образуемаго четырьмя данными касательными, то эти прямыя образуютъ инволюціонную связку, коей двойной лучь будетъ искомая пятая касательная. Но есть другой двойной лучь, слѣдовательно задача имѣетъ два рѣшенія, т. е. существуютъ два коническія сѣченія, касающіяся четырехъ касательныхъ, и проходящія черезъ одну точку.

§ 397. *Задача 5.* По даннымъ тремъ точкамъ и двумъ касательнымъ построить коническое сѣченіе?

Рѣшеніе. Пусть (фиг. 139) a, b, c будутъ данныя точки, а Ot и Ot' данныя касательныя.

Фиг. 139.



Если опредѣлимъ точки e и d касанія, то будемъ имѣть пять точекъ на коническомъ сѣченіи, а слѣдовательно можемъ построить сколько угодно другихъ точекъ. На прямой de, каждая изъ точекъ d и e представляетъ двѣ безконечно близкія точки на коническомъ сѣченіи, слѣдовательно она представляетъ двѣ противуположныя стороны вписаннаго въ коническое сѣченіе четыреугольника, коего двѣ другія противуположныя стороны суть касательныя Ot и Ot'.

Слѣдовательно сѣкущая bc пересѣкаетъ стороны этого четыреугольника въ точкахъ t и t' и кривую въ точкахъ b и c. Эти четыре точки съ пятою E составляютъ инволюціонный рядъ, коего двойная точка есть E. Слѣдовательио, если построимъ точку E и такую же точку ω на сѣкущей ab, то прямая $E\omega$ опредѣлитъ на касательныхъ Ot и Ot' двѣ точки d и e, которыя будутъ точки касанія. Слѣдовательно будемъ имѣть пять точекъ на коническомъ сѣченіи, а потому можемъ построить и какое угодно число другихъ точекъ. Но такъ какъ есть по двѣ двойныя точки на сѣкущихъ bc и ab, то будемъ имѣть четыре прямыя, соединяющія двойныя точки E,E' съ ω,ω', слѣдовательно будемъ имѣть четыре рѣшенія.

Если замѣтимъ, что сѣкущая ac дастъ также два рѣшенія, т. е. двѣ двойныя точки ψ и ψ', то можно провести двѣнадцать прямыхъ:

$$E\omega\,,\ E'\omega\,,\ E\omega'\,,\ E'\omega'\ \ ;\ \ E\psi\,,\ E'\psi\,,\ E\psi'\,,\ E'\psi'\ \ ;\ \ \omega\psi\,,\ \omega'\psi\,,\ \omega\psi'\,,\ \omega'\psi'$$

которыя казалось бы дадутъ и двѣнадцать рѣшеній. Но, если замѣтимъ, что каждая изъ сторонъ треугольника abc дѣлится въ точкахъ a, b, ω, ω'; b, c, E, E'; a, c, ψ, ψ', гармонически, то увидимъ, что точки, какъ напримѣръ E, ω, ψ лежатъ на одной прямой линіи (§ 146), слѣдовательно рѣшеній всего четыре.

§ 398. *Задача 6.* По тремъ даннымъ касательнымъ и двумъ точкамъ построить коническое сѣченіе?

Рѣшеніе. Пусть AB, BC, CA будутъ данныя касательныя, a,b данныя точки. Касательныя въ этихъ точкахъ пересѣкаются въ точкѣ M, которую надобно опредѣлить. Легко видѣть, что лучъ BM есть двойной въ инволюціонной связкѣ: BA и BC, Ba и Bb, слѣдовательно можно его построить. Точно также найдемъ, что лучъ MC, пересѣченіе котораго съ BM даетъ точку M, которую если соединимъ съ a и b, то будемъ имѣть касательныя въ точкахъ a и b. Но такъ какъ построеніе даетъ каждый разъ два двойные луча, то будемъ имѣть четыре рѣшенія, а слѣдовательно и четыре коническія сѣченія, удовлетворяющія условіямъ задачи.

Если между условіями для построенія коническаго сѣченія будетъ дана одна ассимптота, то она должна считаться за два условія, такъ какъ этимъ условіемъ дается положеніе касательной и точка касанія, которая находится на безконечности.

Если будетъ сказано, что коническое сѣченіе есть парабола, то это даетъ одно условіе—именно касательную на безконечности.

Если сказано, что коническое сѣченіе есть кругъ, то этимъ дается два условія—именно двѣ безконечно удаленныя точки.

Если данъ фокусъ, то этимъ даются два условія, такъ какъ черезъ фокусъ проходятъ двѣ касательныя къ коническому сѣченію. Если даны два фокуса, то это тоже что даны четыре касательныя.

Если данъ полюсъ данной прямой, то этимъ даны два условія. Наконецъ если данъ центръ, то этимъ даны два условія, такъ какъ центръ есть полюсъ безконечно-удаленной прямой.

ГЛАВА XXIII.

Методъ взаимныхъ поляръ.

§ 399. Въ § 227 мы изложили уже главное основаніе *метода взаимныхъ поляръ*, а теперь изложимъ самый методъ. Пусть:

$$f(x)=0 \quad \text{и} \quad f'(\xi)=0 \tag{1}$$

будутъ уравненія коническаго сѣченія во взаимныхъ формахъ; мы его назвали основнымъ. Если $(y_1y_2y_3)$ есть какая-нибудь точка, то координаты поляры этой точки относительно коническаго сѣченія (1) будутъ:

$$\eta_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1}\quad,\quad \eta_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\quad,\quad \eta_3=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3} \tag{2}$$

и обратно:

$$y_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_1}\quad,\quad y_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_2}\quad,\quad y_3=\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_3} \tag{3}$$

Въ выше упомянутомъ параграфѣ видѣли, что если:

$$F(x_1x_2x_3)=0 \tag{4}$$

есть какое-нибудь коническое сѣченіе и полюсъ $(y_1y_2y_3)$ скользитъ по немъ, то его координаты должны удовлетворять уравненіе (3):

$$F(y_1y_2y_3)=F\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_1}\quad,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_2}\quad,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \eta_3}\right)=\Phi(\eta_1\eta_2\eta_3)=0$$

и видѣли, что коническія сѣченія:

$$F(x_1x_2x_3)=0 \quad \text{и} \quad \Phi(\xi_1\xi_2\xi_3)=0 \tag{5}$$

находятся въ такой зависимости между собою, что точки одного изъ нихъ суть полюсы касательныхъ къ другому и, обратно, касательныя къ одному изъ нихъ суть поляры точекъ на другомъ. Такія два коническія сѣченія называются *взаимными*. Это основное свойство служитъ основаніемъ метода изслѣдованій свойствъ коническихъ сѣченій и вообще кривыхъ линій.

§ 400. Для сокращенія рѣчи, означимъ основное коническое сѣченіе черезъ $f_0=0$, данное черезъ $f_1=0$, а взаимное, относительно $f_1=0$, черезъ $f_1'=0$. Мы будемъ говорить, что точка *соотвѣтствуетъ* прямой, если она есть полюсъ этой прямой относительно $f_0=0$, слѣдовательно точки на коническихъ сѣченіяхъ $f_1=0$ и $f_1'=0$ суть соотвѣтственныя касательнымъ на $f_1'=0$ и $f_1=0$.

На основаніи этихъ свойствъ взаимныхъ коническихъ сѣченій можемъ изъ свойствъ одного изъ нихъ заключить о свойствахъ другаго. Свойства эти суть предложенія, относительно положенія и, въ исключительныхъ случаяхъ, относительно мѣры.

§ 401. 1. Точкѣ пересѣченія касательныхъ къ кривой $f_1=0$ соотвѣтствуетъ прямая, соединяющая соотвѣтственныя касательнымъ точки на

кривой $f_1'=0$. Это слѣдуетъ изъ § 209, что точка пересѣченія двухъ поляръ есть полюсъ прямой, проходящей черезъ ихъ полюсы.

2. Если три или болѣе точекъ на кривой $f_1=0$ лежатъ на одной прямой линіи, то соотвѣтственныя касательныя къ кривой $f_1'=0$ пересѣкаются въ одной точкѣ, и обратно, если три или болѣе касательныхъ къ кривой $f_1=0$ пересѣкаются въ одной точкѣ, то соотвѣтственныя точки на кривой $f_1'=0$ лежатъ на одной прямой линіи. Это слѣдуетъ изъ общихъ свойствъ поляры и полюса.

Пояснимъ теперь приложеніе этого метода примѣрами.

§ 402. Мы видѣли въ § 371, что если шестиугольникъ $ABCDEF$ вписанъ въ коническое сѣченіе $f_1=0$, то его противуположныя стороны AB и ED, BC и EF, CD и FA пересѣкаются на одной прямой линіи. Каждой вершинѣ $A, B, C, \ldots$ соотвѣтствуетъ касательная къ $f_1'=0$, слѣдовательно вписанному шестиугольнику $ABCDEF$ въ коническомъ сѣченіи $f_1=0$ соотвѣтствуетъ описанный шестиугольникъ $abcdef$ около $f_1'=0$. Точкамъ пересѣченія противуположныхъ сторонъ AB и ED, BC и EF, CD и AF будутъ соотвѣтствовать діагонали ad, bc, cf противуположныхъ вершинъ и такъ какъ точки пересѣченія AB и ED, BC и EF, CD и AF лежатъ на одной прямой линіи, то діагонали ad, be, cf пересѣкаются въ одной точкѣ. Такимъ образомъ видимъ, что изъ предложенія Паскаля вытекаетъ предложеніе Бріаншона, слѣдовательно это два взаимныя предложенія. Обратно, изъ предложенія Бріаншона получается предложеніе Паскаля.

Операція вывода изъ даннаго предложенія его взаимнаго состоитъ въ слѣдующемъ механическомъ процессѣ: слова *точки* и *прямая*, *вписанный* и *описанный* замѣщаются словами: *прямая* и *точка*, *описанный* и *вписанный*.

Взаимныя предложенія.

Пр. 1. Если двѣ вершины треугольника, скользятъ по прямымъ линіямъ, а три его стороны проходятъ черезъ три данныя точки, то третяя вершина опишетъ коническое сѣченіе (Маклоренъ).	*Пр. 1.* Если двѣ стороны треугольника проходятъ черезъ двѣ точки, а три вершины его скользятъ по тремъ даннымъ прямымъ, то третяя его сторона будетъ касаться коническаго сѣченія.
Пр. 2. Если въ предъидущемъ примѣрѣ точки, чрезъ которыя проходятъ три стороны треугольника лежатъ на одной прямой линіи, то геометрическое мѣсто вершины будетъ прямая линія (пр. 14, § 84).	*Пр. 2.* Если прямыя, по которымъ скользятъ три вершины треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ, то геометрическое мѣсто третей стороны будетъ точка (пр. 4. § 85).

Если два коническія сѣченія касаются, то ихъ взаимныя будутъ также касаться. Въ самомъ дѣлѣ, первая пара коническихъ сѣченій имѣетъ общую точку и общую касательную въ этой точкѣ, слѣдовательно взаимная пара будетъ имѣть общую касательную и общую точку.

Пр. 3. Если двѣ вершины, описаннаго около коническаго сѣченія, треугольника скользятъ по двумъ прямымъ, то геометрическое мѣсто третей вершины есть коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ даннымъ (пр. 2. § 358).

Пр. 3. Если двѣ стороны вписаннаго въ коническое сѣченіе треугольника проходятъ черезъ двѣ данныя точки, то обвертка третей стороны есть коническое сѣченіе, имѣющее двойное соприкосновеніе съ даннымъ (пр. 3, § 358).

§ 403. Мы выше показали, что если двумъ точкамъ P_1, P_2 на $f_1=0$, соотвѣтствуютъ касательныя P_1S_1, P_2S_2 на $f'_1=0$, то касательнымъ въ точкахъ P_1 и P_2 будутъ соотвѣтствовать точки p_1 и p_2, а слѣдовательно точка Q пересѣченія этихъ касательныхъ будетъ соотвѣтствовать хордѣ p_1p_2. Откуда заключаемъ, что какой нибудь точкѣ Q и ея полярѣ P_1P_2 относительно $f_1=0$, соотвѣтствуетъ прямая p_1p_2 и ея полюсъ q относительно взаимнаго коническаго сѣченія $f_1'=0$.

Пр. 4. Если система коническихъ сѣченій проходитъ черезъ четыре данныя точки, то геометрическое мѣсто поляръ данной точки относительно системы коническихъ сѣченій есть точка (§ 228).

Пр. 4. Если система коническихъ сѣченій касается четырехъ данныхъ касательныхъ, то геометрическое мѣсто полюса данной прямой относительно системы коническихъ сѣченій есть прямая линія (§ 229).

Пр. 5. Вписать въ коническое сѣченіе треугольникъ, коего стороны проходятъ черезъ три данныя точки?

Пр. 5. Описать около коническаго сѣченія треугольникъ, коего вершины находились бы на трехъ данныхъ прямыхъ.

§ 404. Даны два коническія сѣченія $f_1=0$ и $f_2=0$, а ихъ взаимныя $f_1'=0$ и $f_2'=0$; четыремъ точкамъ пересѣченія A, B, C, D первыхъ двухъ соотвѣтствуютъ четыре общія касательныя A', B', C', D'; шести общимъ хордамъ коническихъ сѣченій f_1 и f_2: AB, CD; AC, BD; AD, BC соотвѣтствуютъ шесть точекъ пересѣченія общихъ касательныхъ $A'B'$, $C'D'$; $A'C'$, $B'D'$; $A'D'$, $B'C'$ къ f'_1 и f_2'.

Пр. 1. Если три коническія сѣченія имѣютъ общія касательныя или имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то ихъ шесть общихъ хордъ по три проходятъ черезъ одну точку (§ 352).

Пр. 1. Если три коническія сѣченія имѣютъ двѣ общія точки или двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то шесть точекъ пересѣченія общихъ касательныхъ по три лежатъ на одной прямой линіи (352).

Пр. 2. Другими словами, если три коническія сѣченія, имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то ихъ можно разсматривать, какъ имѣющія четыре радикальные центра.

Пр 2. Если три коническія сѣченія имѣютъ двойное соприкосновеніе съ четвертымъ, то ихъ можно разсматривать, какъ имѣющія четыре оси подобія.

Пр. 3. Если черезъ точку касанія двухъ касающихся коническихъ сѣченій, проведемъ, какую-нибудь, хорду, то касательныя въ концахъ этой хорды пересѣкутся на хордѣ общей двумъ коническимъ сѣченіямъ.

Пр. 3. Если изъ какой-нибудь точки общей касательной двухъ касающихся коническихъ сѣченій проведемъ касательныя къ каждому изъ нихъ, то прямая, соединяющая точки ихъ касанія пройдетъ черезъ точку пересѣченія общихъ касательныхъ къ даннымъ коническимъ сѣченіямъ,

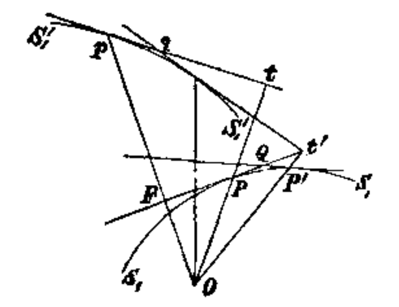
§ 405. Мы брали за основное коническое сѣченіе какое-нибудь изъ коническихъ сѣченій, но всегда почти берутъ въ этомъ методѣ за основное коническое сѣченіе кругъ и полюсы прямыхъ и поляры точекъ берутъ относительно круга.

Изъ уравненій круга и поляры точки $(x_1 y_1)$:

$$x^2+y^2=r^2 \quad , \quad xx_1+yy_1=r^2$$

легко видѣть, что поляра перпендикулярна къ прямой, соединяющей полюсъ съ центромъ, и что прямоугольникъ, построенный на разстояніяхъ полюса и поляры отъ центра круга, равенъ квадрату построенному на радіусѣ r. Если центръ круга есть O, полюсъ P, поляра Q, то имѣемъ:

Фиг. 140.



$$OP \cdot OQ = r^2$$

Поэтому говорятъ: если изъ данной точки O (фиг. 140) опустимъ перпендикуляръ OT на какую-нибудь касательную къ кривой f_1 и продолжимъ его до точки p такъ, чтобы $OT.Op=r^2$, то геометрическое мѣсто точекъ p будетъ кривая f_1' взаимная кривой f_1. Очевидно, что это то же, что брать полюсъ p прямой PF относительно круга, коего радіусъ есть r.

Легко видѣть, что величина радіуса r измѣняетъ только размѣръ кривой f_1', но не ея форму. Поэтому слово кругъ можетъ быть выброшено, а говорятъ, что кривая f_1' есть взаимная кривой f_1 относительно точки O, которую называютъ *началомъ*.

Выгода употребленія круга, какъ основнаго коническаго сѣченія, заключается въ слѣдующихъ двухъ предложеніяхъ, которыя легко выводятся изъ того, что было сказано выше и которыя, въ этомъ методѣ, могутъ преобразовать не только предложенія относительно положенія, но и относительно мѣры линій и угловъ.

Эти предложенія суть слѣдующія:

Предложеніе 1. Разстояніе, какой-нибудь, точки P отъ начала, есть взаимное разстояніе отъ начала соотвѣтствующей прямой pt.

Предложеніе 2. Уголъ TQT' между двумя прямыми TQ и $T'Q$ равенъ углу pOp', такъ какъ $Op \perp TQ$ и $Op' \perp T'Q$.

Пояснимъ сказанное примѣрами.

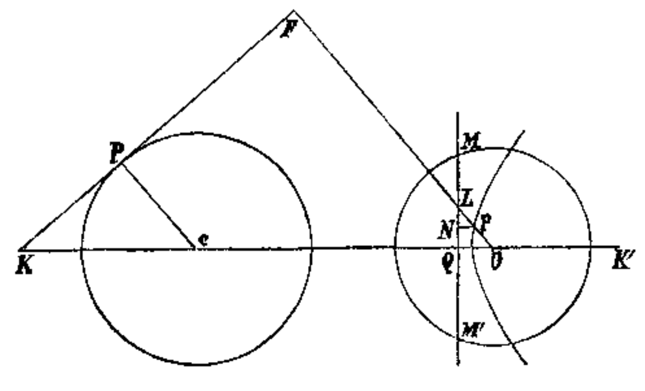
§ 406. *Задача.* Найти взаимную кривую даннаго круга относительмо другаго круга?

Рѣшеніе. Пусть начало или центръ основнаго круга будетъ O, пусть центръ даннаго круга будетъ C. Проведемъ, какую-нибудь, касательную PF къ кругу C, изъ центра или начала O опустимъ на нее перпендикуляръ OF и построимъ на этомъ перпендикулярѣ, такую точку p, чтобы:

$$OF . Op = r^2$$

гдѣ r есть радіусъ круга O. Наша задача, очевидно, состоитъ въ томъ, чтобы найти геометрическое мѣсто точки.

Фиг. 141.



На прямой OC (фиг. 141) построимъ точку Q, такъ чтобы:

$$OC . OQ = r^2$$

и проведемъ $M'M \perp OC$. Изъ точки p проведемъ $pN \perp MM'$.

Изъ построенія имѣемъ:

$$OC . OQ = OF . Op$$

откуда:

$$\frac{OC}{Op} = \frac{OF}{OQ}$$

Но легко видѣть изъ этой пропорціи и изъ треугольниковъ KOF, KCP, OQL, NpL, что:

$$\frac{OF}{OQ} = \frac{CP}{Np}$$

откуда:

$$\frac{OC}{CP} = \frac{Op}{Np}$$

Замѣчая, что $OC:PC$ есть величина постоянная, видимъ, что отношеніе разстояній точки p отъ прямой MM' и отъ точки O есть величина постоянная, слѣдовательно геометрическое мѣсто точки p есть коническое сѣченіе, коего фокусъ есть C, директриса MM', а эксцентриситетъ $OC:CP$. Откуда видимъ, что коническое сѣченіе будетъ эллипсъ, гипербола или парабола, смотря потому будетъ-ли начало O внутри, внѣ или на окружности круга C.

§ 407. Принявъ во вниманіе пред. 2, § 405, имѣемъ слѣдующія два взаимныя предложенія:

Пр. 1. Двѣ касательныя къ кругу составляютъ равные углы съ ихъ хордой соприкосновенія.

Пр. 1. Прямая, соединяющая фокусъ съ пересѣченіемъ двухъ касательныхъ къ коническому сѣченію, дѣлитъ пополамъ уголъ, составляемый радіусами векторами, проведенными изъ фокуса въ точки соприкосновенія.

Въ самомъ дѣлѣ, уголъ между касательной PQ и хордою соприкосновенія PP' равенъ углу между Op и Oq, точно также уголъ $QP'P$ равенъ углу между Op' и Oq, но такъ какъ $\angle QPP'=\angle QP'P$, то $\angle pOq=\angle p'Oq$.

Пр. 2. Въ кругѣ касательная перпендикулярна къ радіусу проведенному въ точку касанія.

Пр. 2. Радіусы, проведенные изъ фокуса коническаго сѣченія въ точку касанія какой-нибудь касательной и въ точку, гдѣ эта касательная встрѣчаетъ директрису, перпендикулярны.

Это слѣдуетъ изъ того, что директриса соотвѣтствуетъ центру круга.

Пр. 3. Прямая линія перпендикулярна къ прямой, соединяющей ея полюсъ съ центромъ круга.

Пр. 3. Прямыя, проведенныя изъ фокуса коническаго сѣченія въ какую-нибудь точку и въ точку пересѣченія поляры этой точки съ директрисой, перпендикулярны.

Пр. 4. Прямая, соединяющая точку пересѣченія двухъ касательныхъ къ кругу съ центромъ, дѣлитъ пополамъ уголъ между касательными.

Пр. 4. Если точку пересѣченія, какой-нибудь, прямой съ директрисой соединимъ съ фокусомъ прямою, то эта прямая дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами проведенными изъ фокуса къ точкамъ встрѣчи съ прямой.

Пр. 5 Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ къ кругу, составляющихъ данный уголъ, есть кругъ концентрическій данному.

Пр. 5. Обвертка хордъ коническаго сѣченія, составляющихъ въ фокусѣ данный уголъ, есть коническое сѣченіе, имѣющее общій фокусъ и общую директрису съ даннымъ.

Пр. 6. Обвертка хордъ соприкосновенія касательныхъ къ кругу, состав-

Пр. 6. Геометрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ, коихъ хорды со-

ляющихъ данный уголъ, есть кругъ концентрическій данному.

прикосновенія составляютъ данный уголъ въ фокусѣ коническаго сѣченія, есть коническое сѣченіе, имѣющее общій фокусъ и общую директрису съ даннымъ.

Пр. 7. Геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ ряду концентрическихъ круговъ, есть кругъ, проходящей черезъ ихъ общій центръ и черезъ данную точку.

Пр 7. Обвертка касательныхъ, проведенныхъ въ точкахъ пересѣченія данной прямой съ рядомъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ общій фокусъ и директрису, есть коническое сѣченіе, имѣющее тотъ-же фокусъ и касающееся данной прямой и общей директрисы.

Если въ этомъ послѣднемъ примѣрѣ, положимъ что данная прямая находится на безконечности, то найдемъ, что обвертка ассимптотъ ряда гиперболъ, имѣющихъ общій фокусъ и директрису, есть парабола, имѣющая тотъ же фокусъ и касающаяся общей директрисы.

Пр. 8. Обвертка хорды, стягивающей концы двухъ перпендикулярныхъ хордъ, проходящихъ черезъ данную точку на кругѣ есть центръ круга.

Пр. 8. Геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ перпендикулярныхъ касательныхъ къ параболѣ есть директриса.

Мы говоримъ, вмѣсто коническаго сѣченія, парабола, такъ какъ взяли за начало данную точку на кругѣ (§ 406).

Пр. 9. Если изъ, какой-нибудь, точки на окружности круга, опустимъ перпендикуляры на стороны вписаннаго въ кругъ треугольника, то основанія этихъ перпендикуляровъ лежатъ на одной прямой линіи (§ 300).

Если данную точку на окружности возьмемъ за начало, то вписанному въ кругъ треугольнику будетъ соотвѣтствовать, описанный около параболы треугольникъ; основаніямъ перпендикуляровъ соотвѣтствуютъ прямыя, проходящія черезъ точки соотвѣтственныя сторонамъ треугольника перпендикулярно къ радіусамъ векторамъ, проведеннымъ черезъ начало въ эти точки. Слѣдовательно, если соединимъ фокусъ съ вершинами описаннаго около параболы треугольника и изъ этихъ вершинъ возставимъ перпендикуляры къ этимъ радіусамъ, то эти перпендикуляры пересѣкутся въ одной точкѣ. Изъ этого слѣдуетъ, что кругъ, коего діаметръ есть разстояніе фокуса отъ точки пересѣченія выше упомянутыхъ перпендикуляровъ, проходитъ черезъ вершины описаннаго около параболы треугольника. Откуда вытекаетъ, что геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, касающихся трехъ данныхъ прямыхъ, есть кругъ, проходящій черезъ точки пересѣченія трехъ данныхъ прямыхъ.

§ 408. Если:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_1-\lambda A_2=0 \quad , \quad A_1-\mu A_2=0 \qquad (6)$$

суть уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія A_1 и A_2, то:

$$A'_1=0 \quad , \quad A'_2=0 \quad , \quad A'_1-\lambda A'_2=0 \quad , \quad A'_1-\mu A'_2=0 \qquad (7)$$

будутъ полюсы прямыхъ (6), находящіеся на прямой (A'_1, A'_2), если A'_r есть ничто иное какъ A_r, въ которое подставлены вмѣсто x выраженіе $\frac{1}{2}\frac{\partial f'}{\partial \xi}$ (§ 200).

Изъ этого вытекаютъ слѣдующія предложенія:

1. Ангармоническое отношеніе связки прямыхъ (6) равно ангармоническому отношенію ряда ихъ полюсовъ относительно даннаго коническаго сѣченія.

2. Ангармоническое отношеніе ряда точекъ (7) равно ангармоническому отношенію связки ихъ поляръ относительно коническаго сѣченія.

3. Если прямыя, проходящія черезъ одну точку, составляютъ инволюціонную связку, то ихъ полюсы относительно даннаго коническаго сѣченія составляютъ инволюціонный рядъ.

4. Если точки, находящіяся на одной прямой линіи, составляютъ инволюціонный рядъ, то ихъ поляры относительно даннаго коническаго сѣченія образуютъ инволюціонную связку.

5. Точки пересѣченія связки коническихъ сѣченій, проходящей черезъ четыре данныя точки, съ какою-нибудь прямою образуютъ инволюціонный рядъ.

5. Касательныя, проведенныя изъ какой-нибудь точки, къ ряду коническихъ сѣченій, касающихся четырехъ данныхъ прямыхъ, образуютъ инволюціонную связку.

Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы составить ясное понятіе о методѣ взаимныхъ поляръ, который принадлежитъ французскому геометру Понселе.

ГЛАВА XXIV.

Методъ проэкцій.

§ 409. Методъ проэкцій, такъ же какъ и методъ взаимныхъ поляръ, служитъ вообще къ отысканію свойствъ и предложеній фигуръ относительно *положенія*, но есть предложенія и относительно мѣры, къ которымъ эти оба метода могутъ быть приложены.

Въ настоящемъ методѣ *точкѣ* соотвѣтствуетъ *точка*, *прямой—прямая*, а въ методѣ взаимныхъ поляръ соотвѣтствіе обратное. Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ методъ.

Если всѣ точки фигуры на плоскости соединимъ прямыми линіями съ точкою O внѣ плоскости, то образуется *пирамида* или *конусъ*, коихъ вершины будутъ точка O. Пересѣченіе этой пирамиды или конуса, какою-нибудь, плоскостью даетъ фигуру, которая называется *проэкцiей* данной фигуры. Плоскость, которая пересѣкаетъ пирамиду или конусъ называется *плоскостью проэкцій*. Вотъ основныя предложенія этого метода.

Предложеніе 1. Какой-нибудь точкѣ одной фигуры соотвѣтствуетъ точка въ другой.

Въ самомъ дѣлѣ, если точка A будетъ соединена съ вершиною O, то точка a, въ которой, какая-нибудь, плоскость пересѣкаетъ OA, будетъ проэкція точки A на этой плоскости.

Предложеніе 2. Проэкція прямой линіи есть прямая линія.

Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ точки прямой линіи, соединимъ съ вершиною O, то образуется плоскость, пересѣченіе которой съ плоскостью проэкцій есть прямая, очевидно, проэкція данной.

Слѣдовательно, если нѣсколько точекъ въ одной фигурѣ лежатъ на одной прямой линіи, или нѣсколько прямыхъ линій пересѣкаются въ одной точкѣ, то проэкціи точекъ также лежатъ на одной прямой, а проэкціи прямыхъ проходятъ черезъ одну точку.

Предложеніе 3. Всякая плоская кривая всегда проэктируется кривою того же порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, если данная кривая пересѣкается прямою въ точкахъ A, B, C,...., то ея проэкція пересѣчется проэкціей сѣкущей въ стольких же точкахъ a, b, c,...., но степень кривой опредѣляется числомъ точекъ пересѣченія прямой съ кривою, а это число одно и то же въ обѣихъ кривыхъ. Если прямая AB пересѣкаетъ кривую въ дѣйствительныхъ и мнимыхъ точкахъ, то проэкція ab пересѣчетъ проэкцію кривой въ стольких же дѣйствительныхъ и мнимыхъ точкахъ.

Точно также, если двѣ кривыя пересѣкаются, то ихъ проэкціи пересѣкутся въ стольких же точкахъ и точка общая одной парѣ кривыхъ есть проэкція общей точки другой пары.

Предложеніе 4. Проэкція касательной къ кривой есть касательная къ проэкціи кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, если какая-нибудь прямая AB пересѣкаетъ кривую въ точкахъ A и B, то ея проэкція ab пересѣчетъ проэкцію кривой въ точкахъ a и b. Если точки A и B совпадутъ, то совпадутъ и точки

a и b, слѣдовательно, когда прямая AB дѣлается касательной къ данной кривой, то ab дѣлается касательной къ ея проэкціи.

И вообще, если двѣ кривыя соприкасаются въ нѣсколькихъ точкахъ, то соприкасаются и ихъ проэкціи въ стольких же точкахъ.

Предложеніе 5. Если черезъ вершину O конуса проведемъ плоскость, параллельно плоскости проэкцій, которая пересѣчетъ первоначальную плоскость по прямой AB, то всякая связка прямыхъ линій, имѣющая свою вершину на AB будетъ проэктироваться на плоскости проэкцій рядомъ параллельныхъ линій. Въ самомъ дѣлѣ, если двѣ прямыя пересѣкаются на AB, то точка ихъ пересѣченія проэктируется на безконечности, слѣдовательно проэкціи такихъ прямыхъ параллельны.

Обратно, система параллельныхъ линій на начальной плоскости проэктируется связкой прямыхъ, коихъ точки пересѣченія находятся на прямой AB пересѣченія плоскости проэкцій съ плоскостью проходящею черезъ вершину O параллельно начальной плоскости. Это даетъ намъ право разсматривать систему параллельныхъ линій, какъ связку, коей точка пересѣченія находится на безконечности, такъ какъ ихъ проэкціи вообще проходятъ черезъ одну точку въ конечномъ разстояніи. Точно также всѣ точки на безконечности можно разсматривать, какъ образующія прямую линію, такъ какъ ихъ проэкціи находятся на прямой AB пересѣченія плоскости проэкцій съ плоскостью, проходящею черезъ вершину O параллельно начальной плоскости.

§ 410. Это суть основныя предложенія настоящаго метода, изъ которыхъ видимъ, что если какое-нибудь свойство кривой относится только къ положенію, а не къ мѣрѣ, то это свойство сохраняетъ и проэкція кривой. Такъ, напримѣръ, увидимъ ниже, что всякое коническое сѣченіе можетъ быть проэктировано кругомъ, слѣдовательно изъ свойствъ круга мы можемъ выводить свойства коническихъ сѣченій. Всякій четыреугольникъ можетъ быть проэктированъ параллелограммомъ, слѣдовательно можемъ изъ свойствъ параллелограмма выводить свойства четыреугольника.

Пр. 1. Если изъ концовъ хорды въ кругѣ, проходящей черезъ одну точку, проведемъ касательныя, то геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ касательныхъ есть кругъ.

Такъ какъ всякое коническое сѣченіе можетъ быть проэктировано кругомъ, то это свойство принадлежитъ и коническому сѣченію.

Пр. 2. Если теоремы Паскаля или Бріаншона доказаны для круга, то онѣ имѣютъ мѣсто и для всякаго коническаго сѣченія.

Изъ этого слѣдуетъ, что если мы желаемъ доказать, какое-нибудь, проэктивное свойство фигуры, то достаточно доказать это свойство для

простѣйшей фигуры, которая можетъ быть проэкціей данной, а фигура дѣлается въ проэкціи простѣйшей, если нѣкоторыя изъ ея точекъ или прямыхъ проэктируются на безконечности.

Пр. 3. Если желаемъ доказать гармоническія свойства полнаго четыреугольника $ABCD$, коего противуположныя стороны пересѣкаются въ точкахъ E и F, а діагонали въ точкѣ G, то мы должны всѣ точки фигуры соединить съ какою-нибудь точкою O внѣ плоскости четыреугольника и пересѣчь конусъ или пирамиду плоскостью параллельною плоскости OEF. Очевидно проэкція прямой EF будетъ на безконечности, слѣдовательно проэкція $abcd$ даннаго четыреугольника будетъ параллелограмъ, такъ какъ точка e пересѣченія ab и cd будетъ находится на безконечности, а слѣдовательно противуположныя стороны ab и cd будутъ параллельны. Слѣдовательно всякій четыреугольникъ можетъ быть проэктированъ параллелограмомъ.

Такъ какъ діагонали въ параллелограмѣ взаимно дѣлятся пополамъ, то діагональ ac дѣлится гармонически въ точкахъ a, g, c и e, находящейся на ∞; слѣдовательно $(O.agce) = (O.AGCE)$, откуда вытекаетъ извѣстное гармоническое свойство полнаго четыреугольника.

§ 411. Мы сказали, что коническое сѣченіе можетъ быть проэктировано всегда кругомъ, но при этомъ мы можемъ выбрать вершину проэкцій O и плоскость проэкцій такъ, что одна изъ прямыхъ въ фигурѣ будетъ проэктироватся на безконечности, какъ выше уже видѣли. Допустивши это будемъ имѣть слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Если дано коническое сѣченіе и точка въ его плоскости, то оно можетъ быть проэктировано кругомъ, коего центръ есть проэкція данной точки.

Доказательство. Для этого надобно его проэктировать такъ, чтобы поляра проэкціи данной точки была на безконечности (§ 233).

Предложеніе 2. Два коническія сѣченія могутъ быть всегда проэктированы кругами.

Доказательство. Для этого надобно одно изъ нихъ проэктировать кругомъ и притомъ такъ, чтобы одна изъ ихъ общихъ хордъ проэктировалась на безконечности, слѣдовательно (§ 306) проэкція втораго коническаго сѣченія пройдетъ черезъ двѣ безконечно удаленныя точки на первомъ кругѣ, а слѣдовательно сама будетъ кругъ.

Предложеніе 3. Два коническія сѣченія, имѣющія двойное соприкосновеніе, могутъ быть проэктированы концентрическими кругами.

Доказательство. Для этого надобно одно изъ нихъ проэктировать

кругомъ и притомъ такъ, чтобы ихъ общая хорда проэктировалась на безконечности (§ 306).

§ 412. Теперь предложимъ нѣсколько примѣровъ, какъ изъ свойствъ круга выводить свойства коническихъ сѣченій или изъ частнаго предложенія коническаго сѣченія выводить болѣе общее.

Пр. 1. Прямая, проходящая черезъ какую-нибудь точку дѣлится гармонически этой точкой, ея полярой и коническимъ сѣченіемъ.

Это свойство и его взаимное суть проэктивныя и оба имѣя мѣсто для круга, будутъ имѣть мѣсто и для всякаго коническаго сѣченія.

Пр. 2. Ангармоническія свойства точекъ на коническомъ сѣченіи и касательныхъ къ нему, имѣя мѣсто для круга, будутъ имѣть мѣсто и для всякаго коническаго сѣченія.

Пр. 3. Хорда одного изъ двухъ концентрическихъ круговъ, касающаяся другаго, дѣлится пополамъ въ точкѣ касанія.

Пр. 3. Хорда одного изъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ двойное соприкосновеніе, касающаяся другаго, въ точкѣ касанія дѣлится гармонически и въ точкѣ пересѣченія ея съ хордою соприкосновенія.

Пр. 4. Касательная къ одному изъ трехъ концентрическихъ круговъ, дѣлится другими двумя гармонически.

Пр. 4. Два изъ трехъ коническихъ сѣченій, имѣющихъ двойное соприкосновеніе въ двухъ общихъ точкахъ, дѣлятъ гармонически касательную къ одному изъ нихъ.

§ 413. Замѣчая, что если F есть фокусъ, а A и B суть циклическія точки, то AF и BF суть касательныя къ коническому сѣченію, найдемъ нѣкоторыя интересныя свойства фокуса.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто центра круга, касающагося двухъ данныхъ круговъ, есть гипербола, коей фокусы суть центры данныхъ круговъ.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто полюса прямой AB относительно коническаго сѣченія проходящаго черезъ двѣ данныя точки AB и касающагося двухъ данныхъ коническихъ сѣченій, также проходящихъ черезъ точки A и B, есть коническое сѣченіе, касающееся четырехъ прямыхъ AC, CB, $C'A$, $C'B$, гдѣ C и C' суть полюсы AB относительно двухъ данныхъ коническихъ сѣченій.

Въ этомъ примѣрѣ мы замѣнили слово *кругъ* словами *коническое сѣченіе проходящее черезъ точки A и B*, слово *центръ* замѣнили словами: *полюсъ прямой AB*.

Пр. 6. Данъ фокусъ и двѣ точки на коническомъ сѣченіи, геометрическое

Пр. 6. Даны двѣ касательныя и двѣ точки на коническомъ сѣченіи, гео-

мѣсто пересѣченія касательныхъ въ этихъ точкахъ есть прямая линія.

Пр. 7. Данъ фокусъ и двѣ касательныя къ коническому сѣченію, геометрическое мѣсто другаго фокуса есть прямая линія.

Пр. 8. Кругъ, описанный около треугольника, описаннаго около параболы, проходитъ черезъ фокусъ (§ 285).

метрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ въ этихъ точкахъ есть прямая линія.

Пр. 7. Даны двѣ точки A, B и двѣ касательныя FA и FB, проходящія, каждая, черезъ одну изъ точекъ A, B и двѣ другія касательныя; геометрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ FA и FB есть прямая линія.

Пр. 8. Если два треугольника описаны около коническаго сѣченія, то ихъ шесть вершинъ находятся на одномъ коническомъ сѣченіи.

Надобно замѣтить, что второй описанный около параболы треугольникъ есть треугольникъ, коего вершины суть: фокусъ и двѣ циклическія точки.

Пр. 9. Геометрическое мѣсто центра круга, проходящаго черезъ данную точку и касающагося данной прямой, есть парабола, коей фокусъ есть данная точка.

Пр. 10. Геометрическое мѣсто центра коническаго сѣченія, касающагося четырехъ данныхъ касательныхъ, есть прямая линія, проходящая черезъ середины діагоналей, образуемаго касательными четыреугольника.

Пр. 9. Даны касательная и три точки на коническомъ сѣченіи, геометрическое мѣсто пересѣченія касательныхъ въ двухъ изъ трехъ данныхъ точекъ, есть коническое сѣченіе, вписанное въ треугольникъ, коего вершины суть три данныя точки.

Пр. 10. Геометрическое мѣсто полюса, какой-нибудь прямой, относительно коническаго сѣченія, касающагося четырехъ данныхъ касательныхъ, есть прямая, соединяющая точки четвертыя гармоническія, въ которыхъ данная прямая пересѣкаетъ діагонали четыреугольника.

Изъ опредѣленія фокуса слѣдуетъ, что если два коническія сѣченія имѣютъ общій фокусъ, то онъ есть точка пересѣченія общихъ касательныхъ, а слѣдовательно коническія сѣченія имѣютъ свойства изложенныя въ § 356.

Если два коническія сѣченія имѣютъ общій фокусъ и общую директрису, то ихъ можно разсматривать, какъ имѣющія двойное соприкосновеніе, а слѣдовательно онѣ могутъ быть проэктированы концентрическими кругами.

§ 414. Перейдемъ къ изслѣдованію свойствъ угловъ съ помощью метода проэкцій. Замѣтимъ при этомъ, что уголъ будучи постояннымъ въ извѣстной фигурѣ не остается постояннымъ въ проэкціи этой фигуры, поэтому свойства угловъ относительно величины не могутъ быть получены изъ свойствъ угловъ въ проэкціи фигуры.

Пусть $x=0$, $y=0$ будутъ уравненія двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ, то уравненія прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія данныхъ прямыхъ и черезъ циклическія точки будутъ (§ 307):

$$x+iy=0 \quad , \quad x-iy=0$$

которыя съ $x=0$ и $y=0$ составляютъ гармоническую связку. Пусть A, B, C, D будутъ четыре гармоническія точки на одной прямой, A и B могутъ быть дѣйствительными и мнимыми, если эти четыре точки могутъ быть такъ проэктированы, что A и B сдѣлаются въ проэкціи циклическими точками, то проэкціи прямыхъ, проходящихъ черезъ точки C и D, будутъ перпендикулярны.

Обратно, двѣ какія-нибудь перпендикулярныя прямыя проэктируются прямыми, которыя дѣлятъ гармонически прямую, соединяющую проэкціи циклическихъ точекъ.

Пр. 1. Касательная въ кругѣ перпендикулярна къ радіусу проведенному въ точку касанія.

Пр. 1. Какая-нибудь хорда въ коническомъ сѣченіи пересѣкается гармонически, какою-нибудь касательною и прямою соединяющею точку касанія съ полюсомъ хорды (§ 208).

Это слѣдуетъ изъ предложенія, что хорда проэктируется на плоскости круга прямою на безконечности, точки пересѣченія хорды съ коническимъ сѣченіемъ проэктируются циклическими точками, а полюсъ хорды—центромъ круга.

Пр. 2. Какая-нибудь прямая, проведенная черезъ фокусъ коническаго сѣченія, перпендикулярна къ прямой, соединяющей фокусъ съ полюсомъ данной прямой.

Пр. 2. Какая-нибудь прямая, проходящая черезъ данную точку, прямая соединяющая ея полюсъ съ этой точкой и двѣ касательныя черезъ эту точку, составляютъ гармоническую связку.

Пр. 3. Найти геометрическое мѣсто полюса данной прямой относительно системы софокусныхъ коническихъ сѣченій?

Рѣшеніе. Если даны два фокуса, то данъ и четыреугольникъ, въ который вписано коническое сѣченіе, поэтому можемъ приложить пр. 10 § 413. Одна изъ діагоналей этого четыреугольника есть прямая, соединяющая фокусы, слѣдовательно одна изъ точекъ искомаго мѣста есть четвертая гармоническая къ точкѣ, гдѣ данная прямая дѣлитъ разстояніе между фокусами. Другая діагональ четыреугольника есть безконечно удаленная прямая и, такъ какъ концы діагонали суть циклическія точки, то геометрическое мѣсто есть прямая перпендикулярная къ данной прямой. Такимъ образомъ геометрическое мѣсто вполнѣ опредѣлено.

Пр. 4. Софокусныя коническія сѣченія пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

Пр. 4. Если два коническія сѣченія вписаны въ одинъ четыреугольникъ, то двѣ касательныя въ одной изъ точекъ ихъ пересѣченія пересѣкаютъ гармонически, какую-небудь изъ діагоналей четыреугольника.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто, перпендикулярныхъ касательныхъ къ центральному коническому сѣченію, есть кругъ.

Пр. 5. Геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія касательныхъ къ коническому сѣченію, которыя дѣлятъ гармонически отрѣзокъ AB, есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки A и B.

Пр. 6. Если черезъ данную точку на коническомъ сѣченіи проведемъ двѣ перпендикулярныя хорды, то геометрическое мѣсто прямой, соединяющей ихъ концы, есть точка.

Пр. 6. Если черезъ какую-нибудь точку на коническомъ сѣченіи проведемъ гармоническую связку, коей два луча постоянны, то геометрическое мѣсто хорды, соединяющей точки пересѣченія двухъ остальныхъ лучей, есть точка.

§ 415. Пары прямыхъ линій, проходящихъ черезъ одну точку и при томъ такъ, что каждая пара составляетъ равные углы съ данной прямой, пересѣкаютъ безконечно удаленную прямую въ точкахъ, составляющихъ инволюціонный рядъ, коему принадлежатъ циклическія точки, какъ сопряженныя. Въ самомъ дѣлѣ, эти пары пересѣкаютъ какую-нибудь прямую въ точкахъ, образующихъ инволюціонный рядъ, коего двойныя точки суть пересѣченіе прямой внутреннею и внѣшнею равнодѣлящими углы между прямыми. Изъ этого очевидно, что циклическія точки принадлежатъ системѣ, такъ какъ прямыя, направленныя къ нимъ, суть сопряженно гармоническія съ каждой парой перпендикулярныхъ прямыхъ (Пред. 2 § 307).

Пр. Касательныя, проведенныя изъ какой-нибудь точки къ системѣ софокусныхъ коническихъ сѣченій, составляютъ равные углы съ двумя данными прямыми.

Пр. Касательныя изъ какой-нибудь точки къ системѣ коническихъ сѣченій, вписанныхъ въ данный четыреугольникъ, пересѣкаютъ какую-нибудь изъ діагоналей этого четыреугольника въ точкахъ, образующихъ инволюціонный рядъ, коего сопряженныя точки суть концы діагонали.

§ 416. Двѣ прямыя, составляющія постоянный уголъ, пересѣкаютъ безконечно удаленную прямую въ точкахъ, коихъ ангармоническое отношеніе съ циклическими точками есть величина постоянная.

Если $x=0$, $y=0$ суть двѣ прямыя, составляющія уголъ θ, то направленіе къ циклическимъ точкамъ дается уравненіемъ:

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta=0$$

разлагая это уравненіе на линейные множители, легко видѣть, что ангармоническое отношеніе четырехъ линій будетъ постоянно, если уголъ θ есть величина постоянная.

Пр. Предложеніе, что уголъ вписанный въ сегментъ круга есть величина постоянная, есть ничто иное какъ предложеніе, что ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ на кругѣ, изъ коихъ двѣ суть циклическія, есть величина постоянная. Сказаннаго достаточно для составленія яснаго понятія о методѣ проэкцій.

§ 417. Таковы два геометрическіе метода для изслѣдованія свойствъ кривыхъ линій; въ одномъ изъ нихъ координаты двухъ системъ точекъ такъ связаны между собою, что каждой точкѣ въ одной системѣ соотвѣтствуетъ точка въ другой, каждой прямой соотвѣтствуетъ прямая —это методъ проэкцій. Во второмъ, каждой точкѣ въ одной системѣ соотвѣтствуетъ прямая въ другомъ и обратно—это методъ взаимныхъ поляръ.

Эти два метода можно обобщить и изложить аналитически слѣдующимъ образомъ.

Пусть будутъ двѣ системы точекъ въ одной плоскости или въ различныхъ плоскостяхъ, пусть каждая изъ системъ будетъ отнесена къ координатнымъ треугольникамъ $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ въ первой системѣ и $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$ во второй. Если координаты точекъ этихъ двухъ системъ будутъ всегда связаны уравненіемъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)=0$$

то, принимая x_1, x_2, x_3 за постоянныя величины, а y_1, y_2, y_3 за перемѣнныя, будемъ имѣть кривую во второй системѣ, соотвѣтствующую точкѣ въ первой и обратно. Слѣдовательно каждой точкѣ въ одной системѣ будетъ соотвѣтствовать кривая въ другой. Но если координаты точекъ первой системы будутъ линейныя функціи другой, то обратно координаты точекъ второй системы будутъ линейныя функціи координатъ первой. При такой зависимости, очевидно, каждой точкѣ въ одной системѣ будетъ соотвѣтствовать точка въ другой и обратно; каждой прямой въ одной системѣ будетъ соотвѣтствовать прямая въ другой и т. д.

Если координаты точекъ въ одной системѣ будутъ связаны линейно съ координатами прямой въ другой системѣ, то, очевидно, точкѣ въ одной системѣ будетъ соотвѣтствовать прямая въ другой и обратно. Такова общая мысль обобщенія двухъ геометрическихъ методовъ: метода проэкцій и метода взаимныхъ поляръ.

Сѣченія конуса плоскостью.

§ 418. Кривыя втораго порядка называютъ *коническими сѣченіями*, потому что всѣ онѣ могутъ быть получены пересѣченіемъ конуса плоскостью въ различныхъ направленіяхъ.

Открытіе коническихъ сѣченій древніе геометры приписываютъ ученику Платона Менайхму и поэтому часто называютъ эти кривыя *„тріадой Менайхма.“* Нѣкоторыя же геометры ихъ открытіе приписываютъ самому Платону, но это мнѣніе едка-ли справедливо. Первый изъ геометровъ исчерпавшій до малѣйшихъ подробностей свойства коническихъ сѣченій былъ Аппол оній Пергскій (во II в. до Р. Х.); ему приписываютъ и названія: эллипсъ, гипербола и парабола—*недостатокъ*, *избытокъ* и *равенство*. Сначала геометры получали эти кривыя, пересѣкая конусъ плоскосью, перпендикулярною къ образующей или ребру, и, такимъ образомъ, получали эллипсъ, если конусъ былъ остроугольный, параболу, если онъ былъ прямоугольный и гиперболу если конусъ былъ тупоугольный. Евтокій (въ VI в. послѣ Р. Х.) говоритъ, что и названія эти произошли по этой причинѣ, т. е. если конусъ былъ остроугольный, то *недоставало* до прямаго угла—эллипсъ, если конусъ былъ прямоугольный, то было *равенство*—парабола, если уголъ былъ тупой, то былъ *избытокъ* надъ прямымъ угломъ—гипербола. Но Папусъ, жившій раньше Евтокія, говоритъ, что названія эти произошли отъ слѣдующихъ свойствъ этихъ трехъ кривыхъ.

Если эти кривыя будутъ отнесены къ ихъ вершинамъ, то ихъ уравненія будутъ:

$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad , \quad y^2 = 2px \quad , \quad y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Слѣдовательно въ эллипсѣ противъ параболы недостаетъ того, что является избыткомъ въ гиперболѣ.

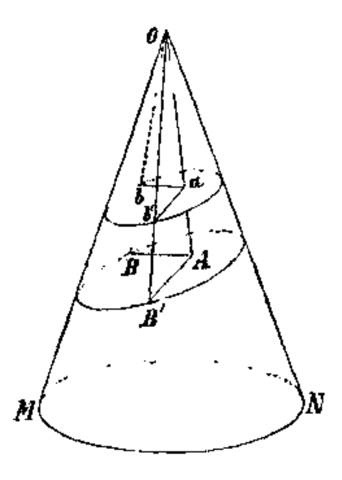
Аппол оній Пергскій показалъ, что всѣ коническія сѣченія могутъ получится изъ одного и того-же конуса, пересѣкая его плоскостью въ различныхъ направленіяхъ. Въ заключеніе покажемъ это.

§ 419. *Предложеніе.* Кривыя, полученныя пересѣченіемъ конуса параллельными плоскостями, подобны.

Доказательство. Пусть O (фиг. 142) будетъ вершина конуса, пусть прямая OA, соединяющая какую-нибудь точку A въ плоскости сѣченія, встрѣчаетъ параллельную ей другую плоскость въ точкѣ a, проведемъ радіусы векторы изъ точекъ A и a къ соотвѣтствующимъ двумъ точкамъ B и b на кривыхъ.

Изъ подобія треугольниковъ $\triangle AOB$ и $\triangle aOb$ имѣемъ:

Фиг. 142.



$$\frac{AB}{ab}=\frac{AO}{aO}$$

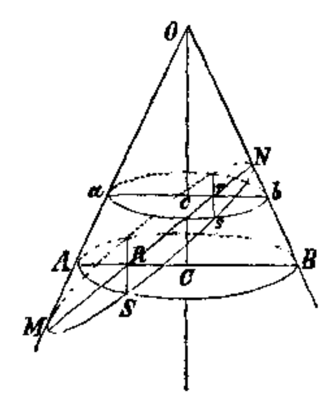
и такъ какъ такая зависимость существуетъ для всѣхъ радіусовъ векторовъ, проведенныхъ изъ точекъ A и a, ко всѣмъ соотвѣтственнымъ точкамъ на кривыхъ, то эти кривыя подобны (§ 287).

Слѣдствіе. Всѣ сѣченія конуса, имѣющаго основаніемъ кругъ, плоскостями параллельными основанію, суть круги.

§ 420. *Опредѣленіе.* Конусъ, коего основаніе есть кругъ, называется *прямымъ*, если основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины на основаніе есть центръ основанія, въ противномъ случаѣ конусъ называется *косымъ*. Разсмотримъ сначала сѣченіе прямого конуса.

Предложеніе. Пересѣченіе прямого конуса плоскостью можетъ быть: эллипсъ, гипербола и парабола.

Фиг. 143.



Доказательство. Пусть (фиг. 143) OAB будетъ плоскость, проходящая по оси OC перпендикулярно къ плоскости MSN сѣченія конуса, пусть плоскости основанія ASB и сѣченія MSN будутъ обѣ перпендикулярны къ плоскости AOB. Пусть RS будетъ пересѣченіе основанія ASB съ MSN, очевидно RS также перпендикулярна къ плоскости AOB.

Случай 1. Положимъ, что прямая MN, по которой пересѣкаются плоскости AOB и MSN, пересѣкаетъ обѣ стороны OA и OB треугольника AOB, съ одной стороны вершины O. Проведемъ плоскость aSb, параллельно основанію ASB, черезъ какую-нибудь изъ точекъ S сѣченія MSN.

Такъ какъ сѣченіе ASB и asb суть круги, то имѣемъ:

$$SR^2 = AR.RB \quad , \quad sr^2 = ar.rb$$

Но изъ подобія треугольниковъ $\triangle ARM$ и $\triangle arM$; $\triangle BRN$ и $\triangle brN$ можно показать, что:

$$AR.RB : RM.RN = ar.rb : Mr.rN$$

откуда:

$$Rs^2 : rS^2 = MR.RN : Mr.rN$$

а такая зависимость показываетъ, что сѣченіе $MSsN$ есть эллипсъ.

Случай 2. Прямая MN встрѣчаетъ продолженіе одной изъ сторонъ, напримѣръ OA (фиг. 144). Поступая, какъ выше, найдемъ ту же зависимость, но только точка M будетъ лежать на продолженіи ребра OA. Легко видѣть изъ этой зависимости, что это будетъ гипербола.

Фиг. 144.

Случай 3. Пусть (фиг. 145) прямая $NM \parallel OA$. Въ этомъ случаѣ, такъ какъ:

$$AR = ar$$

и

$$RB : rb = NR : Nr$$

то имѣемъ:

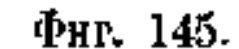
$$RS^2 = AR.RB \quad , \quad rs^2 = AR.rb$$

откуда:

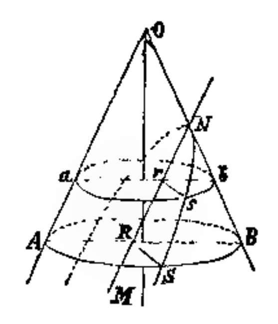
$$rs^2 = \frac{RS^2}{RB} . rb$$

но:

$$RS^2 : RB$$



Фиг. 145.



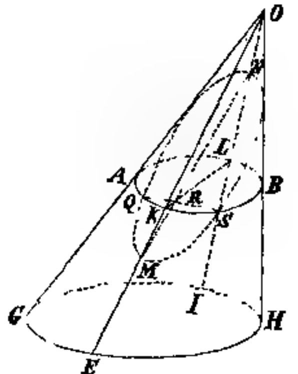
есть величина постоянная, слѣдовательно это свойство параболы.

Проэкціи касательныхъ въ точкахъ A и B къ кругамъ суть касательныя въ точкахъ M и N къ коническимъ сѣченіямъ. Если коническое сѣченіе будетъ парабола, то точка M и касательная будутъ на безконечности, слѣдовательно опять приходимъ къ тому заключенію, что каждая парабола имѣетъ касательной безконечно-удаленную прямую.

§ 421. Теперь положимъ, что конусъ косой. Пусть основаніе конуса есть кругъ; сѣченіе конуса плоскостями параллельными основанію, какъ мы выше видѣли, будутъ круги. Пусть $MSNQ$ будетъ пересѣченіе конуса съ какой-нибудь плоскостью, пусть $AQSRL$ будетъ кругъ, полученный отъ пересѣченія конуса плоскостью параллельною основанію и при томъ проведенною такъ, чтобы кривая и кругъ имѣли общую хорду, пусть эта хорда будетъ QS.

Проведемъ (фиг. 146) діаметръ KL, дѣлящій хорду QS пополамъ, проведемъ прямыя OK и OL; эти прямыя пересѣкутъ кривую $MSNQ$ въ точкахъ M и N, прямая KL будемъ, очевидно, проэкція MN.

Фиг. 146.



Изъ построенія имѣемъ:

$$RS^2 = KR.RL \quad , \quad rS^2 = Kr.rb$$

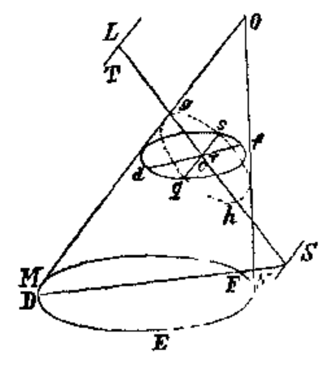
если rS есть хорда пересѣченія кривой другой круговою плоскостью. Изъ подобія треугольниковъ KRM и krM; LRN и lrN въ плоскости OLK найдемъ, что:

$$RS^2 : rS^2 = MR.RN : Mr.rN$$

а это показываетъ, что кривая $MSNQ$ есть коническое сѣченіе, въ которомъ MN есть діаметръ сопряженный хордѣ QS. Кривая будетъ эллипсъ, если MN пересѣкаетъ OL и OK по одну сторону вершины O. Гипербола, если MN пересѣкаетъ эти прямыя съ различныхъ сторонъ точки O, и наконецъ парабола, если MN параллельна одной изъ прямыхъ OL и OK.

§ 422. *Предложеніе.* Если плоскость круговаго сѣченія конуса пересѣчется, какою-нибудь, плоскостью, то сопряженный діаметръ общей хорды QS въ этомъ сѣченіи и въ кругѣ пересѣкутъ QS въ одной точкѣ.

Фиг. 147.



Это предложеніе очевидно, если коническое сѣченіе и кругъ пересѣкаются въ дѣйствительныхъ точкахъ, но требуетъ доказательства, если QS пересѣкаетъ обѣ кривыя въ мнимыхъ точкахъ.

Доказательство. Пусть (фиг. 147) QS будетъ пересѣченіе плоскостей: коническаго сѣченія $qksg$ и круговаго DEF.

Пусть DF будетъ діаметръ перпендикулярный къ QS, проведемъ такую плоскость dqf круговаго сѣченія, въ которой-бы пересѣкались кругъ и коническое сѣченіе въ дѣйствительныхъ точкахъ q и s, очевидно $qs \parallel QS$, черезъ средину r хорды qs проведемъ Rr, мы говоримъ, что Rr есть сопряженный діаметръ направленію qs или QS.

Въ самомъ дѣлѣ, діаметръ df, перпендикулярный къ qs въ кругѣ dqf, очевидно, есть проэкція діаметра DF, слѣдовательно геометрическое мѣсто срединъ хордъ параллельныхъ qs и QS будетъ плоскость Odf. Откуда слѣдуетъ, что діаметръ, сопряженный QS въ какомъ-нибудь сѣченіи есть пересѣченіе плоскости Odf съ плоскостью сѣченія, слѣдовательно Rr и есть этотъ діаметръ.

Легко видѣть, что:

$$dr.rf = rs^2 \quad , \quad gr.rk = \text{квад. діам. парал. } qs$$

Но изъ подобія треугольниковъ, какъ выше, имѣемъ:

$$dr.rf : DR.RF = gr.rk : gR.Rk$$

откуда:

$$DR.RF : gR.kR = rs^2 : \text{квад. діам. парал. } QS$$

а потому, если дано коническое сѣченіе qkg, то можно опредѣлить прямоугольникъ $DR.RF$, т. е. квадратъ касательной проведенной изъ точки R къ кругу DEF.

§ 423. Остается показать, какъ выше упомянули (§ 410), что всякое коническое сѣченіе можно проэктировать кругомъ.

Пусть $gskq$ будетъ, какое-нибудь коническое сѣченіе и TL какая-нибудь прямая въ его плоскости (фиг. 147), очевидно, надобно найти вершину конуса, коего основаніе есть данное коническое сѣченіе $gskq$, и притомъ такъ чтобы кривая пересѣченія этого конуса плоскостью параллельною плоскости QPL, былъ кругъ. Тогда всѣ сѣченія конуса плоскостями параллельными плоскости QTL будутъ круги

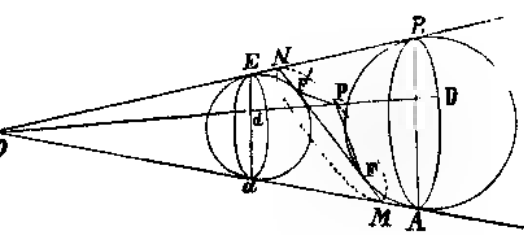
Если L есть точка пересѣченія прямой LT съ сопряженнымъ ей діаметромъ kg, то изъ предъидущаго параграфа слѣдуетъ, что разстояніе OL будетъ извѣстно, такъ какъ вершину O можно разсматривать, какъ безконечно малый кругъ и мы имѣемъ:

$$OL^2 : gL : sL = rs^2 : \text{квадр. діам. парал. } TL$$

OL находится въ перпендикулярной плоскости къ TL. Такъ какъ относительно разстоянія OL мы не имѣемъ другихъ условій, то изъ этого заключаемъ, что вершина искомаго конуса находится на окружности круга въ плоскости перпендикулярной къ TL, коего радіусъ есть OL.

§ 424. *Предложеніе.* Если въ прямой конусъ пересѣченный, какою-нибудь, плоскостью впишемъ шаръ, который бы касался плоскости сѣченія, то точка прикосновенія его съ плоскостью сѣченія будетъ фокусъ коническаго сѣченія, полученнаго пересѣченіемъ плоскости съ конусомъ.

Фиг. 148.



Доказательство. Возьмемъ, какую-нибудь точку P (фиг.148) на коническомъ сѣченіи, соединимъ ее съ вершиною O прямою OP, которая пересѣчетъ плоскости соприкосновенія шаровъ съ конусомъ въ точкахъ D и d.

Если шаръ касается плоскости сѣченія въ точкѣ F, то очевидно $PD = PF$, такъ какъ PD и PF суть касательныя къ шару, точно также, если F' есть точка прикосновенія другаго шара, то $Pd = PF'$; откуда:

$$PD + Pd = Dd = PF + F'P$$

Но отрѣзокъ Dd есть величина постоянная, слѣдовательно точки F и F' суть фокусы коническаго сѣченія. Это интересное предложеніе было уже извѣстно Аппoлонію Пергскому.

Ортогональная проэкція.

§ 425. Если изъ всѣхъ точекъ фигуры опустимъ перпендикуляры на какую-нибудь плоскость, то основанія перпендикуляровъ образуютъ на плоскости фигуру, которая называется *ортогональной проэкціей* данной фигуры.

Слѣдовательно ортогональная проэкція фигуры есть перпендикулярное сѣченіе къ оси цилиндра, проходящаго черезъ данную фигуру.

Легко доказать слѣдующія свойства ортогональной проэкціи:

1. Всѣ параллельные отрѣзки находятся въ постоянномъ отношеніи къ ихъ проэкціи.

2. Всѣ отрѣзки параллельные пересѣченію плоскости фигуры съ плоскостью проэкцій равны ихъ ортогональнымъ проэкціямъ.

3. Площадь фигуры въ данной плоскости находится въ постоянномъ отношеніи къ площади ея ортогональной проэкціи въ другой плоскости.

4. Эллипсъ можетъ быть ортогонально проэктированъ кругомъ.

Конецъ первой части.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

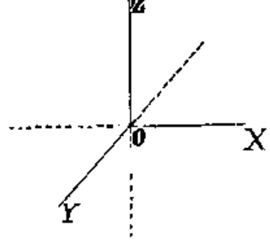
Аналитическая Геометрія трехъ измѣреній.

ГЛАВА XXV.

Методъ координатъ въ пространствѣ.

§ 426. Въ Аналитической Геометріи двухъ измѣреній положеніе точки на плоскости, какъ мы видѣли, опредѣляется разстояніями ея отъ двухъ перпендикулярныхъ между собою прямыхъ. Чтобы опредѣлить положеніе точки въ пространствѣ, возьмемъ три прямыя OX, OY, OZ, проходящія черезъ одну точку O (фиг. 149) перпендикулярныя между собою. Эти прямыя называются *координатными осями*, ось X, ось Y, ось Z. Точка ихъ пересѣченія O называется *началомъ координатъ*.

Фиг. 149.



Плоскости, опредѣленныя осями OX и OY, OX и OZ, OY и OZ, называются *координатными плоскостями*. Обыкновенно плоскость (OX, OY) представляется горизонтальною, слѣдовательно ось Z будетъ перпендикулярна къ ней.

§ 427. Если знаемъ разстояніе точки P (фиг. 150) въ пространствѣ отъ координатныхъ плоскостей (OY, OZ); (OX, OZ); (OX, OY), то положеніе точки относительно координатныхъ плоскостей вполнѣ опредѣляется.

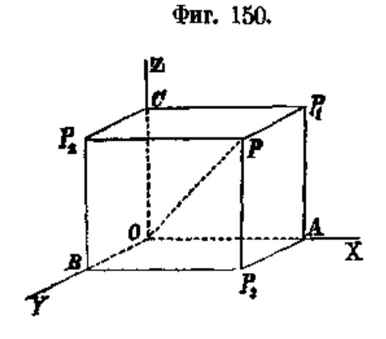
Пусть разстоянія отъ плоскостей (OY, OZ), (OX, OZ) и (OX, OY) будутъ:

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

т. е. $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Черезъ точки A, B, C проведемъ плоскости, перпендикулярныя къ осямъ X, Y и Z. Всѣ точки плоскости перпен-

дикулярной къ оси X будутъ находится на разстояніи a отъ плоскости (OY, OZ); всѣ точки плоскости перпендикулярной къ оси Y будутъ находится на разстояніи b отъ плоскости (OX, OZ), и наконецъ всѣ точки плоскости перпендикулярной къ оси Z будутъ находится на разстояніи c отъ плоскости (OX, OY), слѣдовательно точка P находится на пересѣченіи этихъ трехъ плоскостей и вполнѣ опредѣляется. Числа a, b, c называются *координатами* точки P. Изъ этого видимъ, что положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется тремя уравненіями:

Фиг. 150.



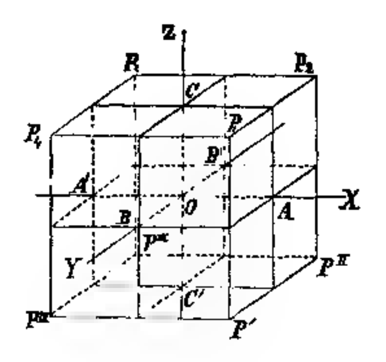
$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

которыя пишутъ въ символической формѣ, для сокращенія, въ видѣ символа (a, b, c).

Три перпендикулярныя плоскости дѣлятъ все пространство на восемь тождественныхъ частей, которыя суть трегранные прямые углы. Въ каждомъ изъ этихъ угловъ находится точка, которой положеніе опредѣляется тѣми же числами a, b, c.

Въ самомъ дѣлѣ, если $OA = OA' = a$ (фиг. 151); $OB = OB' = b$; $OC = OC' = c$, то восемь точекъ P_1, P_2, P_3, P_4; P', P'', P''', P^{IV} будутъ опредѣляться числами a, b, c, слѣдовательно не отличаются одна отъ другой этими числовыми значеніями. Чтобы отличать эти точки одна отъ другой необходимо сдѣлать условіе относительно знаковъ, указывающихъ направленіе, по которому числа a, b, c отсчитываются отъ точки O по осямъ X, Y, Z.

Фиг. 151.



Для этого условились отъ начала O, по оси X, откладывать вправо числа положительныя, а влѣво отрицательныя; по оси Y въ направленіи OB положительныя, а по OB' отрицательныя, и наконецъ по оси Z въ верхъ положительныя, а внизъ отрицательныя. Такое условіе даетъ возможность отличать одну отъ другой всѣ восемь точекъ P, точно также какъ отличали четыре точки въ геометріи на плоскости.

Такъ:

$$P_1 \begin{array}{l} x=+a \\ y=+b \\ z=+c \end{array};\quad P_2 \begin{array}{l} x=+a \\ y=-b \\ z=+c \end{array};\quad P_3 \begin{array}{l} x=-a \\ y=-b \\ z=+c \end{array};\quad P_4 \begin{array}{l} x=-a \\ y=+b \\ z=+c \end{array}$$

$$P' \begin{array}{l} x=+a \\ y=+b \\ z=-c \end{array};\quad P'' \begin{array}{l} x=+a \\ y=-b \\ z=-c \end{array};\quad P''' \begin{array}{l} x=-a \\ y=-b \\ z=-c \end{array};\quad P^{IV} \begin{array}{l} x=-a \\ y=+b \\ z=-c \end{array}$$

Точки P_1 P_2 P_3 (фиг. 150) называются проэкціями точки P на координатныхъ плоскостяхъ (OX, OZ); (OY, OZ); (OX, OY). Эти точки на соотвѣтственныхъ координатныхъ плоскостяхъ опредѣляются уравненіями:

$$P_1 \begin{array}{l} x=a \\ z=c \end{array};\quad P_2 \begin{array}{l} y=b \\ z=c \end{array};\quad P_3 \begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array}$$

Мы предположили, что координатныя оси перпендикулярны между собою, но онѣ могутъ быть наклонены подъ извѣстными углами одна къ другой. Тогда за координаты точки принимаются разстоянія точки P отъ координатныхъ плоскостей, отсчитываемыя параллельно координатнымъ осямъ.

Слѣдовательно, если даны координаты точки, то ея положеніе относительно координатныхъ плоскостей вполнѣ опредѣляется.

Обратно, если положеніе точки относительно координатныхъ плоскостей дано, то легко опредѣлить ея координаты. Для этого надобно черезъ данную точку P (фиг. 150) провести три плоскости перпендикулярныя къ координатнымъ осямъ; разстоянія точекъ встрѣчи этихъ плоскостей съ осями отъ начала координатъ и будутъ искомыя координаты точки.

Легко видѣть, что координаты точекъ P_1, P_2, P_3 (фиг. 150), лежащихъ на плоскостяхъ (OX, OZ); (OY, OZ); (OX, OY), суть:

$$P_1 \begin{array}{l} x=a \\ y=0 \\ z=c \end{array};\quad P_2 \begin{array}{l} x=0 \\ y=b \\ z=c \end{array};\quad P_3 \begin{array}{l} x=a \\ y=b \\ z=0 \end{array}$$

Координаты точекъ A, B и C, лежащихъ на осяхъ, суть:

$$A \begin{array}{l} x=a \\ y=0 \\ z=0 \end{array};\quad B \begin{array}{l} x=0 \\ y=b \\ z=0 \end{array};\quad C \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=c \end{array}$$

Наконецъ координаты начала O суть:

$$x=0 \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=0$$

Геометрическое представленіе уравненія между координатами точки въ пространствѣ.

§ 428. Всѣ точки плоскости, проведенной на разстояніи $x=a$ отъ начала координатъ перпендикулярно къ оси X, находятся на разстояніи a отъ координатной плоскости (OY, OZ), слѣдовательно уравненіе:

$$x=a$$

и представляетъ эту плоскость. Координаты y и z могутъ получать всѣвозможныя значенія, т. е. остаются неопредѣленными.

Если будутъ даны совокупно два уравненія:

$$x=a \quad , \quad y=b$$

а z остается неопредѣленнымъ, то легко видѣть, что этимъ уравненіямъ будутъ удовлетворять всѣ точки прямой пересѣченія плоскостей $x=a$ и $y=b$. Эта прямая перпендикулярна къ плоскости (OX, OY) и встрѣчаетъ эту плоскость въ точкѣ P_3 (фиг. 150). Изъ этихъ двухъ простыхъ примѣровъ видимъ, что одно уравненіе представляетъ поверхность, въ разсматриваемомъ случаѣ плоскость, а два уравненія представляютъ линію, въ настоящемъ случаѣ прямую. Наконецъ видѣли, что три уравненія.

$$x=a \quad , \quad y=b \quad , \quad z=c$$

представляютъ точку.

§ 429. Посмотримъ теперь, что представляетъ уравненіе между координатами x, y, z:

$$F(x, y, z)=0 \tag{1}$$

Рѣшимъ это уравненіе относительно z, пусть это рѣшеніе будетъ:

$$z=f(x, y) \tag{2}$$

Такъ какъ координаты x, y, z связаны только однимъ уравненіемъ, то двѣ изъ координатъ, напримѣръ x и y, могутъ получать совершенно произвольныя значенія, а z будетъ опредѣлятся съ помощью предъидущаго уравненія и получить одно или нѣсколько значеній, для каждой пары значеній x, y, смотря по свойству уравненія (1). Возьмемъ, какую-нибудь, точку на плоскости (OX, OY), пусть ея координаты будутъ a и b, подставимъ эти числа въ уравненіи (2) и опредѣлимъ z; пусть $z=c$.

Изъ точки (a, b) на плоскости (OX, OY) возставимъ перпендикуляръ и отложимъ на немъ отрѣзокъ равный c, получимъ точку въ пространствѣ, координаты которой (a, b, c) будутъ удовлетворять уравненіямъ (1) или (2). Дѣлая подобныя построенія для всѣхъ точекъ плоскости (OX, OY), получимъ соотвѣтственныя точки на перпендикулярахъ возставленныхъ изъ точекъ плоскости (OX, OY). Концы этихъ перпендикуляровъ образуютъ непрерывную поверхность, которая и будетъ геометрическое представленіе алгебраическаго уравненія (1) съ тремя перемѣнными. Можетъ случится, при построеніи, что для извѣстныхъ точекъ плоскости (OX, OY) значеніе для z будетъ мнимое, тогда въ этомъ мѣстѣ нѣтъ поверхности; а иногда извѣстнымъ точкамъ на плоскости соотвѣтствуютъ, каждой, два и болѣе значенія для z, тогда поверхность можетъ имѣть нѣсколько вѣтвей.

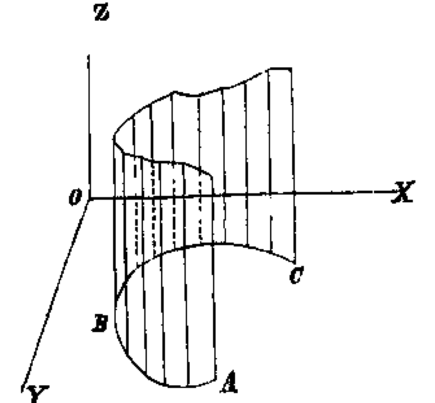
Вообще форма поверхности зависитъ отъ уравненія. Обратно, если знаемъ, какое-нибудь свойство извѣстной поверхности, принадлежащее каждой ея точкѣ, то выражая это свойство уравненіемъ между координатами точекъ, это уравненіе и будетъ алгебраическое представленіе геометрической поверхности. Напримѣръ, мы знаемъ, что всѣ точки поверхности шара равно удалены отъ его центра; выражая это свойство уравненіемъ между координатами точекъ его поверхности, это уравненіе и будетъ его алгебраическое представленіе.

§ 430. Мы видѣли въ Аналитической Геометріи двухъ измѣреній, что уравненіе:

$$f(x, y) = 0$$

представляетъ кривую на плоскости (OX, OY). Пусть эта кривая будетъ ABC (фиг. 152).

Фиг. 152.



Черезъ каждую точку этой кривой возставимъ перпендикуляры къ плоскости (OX, OY), эти перпендикуляры образуютъ цилиндрическую поверхность, которая и будетъ геометрическимъ представленіемъ уравненія $f(x, y) = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ въ уравненіе не входитъ z, то всякая, произвольно взятая, точка на построенной цилиндрической поверхности, будетъ имѣть координаты на плоскости (OX, OY), которыя удовлетворяютъ уравненію $f(x, y) = 0$, слѣдовательно это уравненіе и представляетъ цилиндрическую поверхность, коей женератрисы перпендикулярны къ плоскости

(OX, OY). Уравненія $f_1(x,z)=0$ и $f_2(y,z)=0$ будутъ представлять такія-же цилиндрическія поверхности, коихъ женератрисы будутъ, одна перпендикулярна къ плоскости (OX, OZ), а другая къ плоскости (OY, OZ). Напримѣръ, уравненіе:

$$y = ax + b \tag{3}$$

представляетъ прямую на плоскости (OX, OY), а въ пространствѣ плоскость перпендикулярную къ плоскости (OX, OY) и коей пересѣченіе съ этой послѣдней есть прямая (3).

Уравненія:

$$x = az + b \quad , \quad y = cz + d \tag{4}$$

представляютъ, первое плоскость перпендикулярную къ плоскости (OX, OZ), а второе плоскость перпендикулярную къ плоскости (OY, OZ). Совокупно же онѣ будутъ представлять прямую въ пространствѣ—пересѣченіе двухъ плоскостей (4), такъ какъ координаты всѣхъ точекъ этой прямой будутъ удовлетворять обѣимъ предъидущимъ уравненіямъ.

Мы уже выше видѣли, что уравненія:

$$x = a \quad , \quad y = b$$

представляютъ прямую, перпендикулярную къ плоскости (OX, OY).

§ 431. Возьмемъ два уравненія:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad f_1(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

каждое изъ нихъ представляетъ, какъ видѣли, поверхность, совокупно-же онѣ представляютъ точки общія обѣимъ поверхностямъ, т. е. кривую, по которой эти поверхности пересѣкаются, такъ какъ координаты каждой точки этой кривой должны удовлетворять обѣимъ уравненіямъ (5) поверхностей. Слѣдовательно двѣ поверхности, совокупно взятыя, представляетъ кривую въ пространствѣ.

Исключимъ изъ уравненій (5) перемѣнное z, то получимъ уравненіе:

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{6}$$

это уравненіе, какъ видѣли выше, представляетъ цилиндрическую поверхность, коей женератрисы перпендикулярны къ плоскости (OX, OY). Эта цилиндрическая поверхность, очевидно, проходитъ черезъ кривую пересѣченія поверхностей (5), такъ какъ координаты всѣхъ точекъ этой кривой удовлетворяютъ уравненію (6). Слѣдовательно кривая представляется на-

дѣтою на цилиндръ $\varphi(x,y)=0$. Исключая y изъ уравненій (5), найдемъ цилиндрическую поверхность:

$$\varphi_1(x,z)=0$$

на которую надѣта та же кривая. Слѣдовательно, кривую, пересѣченіе поверхностей (5), можно представить пересѣченіемъ двухъ цилиндровъ:

$$\varphi(x,y)=0 \quad , \quad \varphi_1(x,z)=0$$

коихъ уравненія получаются исключеніемъ сначала z, а послѣ y, между уравненіями поверхностей (5). Очевидно, что третій цилиндръ:

$$\varphi_2(y,z)=0$$

полученный исключеніемъ x, пройдетъ также черезъ ту же кривую, но двухъ цилиндровъ достаточно для представленія кривой въ пространствѣ. Слѣдовательно кривая представляется надѣтою на три цилиндра, коихъ женератрисы перпендикулярны къ координатнымъ плоскостямъ.

Возьмемъ уравненія двухъ поверхностей:

$$f(x,y,z)=0 \quad , \quad z=a$$

первое изъ этихъ уравненій представляетъ, какую-то поверхность, а второе плоскость параллельную плоскости (OX,OY) на разстояніи a. Совокупно эти уравненія представляютъ кривую пересѣченія поверхности $f(x,y,z)=0$ съ плоскостью $z=a$; исключеніе z изъ этихъ уравненій даетъ цилиндрическую поверхность:

$$f(x,y,a)=0$$

или кривую на плоскости (OX,OY). Давая всевозможныя значенія количеству a получимъ рядъ кривыхъ, коихъ форма даетъ нѣкоторое понятіе о формѣ поверхности:

$$f(x,y,z)=0 \tag{7}$$

тоже можно сдѣлать относительно координатъ x, y, что даетъ еще опредѣленнѣе понятіе о формѣ поверхности.

Очевидно уравненія:

$$f(x,y,0)=0 \quad , \quad f(x,0,z)=0 \quad , \quad f(0,y,z)=0$$

полученныя, полагая послѣдовательно въ уравненіи (7) $z=0$, $y=0$, $x=0$

будутъ представлять кривыя пересѣченія поверхности $f(x,y,z)=0$ съ координатными плоскостями (OX, OY), (OX, OZ), (OY, OZ).

§ 432. Если будутъ даны три поверхности:

$$f_1(x,y,z)=0 \quad , \quad f_2(x,y,z)=0 \quad , \quad f_3(x,y,z)=0 \qquad (8)$$

то изъ этихъ трехъ уравненій можно опредѣлить x, y и z; пусть:

$$x=a \quad , \quad y=b \quad , \quad z=c \qquad (9)$$

эти величины представляютъ координаты точки общей тремъ поверхностямъ. Данныя уравненія могутъ имѣть такую форму, что дадутъ нѣсколько системъ:

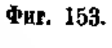
$$\begin{array}{lll} x=a \quad , & y=b \quad , & z=c \\ x=a_1 \quad , & y=b_1 \quad , & z=c_1 \\ x=a_2 \quad , & y=b_2 \quad , & z=c_2 \end{array} \qquad (10)$$

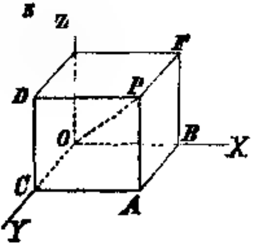
Въ этомъ случаѣ уравненія представляютъ нѣсколько общихъ точекъ тремъ поверхностямъ. Первыя два изъ уравненій (8) представляютъ кривую, первое и послѣднее также кривую, слѣдовательно эти кривыя обѣ находятся на поверхности $f_1(x,y,z)=0$, точки ихъ пересѣченія даны координатами (9) или (10).

Этихъ объясненій достаточно для составленія отчетливаго представленія о методѣ координатъ въ пространствѣ.

Рѣшеніе нѣкоторыхъ вопросовъ.

§ 433. Теперь рѣшимъ нѣсколько вопросовъ, которые намъ будутъ необходимы во всѣхъ послѣдующихъ изслѣдованіяхъ.


Фиг. 153.



Задача 1. Даны координаты точки, найти ея растояніе отъ начава координатъ?

Рѣшеніе. Пусть координаты данной точки P (фиг. 153) будутъ x_1, y_1, z_1, а разстояніе ея отъ начала пусть будетъ r.

Координаты точки P, очевидно, суть стороны, построеннаго параллелепипеда $\left(\begin{matrix}ABOC\\PFED\end{matrix}\right)$, коего стороны суть: $OB=x_1$, $OC=y_1$, $OE=z_1$.

Діагональ $OP=r$. Но извѣстно, что квадратъ построенный на діагонали прямаго параллелепипеда равенъ суммѣ квадратовъ, построенныхъ на его сторонахъ, т. е.:

$$OP^2=OB^2+OC^2+OE^2$$

или:

$$r^2 = x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 \tag{11}$$

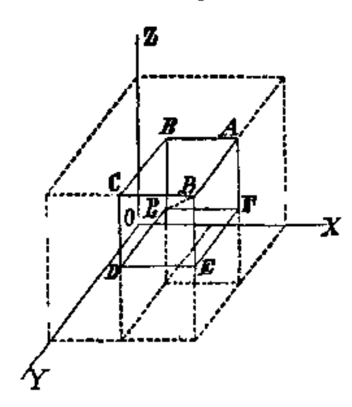
Слѣдствіе. Если бы точка P перемѣщалась такъ, чтобы ея координаты удовлетворяли во всѣхъ ея положеніяхъ предъидущему уравненію, а r было бы постоянно, то уравненіе:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{12}$$

будетъ представлять поверхность шара, коего радіусъ есть r, а центръ находится въ началѣ координатъ.

Задача. 2. Даны координаты двухъ точекъ, найти разстояніе между ними?

Фиг. 154.



Рѣшеніе. Пусть данныя точки будутъ P_1 и P_2; ихъ координаты x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 (фиг. 154). Построимъ параллелепипедъ, коего діагональю было бы разстояніе $P_1P_2 = r$, а стороны были-бы параллельны координатнымъ осямъ.

Пусть этотъ параллелепипедъ будетъ $\left(\begin{matrix} ABCP_1 \\ FP_2DE \end{matrix}\right)$, стороны его суть P_2F, P_2D и P_2B; очевидно, имѣемъ:

$$P_2F = x_1 - x_2 \quad , \quad P_2D = y_1 - y_2 \quad , \quad P_2B = z_1 - z_2$$

но:

$$P_1P^2_2 = P_2F^2 + P_2D^2 + P_2B^2$$

слѣдовательно:

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \tag{13}$$

Если въ этомъ уравненіи будемъ измѣнять x_1, y_1, z_1, а r и x_2, y_2, z_2 оставимъ постоянными, то это уревненіе будетъ представлять поверхность шара, коего радіусъ есть r, а центръ находится въ точкѣ (x_2, y_2, z_2).

Если координатныя оси будутъ косоугольныя и составляютъ углы α, β, γ между собою, то разстояніе выразится формулой:

$$P_1P_2{}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\gamma + \\ + 2(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)\cos\beta + 2(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)\cos\alpha \tag{14}$$

полагая $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$, найдемъ разстояніе δ начала координатъ отъ точки $(x_1y_1z_1)$:

$$\delta^2 = x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 + 2x_1y_1\cos\gamma + 2x_1z_1\cos\beta + 2y_1z_1\cos\alpha \tag{15}$$

Задача. 3. Найти радіусъ шара, который проходитъ черезъ точки (0,0,0), (0,2,0), (1,0,0), (0,0,3)?

Рѣшеніе. Надобно рѣшить три уравненія:

$$x^2+y^2+(z-3)^2=(x-1)^2+y^2+z^2$$
$$x^2+y^2+(z-3)^2=x^2+(y-2)^2+z^2$$
$$x^2+y^2+(z-3)^2=x^2+y^2+z^2$$

откуда координаты центра будутъ:

$$x=\frac{1}{2} \quad , \quad y=1 \quad , \quad z=\frac{3}{2}$$

а радіусъ:

$$r^2=\frac{14}{4}$$

Задача 4. Выразить, что разстояніе точки (x,y,z) отъ точки $(2,-1,1)$ равно 3.

Отв.

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9.$$

§ 434. Если разстояніе точки, коей координаты суть $(x_1 y_1 z_1)$, отъ начала координатъ, означимъ черезъ r, а углы которые r составляетъ съ координатными осями X, Y, Z означимъ черезъ α, β, γ, то будемъ имѣть (12):

$$r^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$$

или:

$$\left(\frac{x_1}{r}\right)^2+\left(\frac{y_1}{r}\right)^2+\left(\frac{z_1}{r}\right)^2=1$$

Но, очевидно:

$$x_1=r\cos\alpha \quad , \quad y_1=r\cos\beta \quad , \quad z_1=r\cos\gamma$$

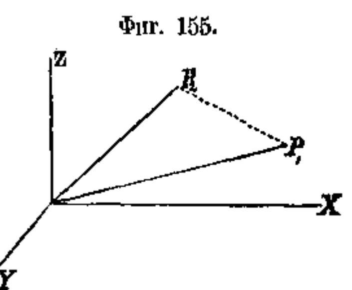
слѣдовательно:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{16}$$

такимъ уравненіемъ связаны углы, которые, какая-нибудь прямая, проходящая черезъ начало координатъ, составляетъ съ координатными осями.

Если прямая не проходитъ черезъ начало координатъ, то для опредѣленія угловъ, которые она составляетъ съ координатными осями, надобно провесть черезъ начало координатъ прямую параллельную данной прямой; углы, которые эта послѣдняя прямая составляетъ съ координатными осями и суть углы, составляемые съ тѣми-же осями данной прямой въ пространствѣ.

§ 435. *Задача.* Найти уголъ между двумя прямыми, проходящими черезъ начало координатъ?



Фиг. 155.

Рѣшеніе. Пусть данныя прямыя будутъ OP_1 и OP_2 (фиг. 155); пусть углы, которые онѣ составляютъ съ координатными осями будутъ α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2.

Возьмемъ на данныхъ прямыхъ, какія нибудь, точки P_1 и P_2; пусть координаты этихъ точекъ будутъ $(x_1 y_1 z_1)$; $(x_2 y_2 z_2)$, соединимъ точки P_1 и P_2 прямою P_1P_2 и разстояніе означимъ черезъ δ. Означимъ разстоянія точекъ P_1 и P_2 отъ начала координатъ черезъ r_1 и r_2, а уголъ между этими прямыми черезъ φ.

Выше видѣли (§ 433), что:

$$\delta^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 =$$

$$= x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 + x^2_2 + y^2_2 + z^2_2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

или:

$$\delta^2 = r^2_1 + r^2_2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$$

но изъ $\triangle\ OP_1P_2$ имѣемъ:

$$\delta^2 = r^2_1 + r^2_2 - 2r_1r_2\cos\varphi$$

подставляя, найдемъ:

$$r_1r_2\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

откуда:

$$\cos\varphi = \frac{x_1}{r_1}\cdot\frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1}\cdot\frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1}\cdot\frac{z_2}{r_2}$$

но:

$$x_1 = r_1\cos\alpha_1 \quad , \quad y_1 = r_1\cos\beta_1 \quad , \quad z_1 = r_1\cos\gamma_1$$

$$x_2 = r_2\cos\alpha_2 \quad , \quad y_2 = r_2\cos\beta_2 \quad , \quad z_2 = r_2\cos\gamma_2$$

слѣдовательно:

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \qquad (17)$$

Если прямыя OP_1 и OP_2 перпендикулярны, то имѣемъ:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0 \qquad (18)$$

Если двѣ прямыя не проходятъ черезъ начало координатъ, то за уголъ

между ними принимается уголъ, который прямыя, проведенныя черезъ начало координатъ параллельно даннымъ, составляютъ между собою. Слѣдовательно уголъ между прямыми, не проходящими черезъ начало координатъ, выразится тою-же формулой (17).

Легко видѣть, что:

$$\sin^2\varphi = (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)^2 + \\ + (\cos\alpha_1\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\gamma_1)^2 + (\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1)^2 \qquad (19)$$

§ 436. *Задача.* Найти косинусы угловъ, которые прямая, перпендикулярная къ двумъ даннымъ прямымъ, составляетъ съ координатными осями?

Рѣшеніе. Пусть углы, которые двѣ данныя прямыя составляютъ съ координатными осями будутъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; означимъ углы искомой прямой съ координатными осями черезъ α, β, γ.

Такъ какъ искомая прямая перпендикулярна къ двумъ даннымъ прямымъ, то имѣемъ (16 и 18):

$$\cos\alpha_1\cos\alpha + \cos\beta_1\cos\beta + \cos\gamma_1\cos\gamma = 0$$

$$\cos\alpha_2\cos\alpha + \cos\beta_2\cos\beta + \cos\gamma_2\cos\gamma = 0$$

и

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Изъ первыхъ двухъ найдемъ:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1}$$

Возвышая въ квадратъ, складывая числители и знаменатели, и извлекая корень, найдемъ:

$$\begin{aligned} \sin\varphi\cos\alpha &= \cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1 \\ \sin\varphi\cos\beta &= \cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1 \\ \sin\varphi\cos\gamma &= \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1 \end{aligned} \qquad (20)$$

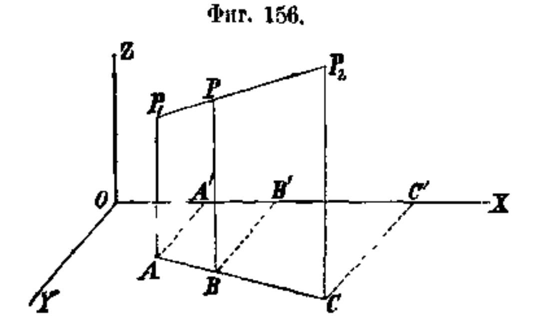
гдѣ $\sin\varphi$ есть выраженіе (19), т. е. синусъ угла между данными прямыми.

Если данныя прямыя пересѣкаются, то искомая прямая будетъ перпендикулярна къ плоскости двухъ данныхъ прямыхъ.

§ 437. *Задача.* Даны координаты двухъ точекъ, найти координаты точки, дѣлящей разстояніе между данными точками въ данномъ отношеніи?

Рѣшеніе. Пусть координаты данныхъ точекъ P_1 и P_2 (фиг. 156) будутъ $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, данное отношеніе $m:n$.

Фиг. 156.



Пусть координаты искомой точки P будутъ x, y, z. Опустимъ изъ точекъ P_1, P и P_2 перпендикуляры P_1A, PB, P_2C на плоскость (OX, OY).

По условію, имѣемъ:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$$

Но:

$$A'B' = x - x_1 \quad , \quad B'C' = x_2 - x$$

слѣдовательно:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

откуда:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} \tag{21}$$

точно также найдемъ:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} \quad , \quad z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} \tag{22}$$

Если положимъ:

$$\frac{m}{n} = \lambda$$

то три координаты искомой точки выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad , \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \tag{23}$$

Если отношеніе λ будетъ количествомъ отрицательнымъ, то точка P лежитъ внѣ отрѣзка P_1P_2 и дѣлитъ разстояніе между точками P_1 и P_2 внѣшне въ томъ же отношеніи.

Давая отношенію λ всевозможныя величины отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ всѣ точки на прямой, проходящей черезъ точки P_1 и P_2; изъ всѣхъ величинъ λ единственная есть -1, при которой всѣ три коорди-

наты (23) обращаются въ ∞, слѣдовательно на прямой P_1P_2 есть только одна точка на безконечности.

Пр. Если $\lambda = 1$, то точка P дѣлитъ разстояніе PP_2 пополамъ и ея координаты суть:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad , \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

ГЛАВА XXVI.

Плоскость.

§ 438. Мы видѣли въ § 428, что плоскость параллельная плоскости (OY, OZ) на разстояніи a отъ начала координатъ представляется уравненіемъ первой степени:

$$x = a$$

а плоскость перпендикулярная къ плоскости (OX, OY) выражается уравненіемъ первой степени (§ 430):

$$y = ax + b$$

Плоскости въ этихъ двухъ случаяхъ имѣютъ исключительное положеніе относительно координатныхъ осей. Посмотримъ какимъ уравненіемъ выражается плоскость, имѣющая какое нибудь положеніе относительно координатныхъ осей.

Чтобы представить плоскость уравненіемъ надобно одно изъ ея свойствъ, принадлежащее каждой изъ ея точекъ, выразить уравненіемъ между координатами точекъ на плоскости. Такихъ свойствъ плоскость имѣетъ нѣсколько, возьмемъ одно изъ нихъ, напримѣръ, слѣдующее.

Если изъ какой-нибудь точки на плоскости возставимъ къ ней перпендикуляръ и продолжимъ его въ обѣ стороны плоскости, то каждая точка на плоскости будетъ равно-удалена отъ двухъ точекъ взятыхъ на перпендикулярѣ въ равномъ разстояніи отъ его основанія.

Изъ начала координатъ опустимъ на плоскость перпендикуляръ и продолжимъ его по другую сторону плоскости такъ, чтобы это продолженіе было равно разстоянію начала координатъ отъ точки встрѣчи съ перпендикуляромъ Пусть координаты, такимъ образомъ, построенной точки будутъ x_1, y_1, z_1. Возьмемъ какую-нибудь точку на плоскости, пусть ея координаты будутъ x, y, z. Квадратъ разстоянія этой послѣдней точки отъ начала будетъ:

$$x^2 + y^2 + z^2$$

а отъ точки $(x_1 y_1 z_1)$:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

Слѣдовательно, по свойству плоскости, будемъ имѣть:

$$x^2+y^2+z^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$$

откуда:

$$x_1 x+y_1 y+z_1 z-\frac{x^2_1+y^2_1+z^2_1}{2}=0 \qquad (1)$$

Изъ этого видимъ, что плоскость выражается уравненіемъ первой степени между координатами произвольно взятой на ней точки. Слѣдуетъ только показать, обратно, что всякое уравненіе первой степени:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

есть аналитическое выраженіе плоскости въ пространствѣ.

Для этого надобно только показать, что уравненію (2) можно дать форму уравненія (1); слѣдовательно уравненіе (2) въ формѣ (1) будетъ выражать свойство плоскости, выраженное этимъ послѣднимъ уравненіемъ.

Помножимъ уравненіе (2) на неопредѣленный множитель λ и приравнемъ коэфиціенты при одинаковыхъ перемѣнныхъ, что дасть слѣдующія уравненія:

$$\lambda A=x_1 \quad , \quad \lambda B=y_1 \quad , \quad \lambda C=z_1 \quad , \quad \lambda D=-\frac{x^2_1+y^2_1+z^2_1}{2} \qquad (3)$$

изъ этихъ уравненій найдемъ:

$$\lambda=\frac{-2D}{A^2+B^2+C^2} \quad , \quad x_1=\frac{-2DA}{A^2+B^2+C^2} \quad ,$$
$$y_1=\frac{-2DB}{A^2+B^2+C^2} \quad , \quad z_1=\frac{-2DC}{A^2+B^2+C^2} \qquad (4)$$

откуда видимъ, что уравненіе (2), умноженное на λ, принимаетъ форму (1), въ которомъ x, y, z, опредѣляются предъидущими уравненіями (4), дающими для x_1, y_1, z_1, величины всегда дѣйствительныя.

Изъ этого видимъ, что уравненіе (2) съ произвольными коэфиціентами A, B, C, D есть самое общее алгебраическое представленіе плоскости.

§ 439. Общее уравненіе плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (5)$$

содержитъ четыре коэфиціента A, B, C, D, но по раздѣленіи на одинъ изъ нихъ будемъ имѣть уравненіе только съ тремя коэфиціентами, которыми опредѣляется, какъ увидимъ ниже, положеніе плоскости, поэтому ихъ называютъ *координатами плоскости.*

Чтобы найти точки пересѣченія плоскости съ координатными осями x, y и z надобно, послѣдовательно, положить въ уравненіи (5):

$$x=a \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=0 \quad ; \quad x=0 \quad , \quad y=b \quad , \quad z=0 \; ;$$
$$x=0 \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=c$$

что даетъ:

$$Aa=-D \quad , \quad Bb=-D \quad , \quad Cc=-D$$

подставляя эти величины въ уравненіе (5) вмѣсто A, B, C, оно сдѣлается:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{6}$$

гдѣ a, b, c суть отрѣзки, которые плоскость дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ. Форму уравненія (6) называютъ *канонической формой* уравненія плоскости.

§ 440. Изъ начала координатъ опустимъ перпендикуляръ на плоскость (6), пусть длина этого перпендикуляра будетъ p.

Очевидно, что косинусы угловъ α, β, γ, которые этотъ перпендикуляръ составляетъ съ координатными осями, будутъ:

$$\cos\alpha=\frac{p}{a} \quad , \quad \cos\beta=\frac{p}{b} \quad , \quad \cos\gamma=\frac{p}{c}$$

Помножая уравненіе (6) на p и подставляя предъидущія выраженія, уравненіе (6) приметъ форму:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \tag{7}$$

которая называется *нормальной формой* уравненія плоскости.

§ 441. Если уравненіе (2) сравнимъ съ уравненіемъ (7), т. е. помножимъ это послѣднее на неопредѣленный коэфиціентъ λ и приравняемъ коэфиціенты при x, y, z, то найдемъ:

$$\lambda\cos\alpha=A \quad , \quad \lambda\cos\beta=B \quad , \quad \lambda\cos\gamma=C \quad , \quad p=-\lambda D \tag{8}$$

откуда, возвышая первыя три уравненія въ квадратъ и складывая, найдемъ:

$$\lambda^2=A^2+B^2+C^2 \tag{9}$$

откуда:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad ,$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{10}$$

и:

$$p = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{11}$$

знакъ передъ радикаломъ опредѣляется слѣдующимъ образомъ: условимся разъ на всегда принимать перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на плоскость за величину положительную, а также и всѣ перпендикуляры, опущенные на плоскость изъ точекъ, лежащихъ съ той-же стороны плоскости съ какой лежитъ и начало координатъ; всѣ перпендикуляры, опущенные на плоскость изъ точекъ, лежащихъ съ противуположной стороны плоскости принимаются за величины отрицательныя. При такомъ условіи легко опредѣлить знакъ радикала въ выраженіяхъ (10). Для этого возьмемъ выраженіе (11), въ этомъ выраженіи p, по условію, есть величина положительная, слѣдовательно, если въ уравненіи (5) D есть величина положительная, то радикалъ надобно взять съ знакомъ—, въ противномъ случаѣ съ знакомъ $+$.

Изъ выраженій (10) видимъ, что положеніе плоскости относительно координатныхъ осей опредѣляется только коэфиціентами A, B, C, такъ что измѣняя D, плоскость будетъ только переносится параллельно сама себѣ.

Легко перейти отъ общаго уравненія плоскости (5) къ нормальной ея формѣ, для этого надобно уравненіе (5) раздѣлить только на $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, то въ силу выраженій (10) форма ея сдѣлается нормальной:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

Примѣръ 1. Найти косинусы угловъ, которые перпендикуляръ къ плоскости:

$$2x-3y+5z-3=0$$

составляетъ съ координатными осями?

Отв. Такъ какъ послѣдній членъ отрицательный, то радикалъ надобно взять съ знакомъ $+$.

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{38}} \quad , \quad \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{38}} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{38}}$$

и:

$$p = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

Примѣръ 2. Найти косинусы угловъ, которые плоскость:

$$y - ax - b = 0$$

составляетъ съ координатными осями и дать ей нормальную форму?

Отв.

$$\cos\alpha = \frac{a}{-\sqrt{1+a^2}}\ ,\quad \cos\beta = \frac{1}{-\sqrt{1+a^2}}\ ,\quad \cos\gamma = 0\ ,\quad \frac{y - ax - b}{\sqrt{1+a^2}} = 0$$

§ 442. *Задача.* Найти длину перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на данную плоскость?

Рѣшеніе. Пусть данная точка будетъ $(x_1 y_1 z_1)$, данная плоскость въ нормальной формѣ (7):

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \qquad (12)$$

черезъ данную точку $(x_1 y_1 z_1)$ проведемъ плоскость параллельно данной плоскости. Означимъ черезъ p_1 длину перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на эту послѣднюю плоскость. Очевидно ея уравненіе будетъ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p_1 \qquad (13)$$

Если означимъ длину искомаго перпендикуляра черезъ δ, то будемъ имѣть:

$$\delta = \mp(p_1 - p) \qquad (14)$$

Но точка $(x_1 y_1 z_1)$ лежитъ на плоскости (13), слѣдовательно будемъ имѣть:

$$p_1 = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma$$

подставляя эту величину въ (14), найдемъ:

$$\delta = \mp(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p) \qquad (15)$$

Откуда видимъ, что если въ уравненіе плоскости, въ нормальной формѣ, подставимъ координаты точки, лежащей внѣ плоскости, то получается числовая величина, которая будетъ длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки $(x_1 y_1 z_1)$ на плоскость. Знакъ $\mp$ берется, смотря потому съ какой стороны плоскости лежитъ точка $(x_1 y_1 z_1)$ относительно начала координатъ (§ 441).

Это свойство плоскости въ формѣ (7) послужило къ названію уравненія (12) *нормальнымъ*.

Если уравненіе плоскости дано не въ нормальной формѣ, а въ общей, то его надобно написать въ нормальной:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

и подставить вмѣсто x, y, z значенія x_1, y_1, z_1, что даетъ:

$$\delta = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Примѣръ 1. Найти разстояніе начала координатъ отъ плоскости:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$$

Отв. Плоскость эта, написанная въ нормальной формѣ, будетъ:

$$\frac{bcx + acy + abz - 2\,abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}} = 0$$

полагая $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и замѣчая, что перпендикуляръ δ изъ начала координатъ на данную плоскость есть величина положительная, найдемъ:

$$\delta = \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$$

Примѣръ 2. Найти разстояніе точки $x = 0$, $y = 0$, $z = c$ отъ плоскости:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 1$$

Отв. Въ нормальной формѣ эта плоскость будетъ:

$$\frac{bcx + acy - abz - abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}\,.$$

полагая $x = 0$, $y = 0$, $z = c$, найдемъ:

$$\delta = \frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}$$

Примѣръ 3. Найти разстояніе двухъ параллельныхъ плоскостей:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

Отв. Въ нормальной формѣ эти плоскости будутъ:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad , \quad \frac{Ax + By + Cz + D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Если назовемъ черезъ p и p_1 ихъ разстоянія отъ начала координатъ, то будемъ имѣть (11):

$$p = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad , \quad p_1 = \frac{D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

откуда разстояніе плоскостей будетъ:

$$\delta = p_1 - p = \frac{D_1 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

§ 443. *Задача.* Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ данную точку?

Рѣшеніе. Пусть данная точка будетъ $(x_1 y_1 z_1)$. Возьмемъ уравненіе плоскости въ самой общей формѣ:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Если эта плоскость проходитъ черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$, то должны имѣть:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

Вычитая это уравненіе изъ предъидущаго, найдемъ:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (16)$$

Если бы уравненіе плоскости было взято въ канонической или нормальной формахъ, то уравненія плоскостей, проходящихъ черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$ будутъ:

$$\frac{x - x_1}{a} + \frac{y - y_1}{b} + \frac{z - z_1}{c} = 0 \qquad (17)$$

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0 \qquad (18)$$

Если плоскость должна проходить черезъ начало координатъ, то $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, слѣдовательно ея уравненіе будетъ:

$$Ax + By + Cz = 0$$

§ 444. *Задача.* Найти косинусъ угла между двумя данными плоскостями?

Рѣшеніе. Пусть данныя плоскости будутъ:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Если назовемъ черезъ α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 углы, которые перпендикуляры, опущенные изъ начала координатъ на данныя плоскости, составляютъ съ координатными осями, то будемъ имѣть (10):

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \cos\beta_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \cos\gamma_2 = \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Если назовемъ черезъ φ уголъ между перпендикулярами, опущенными на плоскости, то найдемъ (§ 435):

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A^2_2 + B^2_2 + C^2_2}\ \sqrt{A^2_1 + B^2_1 + C^2_1}} \tag{19}$$

Легко видѣть, что:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(A_1B_2 - A_2B_1)^2 + (A_1C_2 - A_2C_1)^2 + (B_1C_2 - B_2C_1)^2}}{\sqrt{A^2_1 + B^2_1 + C^2_1}\ \sqrt{A^2_2 + B^2_2 + C^2_2}} \tag{20}$$

Если плоскости перпендикулярны, то $\cos\varphi = 0$, а если параллельны, то $\sin\varphi = 0$. Первое условіе даетъ:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{21}$$

а второе:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \quad , \quad A_1C_2 - A_2C_1 = 0 \quad , \quad B_1C_2 - B_2C_1 = 0$$

или:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{22}$$

Это послѣднее условіе показываетъ, что если въ двухъ плоскостяхъ коэфиціенты при перемѣнныхъ пропорціональны, то плоскости параллельны. Это мы уже замѣтили выше (§ 441).

Изъ формулъ (19) и (20) имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{(A_1B_2 - A_2B_1)^2 + (A_1C_2 - A_2C_1)^2 + (B_1C_2 - B_2C_1)^2}}{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2} \tag{23}$$

Пр. Найти уголъ между плоскостями:

$$cy - bz = 0 \quad , \quad cx - az = 0$$

и между плоскостями:

$$x - az - p = 0 \quad , \quad y - bz - q = 0$$

Отв.

$$\cos\varphi = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{b^2 + c^2}} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{ab}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + b^2}}$$

§ 445. *Задача.* Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ три данныя точки?

Рѣшеніе Пусть данныя точки будутъ:

$$(x_1y_1z_1) \quad , \quad (x_2y_2z_2) \quad , \quad (x_3y_3z_3)$$

Напишемъ уравненіе плоскости въ общей формѣ:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Такъ какъ эта плоскость должна проходить черезъ данныя точки, то должны имѣть.

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$
$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

Изъ этихъ четырехъ уравненій можно исключить коэфиціенты A, B, C, D и найдемъ:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (24)$$

Это уравненіе линейное относительно x, y, z и удовлетворяется координатами данныхъ трехъ точекъ, слѣдовательно это есть уравненіе искомой плоскости.

§ 446. *Задача.* Найти точку пересѣченія трехъ данныхъ плоскостей?

Рѣшеніе. Пусть данныя плоскости будутъ:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (25)$$

Такъ какъ точка пересѣченія лежитъ на всѣхъ трехъ плоскостяхъ, то ея координаты найдутся изъ трехъ предъидущихъ уравненій, опредѣливъ изъ нихъ x, y, z.

Легко видѣть, что:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_3 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}} \qquad y = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_3 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}} \qquad z = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_3 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}$$

Если бы случилось, что въ предъидущихъ выраженіяхъ знаменатель равенъ нулю, то точка пересѣченія плоскостей будетъ на безконечности, если же и числители равны нулю, то есть безчисленное множество точекъ пересѣченія трехъ плоскостей, въ этомъ случаѣ всѣ три плоскости пересѣкаются по одной прямой. Можно дать слѣдующій признакъ пересѣченія трехъ плоскостей по одной прямой линіи. Если три плоскости:

$$A=0 \quad , \quad B=0 \quad , \quad C=0$$

пересѣкаются по одной прямой линіи, то всегда можно подобрать такія три числа λ, μ, ν, для которыхъ будетъ существовать тождество:

$$\lambda A+\mu B+\nu C=0$$

Въ самомъ дѣлѣ, точки, лежащія на пересѣченіи плоскостей $A=0$ и $B=0$, удовлетворяютъ уравненіе:

$$\lambda A+\mu B=0$$

а слѣдовательно для этихъ точекъ и $C=0$.

§ 447. *Задача.* Найти условіе, что четыре плоскости проходятъ черезъ одну точку?

Рѣшеніе. Пусть данныя плоскости будутъ (25) и четвертая:

$$A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \tag{26}$$

условіе это найдется, если найденныя величины для x, y, z изъ уравненій (25) подставимъ въ уравненіе (26). Но это условіе можно выразить опредѣлителемъ, исключая x, y, z между уравненіями (25) и (26), что даетъ:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0 \tag{27}$$

Признакъ пересѣченія четырахъ плоскостей:

$$A=0 \quad , \quad B=0 \quad , \quad C=0 \quad , \quad D=0$$

въ одной точкѣ можно еще найти слѣдующимъ образомъ.

Если можно найти такія четыре числа λ, μ, ν и δ, что:

$$\lambda A+\mu B+\nu C+\delta D=0$$

то четыре плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ. Въ самомъ дѣлѣ, координаты точки пересѣченія плоскостей:

$$A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad , \quad C = 0$$

удовлетворяютъ и $D = 0$ въ силу предъидущаго тождества.

§ 448. Если одно изъ уравненій двухъ плоскостей:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{28}$$

помножимъ на неопредѣленный множитель λ и сложимъ, то получимъ уравненіе:

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \tag{29}$$

которое есть тоже плоскость, такъ какъ оно линейное относительно x, y, z. Давая λ всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ безчисленное множество—систему плоскостей, которыя всѣ проходятъ черезъ пересѣченіе данныхъ плоскостей, такъ такъ координаты точекъ, удовлетворяющихъ обѣимъ уравненіямъ (28) удовлетворяютъ и (29). Между всѣми плоскостями (29) находятся и данныя (28) именно, когда $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

Такъ какъ плоскость (29) заключаетъ одно неопредѣленное количество λ, то для опредѣленія ея требуется еще одно условіе.

Пр. 1. Опредѣлить λ такъ, чтобы плоскость (29) проходила черезъ точку $(x_1y_1z_1)$?

Рѣш. Если плоскость (29) проходитъ черезъ точку $(x_1y_1z_1)$, то имѣемъ:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) = 0$$

откуда:

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}$$

подставляя это значеніе λ въ (29), найдемъ искомую плоскость:

$$\begin{aligned}(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)(Ax + By + Cz + D) - \\ -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0\end{aligned} \tag{30}$$

Если плоскость должна проходить черезъ начало координатъ, то $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, слѣдовательно уравненіе плоскости будетъ:

$$(AD_1 - A_1D)x + (BD_1 - B_1D)y + (CD_1 - C_1D)z = 0 \tag{31}$$

Пр. 2. Опредѣлить λ такъ, чтобы плоскость (29) была перпендикулярна къ прямой, которая составляетъ углы α, β, γ съ координатными осями.

Рѣш. Очевидно, условіе это будетъ (§ 441):

$$(A + \lambda A_1)\cos\alpha + (B + \lambda B_1)\cos\beta + (C + \lambda C_1)\cos\gamma = 0$$

§ 449. Если два изъ трехъ уравненій плоскостей:

$$
\begin{aligned}
Ax + By + Cz + D &= 0\\
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \qquad (32)\\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0
\end{aligned}
$$

помножимъ на неопредѣленные множители λ, μ и сложимъ, то получимъ четвертую плоскость:

$$
\begin{aligned}
(Ax + By + Cz + D) + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) +\\
+ \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (33)
\end{aligned}
$$

которая, очевидно, проходитъ черезъ точку пересѣченія трехъ плоскостей (32), такъ какъ координаты точки пересѣченія удовлетворяютъ всѣ три уравненія (32), а слѣдовательно удовлетворяютъ и (33). Такъ какъ уравненіе плоскости (33) содержитъ два произвольные множителя λ, μ, то оно можетъ удовлетворять еще двумъ условіямъ.

Пр. 1. Чтобы плоскость проходила еще черезъ двѣ точки $(x_1\, y_1\, z_1)$ и $(x_2\, y_2\, z_2)$?

Пр. 2. Чтобы плоскость была перпендикулярна къ прямой, которая составляетъ углы α, β, γ съ координатными осями и проходила черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$?

Первая задача дастъ для опредѣленія λ и μ два уравненія.

$$
\begin{aligned}
(A + \lambda A_1 + \mu A_2)\, x_1 + (B + \lambda B_1 + \mu B_2)\, y_1 + (C + \lambda C_1 + \mu C_2)\, z_1 + D + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0\\
(34)\\
(A + \lambda A_1 + \mu A_2)\, x_2 + (B + \lambda B_1 + \mu B_2)\, y_2 + (C + \lambda C_1 + \mu C_2)\, z_2 + D + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0
\end{aligned}
$$

или:

$$
\begin{aligned}
(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)\lambda + (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)\mu + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0\\
(A_1x_2 + B_1y_2 + C_1z_2 + D_1)\lambda + (A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 + D_2)\mu + Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0
\end{aligned}
$$

изъ этихъ уравненій можно опредѣлить μ и λ.

Для второй задачи уравненія будутъ: первое изъ предъидущихъ (34), а второе (§ 444):

$$(A + \lambda A_1 + \mu A_2) \cos \alpha + (B + \lambda B_1 + \mu B_2) \cos \beta + (C + \lambda C_1 + C_2) \cos \gamma = 0$$

или:

$$(A_1\cos\alpha + B_1\cos\beta + C_1\cos\gamma)\lambda + (A_2\cos\alpha + B_2\cos\beta + C_2\cos\gamma)\mu + A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0 \qquad (35)$$

изъ которыхъ легко опредѣлить λ и μ.

Пр. 3. Уравненіе:

$$ax + by + c + \lambda z = 0 \qquad (36)$$

гдѣ λ есть неопредѣленный коэфиціентъ, представляетъ плоскость, проходящую черезъ пересѣченіе плоскостей:

$$ax + by + c = 0 \quad , \quad z = 0$$

ГЛАВА XXVII.

Прямая.

§ 450. Въ § 431 мы видѣли, что уравненія двухъ поверхностей, совокупно взятыя, представляютъ кривую—пересѣченіе двухъ поверхностей, слѣдовательно уравненія двухъ плоскостей представляютъ прямую въ пространствѣ.

Пусть уравненія двухъ плоскостей будутъ:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad , \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{1}$$

Если изъ этихъ уравненій исключимъ сначала y, а потомъ x, то найдемъ два уравненія:

$$x = az + b \quad , \quad y = cz + d \tag{2}$$

Это суть проэкціи прямой на плоскостяхъ (OX, OZ); (OY, OZ) или уравненія плоскостей перпендикулярныхъ къ тѣмъ-же координатнымъ плоскостямъ, пересѣченіемъ которыхъ замѣщено пересѣченіе плоскостей (1). Изъ уравненій (2) видимъ, что уравненіе прямой линіи въ пространствѣ содержитъ четыре постоянныя величины—параметра, которыми опредѣляются положеніе прямой въ пространствѣ.

§ 451. Если на пересѣченіи плоскостей возьмемъ, какую-нибудь, точку $(x_1y_1z_1)$, то уравненія плоскостей можно написать въ формѣ (§ 443):

$$\begin{aligned} A_1(x - x_1) + B_1(y - y_1) + C_1(z - z_1) = 0 \\ A_2(x - x_1) + B_2(y - y_1) + C_2(z - z_1) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

такъ какъ обѣ плоскости (1) проходятъ черезъ точку $(x_1y_1z_1)$.

Изъ этихъ уравненій легко получить слѣдующія:

$$\frac{x - x_1}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - y_1}{C_1A_2 - C_2A_1} = \frac{z - z_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \tag{4}$$

которыя суть ничто иное, какъ уравненія прямой, проходящей черезъ точку $(x_1y_1z_1)$, которыми замѣщены уравненія двухъ плоскостей (1).

§ 452. Если означимъ черезъ α, β, γ углы этой прямой съ координатными осями, черезъ r разстояніе какой нибудь скользящей точки по ней $(x\,y\,z)$ отъ точки $(x_1y_1z_1)$, то найдемъ:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma} = r \tag{5}$$

это суть уравненія прямой, проходящей черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$ и составляющей углы α, β, γ съ координатными осями.

Изъ этихъ уравненій имѣемъ:

$$x = x_1 + r\cos\alpha \quad , \quad y = y_1 + r\cos\beta \quad , \quad z = z_1 + r\cos\gamma \qquad (6)$$

т. е. координаты точки выражены съ помощью одного перемѣннаго параметра r.

Если прямая, выраженная уравненіями (5) есть таже, что и выраженная уравненіями (4), то будемъ имѣть:

$$\lambda\cos\alpha = B_1C_2 - B_2C_1 \; , \; \lambda\cos\beta = C_1A_2 - C_2A_1 \; , \; \lambda\cos\gamma = A_1B_2 - A_2B_1 \quad (7)$$

λ есть неопредѣленный коэфиціентъ, на который помножили знаменатели уравненій (5), чтобы отождествить ихъ съ уравненіями (4). Если уравненія (7) возвысимъ въ квадратъ и сложимъ, то опредѣлимъ λ, именно:

$$\lambda^2 = (B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (C_1A_2 - C_2A_1)^2 + (A_1B_2 - A_2B_1)^2 \qquad (8)$$

Слѣдовательно:

$$\cos\alpha = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{\lambda} \quad , \quad \cos\beta = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{\lambda} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\lambda} \quad (9)$$

гдѣ λ имѣетъ выраженіе (8).

Изъ этого видимъ, что если прямая дается общими уравненіями двухъ плоскостей (1), то косинусы угловъ, которые она составляетъ съ координатными осями, даются уравненіями (9).

§ 453. Если уравненія прямой даны въ формѣ:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C} \qquad (10)$$

то сравнивая ихъ съ (5), найдемъ:

$$\lambda\cos\alpha = A \quad , \quad \lambda\cos\beta = B \quad , \quad \lambda\cos\gamma = C$$

откуда:

$$\lambda^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

Слѣдовательно:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \, , \, \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \, , \, \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (11)$$

§ 454. Если уравненія прямой даны въ формѣ:

$$x = az + b \quad , \quad y = cz + d \tag{12}$$

то ихъ можно написать такъ:

$$\frac{x-b}{a} = \frac{y-d}{c} = \frac{z-0}{1} \tag{13}$$

Если эти уравненія сравнимъ съ уравненіями (5), то легко видѣть, что прямая проходитъ черезъ точку (b, d, 0) и составляетъ углы съ координатными осями, коихъ косинусы пропорціональны количествамъ a, c и 1, то есть:

$$\lambda \cos\alpha = a \quad , \quad \lambda \cos\beta = c \quad , \quad \lambda \cos\gamma = 1$$

откуда, какъ выше, найдемъ:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2+1}} \, , \cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2+1}} \, , \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2+1}} \tag{14}$$

§ 455. Мы видѣли, что если двѣ точки ($x_1 y_1 z_1$), ($x_2 y_2 z_2$) въ пространствѣ даны, то всякая точка ($x\,y\,z$) на прямой, проходящей черезъ данныя двѣ точки, выражается съ помощью перемѣннаго параметра λ (§ 437):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad , \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \tag{15}$$

исключая этотъ параметръ изъ этихъ трехъ уравненій, найдемъ уравненія прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки:

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2} \tag{16}$$

Эти уравненія можно получить просто изъ уравненій (5) замѣчая, что:

$$\cos\alpha = \frac{x_1-x_2}{r} \quad , \quad \cos\beta = \frac{y_1-y_2}{r} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z_1-z_2}{r}$$

Въ уравненіяхъ (16), очевидно, въ числителяхъ можно поставить вмѣсто координатъ x_1, y_1, z_1 координаты x_2, y_2, z_2.

Это и всѣ формы, которыя можно дать уравненіямъ прямой.

§ 456. Двѣ прямыя въ пространствѣ вообще не пересѣкаются, спрашивается, какая зависимость должна существовать между коэфиціентами прямыхъ для того, чтобы онѣ пересѣклись?

Пусть уравненія прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} x &= az + b \quad , \quad x = a_1 z + b_1 \\ y &= cz + d \quad , \quad y = c_1 z + d_1 \end{aligned} \tag{17}$$

такъ какъ координаты точки пересѣченія должны удовлетворять всѣмъ предъидущимъ уравненіямъ, то x, y и z, опредѣленныя изъ трехъ уравненій, должны удовлетворять и четвертому, что даетъ:

$$\frac{b - b_1}{a - a_1} = \frac{d - d_1}{c - c_1} \tag{18}$$

это и есть условіе пересѣченія прямыхъ (17). Если $a = a_1$ и $c = c_1$, то условіе (18) удовлетворяется; но это условіе параллельности линій, т. е. онѣ находятся въ одной плоскости, а слѣдовательно пересѣкаются (на безконечности).

§ 457. Рѣшимъ теперь нѣкоторыя задачи относительно прямой и плоскости.

Задача 1. Найти уголъ между двумя прямыми:

$$\frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{B_1} = \frac{z - z_1}{C_1} \quad , \quad \frac{x - x_2}{A_2} = \frac{y - y_2}{B_2} = \frac{z - z_2}{C_2} \tag{19}$$

Рѣшеніе. Такъ какъ косинусы угловъ, которые эти прямыя составляютъ съ координатными осями суть (§ 444).

$$\cos\alpha_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A^2_1 + B^2_1 + C^2_1}}, \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A^2_1 + B^2_1 + C^2_1}}, \cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{A^2_1 + B^2_1 + C^2_1}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A^2_2 + B^2_2 + C^2_2}}, \cos\beta_2 = \frac{B_2}{\sqrt{A^2_2 + B^2_2 + C^2_2}}, \cos\gamma_2 = \frac{C_2}{\sqrt{A^2_2 + B^2_2 + C^2_2}}$$

слѣдовательно (§ 444):

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C}{\sqrt{A^2_1 + B^2_1 + C^2_1}\sqrt{A^2_2 + B^2_2 + C^2_2}} \tag{20}$$

откуда, если прямыя перпендикулярны, то:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_2 C_2 = 0 \tag{21}$$

Задача 2. Найти уголъ между прямой и плоскостю?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе плоскости будетъ:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{22}$$

а уравненія прямой:

$$\frac{x-x_1}{A_1}=\frac{y-y_1}{B_1}=\frac{z-z_1}{C_1} \qquad (23)$$

Изъ выраженій для угловъ (§ 441), перпендикуляра къ плоскости (22) и выраженій для угловъ прямой (23) найдемъ, что:

$$\cos\varphi=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \qquad (24)$$

Если-бы прямая была дана въ формѣ:

$$x=az+c \quad , \quad y=bz+d$$

то очевидно:

$$\cos\varphi=\frac{aA+bB+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+1}} \qquad (25)$$

Если прямая перпендикулярна къ плоскости, то:

$$aA+bB+C=0 \qquad (26)$$

Задача. 3. Написать уравненіе плоскости перпендикулярной къ прямой:

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C} \qquad (27)$$

Рѣшеніе. Соображаясь съ предъидущимъ, найдемъ:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (28)$$

гдѣ D остается неопредѣленнымъ, если-же плоскость должна проходить черезъ точку $(x_2y_2z_2)$, то будемъ имѣть:

$$A(x-x_2)+B(y-y_2)+C(z-z_2)=0 \qquad (29)$$

Если прямая будетъ дана уравненіями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad , \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (30)$$

то уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку $(x_1\,y_1\,z_1)$ и перпедикулярной къ пересѣченію двухъ предъидущихъ плоскостей, будетъ (§ 452):

$$(B_1C_2-B_2C_1)(x-x_1)+(C_1A_2-C_2A_1)(y-y_1)+(A_1B_2-A_2B_1)(z-z_1)=0 \quad (31)$$

Наконецъ если уравненія прямой будутъ въ формѣ:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma} \tag{32}$$

то уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку $(x_2\,y_2\,z_2)$, перпендикулярной къ прямой (32), будетъ:

$$(x-x_2)\cos\alpha+(y-y_2)\cos\beta+(z-z_2)\cos\gamma=0 \tag{33}$$

Задача 4. Написать уравненія прямой перпендикулярной къ плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{34}$$

Рѣшеніе. Легко видѣть, что уравненія прямой будутъ, если она еще проходитъ черезъ точку $(x_1\,y_1\,z_1)$:

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C} \tag{35}$$

Задача 5. Найти уравненіе плоскости, опредѣленной двумя пересѣкающимися прямыми?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1}\,;\quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_2}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_2} \tag{36}$$

прямыя проходятъ черезъ точку $(x_1\,y_1\,z_1)$.

Если означимъ черезъ A, B, C косинусы угловъ, которые составляетъ съ координатными осями перпендикуляръ къ искомой плоскости, то ея уравненіе будетъ, какъ видѣли выше (§ 443, 16):

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \tag{37}$$

такъ какъ и плоскость проходитъ черезъ точку $(x_1\,y_1\,z_1)$.

Такъ какъ перпендикуляръ къ плоскости будетъ перпендикуляромъ и къ прямымъ (36), то имѣемъ (§ 436):

$$\begin{aligned} A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1&=0\\ A\cos\alpha_2+B\cos\beta_2+C\cos\gamma_2&=0 \end{aligned} \tag{38}$$

откуда найдемъ:

$$\frac{A}{\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1}=\frac{B}{\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1}=\frac{C}{\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1} \tag{39}$$

Подставляя въ (37) вмѣсто A, B, C величины пропорціональныя, найдемъ искомое уравненіе:

$$(x-x_1)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)+(y-y_1)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)+$$
$$+(z-z_1)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)=0 \quad (40)$$

Задача 6. Найти условіе, при которомъ прямая:

$$x=az+b \quad , \quad y=cz+d \quad (41)$$

или:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma} \quad (42)$$

лежитъ въ плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (43)$$

Рѣшеніе. Прямую (41) можно написать въ формѣ (§ 454):

$$\frac{x-b}{a}=\frac{y-d}{c}=\frac{z-0}{1}$$

слѣдовательно она проходитъ черезъ точку $(b, d, 0)$; такъ какъ, по условію, она находится вся въ плоскости (43), то точка $(b, d, 0)$ должна удовлетворять уравненію (43), т. е.:

$$Ab+Bd+D=0 \quad (44)$$

Но перпендикуляръ къ плоскости (43) долженъ быть перпендикуляромъ и къ прямой (41), слѣдовательно имѣемъ еще одно условіе:

$$Aa+Bc+C=0 \quad (45)$$

Если прямая будетъ дана въ формѣ (42), то предъидущія условія (44), (45) будутъ:

$$\left.\begin{aligned} &Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ &A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0 \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Задача 7. Найти уравненіе плоскости, опредѣленной двумя параллельными прямыми:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma} \quad ; \quad \frac{x-x_2}{\cos\alpha}=\frac{y-y_2}{\cos\beta}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma} \quad (47)$$

Рѣшеніе. Очевидно въ искомой плоскости будетъ находится прямая, соединяющая точки $(x_1\, y_1\, z_1)$ и $(x_2\, y_2\, z_2)$, но ея уравненіе, какъ выше видѣли, есть (§ 455):

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} \tag{48}$$

слѣдовательно задача сводится на 5-ую: Написать уравненіе плоскости опредѣленной одной изъ прямыхъ (47) и прямою (48)?

Откуда легко видѣть, что косинусы угловъ, которые перпендикуляръ къ искомой плоскости составляетъ съ координатными осями, пропорціональны выраженіямъ:

$$(y_1 - y_2)\cos\gamma - (z_1 - z_2)\cos\beta \quad ; \quad (z_1 - z_2)\cos\alpha - (x_1 - x_2)\cos\gamma \quad ;$$
$$(x_1 - x_2)\cos\alpha - (y_1 - y_2)\cos\beta \tag{49}$$

такъ какъ углы, которые прямая (48) составляетъ съ координатными осями пропорціональны разностямъ $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$.

Слѣдовательно уравненіе искомой плоскости будетъ:

$$\begin{aligned} &\{(y_1 - y_2)\cos\gamma - (z_1 - z_2)\cos\beta\}(x - x_1) + \\ &+ \{(z_1 - z_2)\cos\alpha - (x_1 - x_2)\cos\gamma\}(y - y_1) + \\ &+ \{(x_1 - x_2)\cos\beta - (y_1 - y_2)\cos\alpha\}(z - z_1) = 0 \end{aligned} \tag{50}$$

Задача 8. Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ прямую:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad , \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \tag{51}$$

и перпендикулярную къ плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{52}$$

Рѣшеніе. Такъ какъ искомая плоскость должна проходить черезъ пересѣченіе плоскостей (51), то ея уравненіе есть:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \tag{53}$$

или:

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda D_2 = 0 \tag{54}$$

Но эта плоскость, по условію, перпендикулярна къ плоскости (52), слѣдовательно имѣемъ:

$$A(A_1 + \lambda A_2) + B(B_1 + \lambda B_2) + C(C_1 + \lambda C_2) = 0 \tag{55}$$

опредѣляя изъ этого уравненія λ и вставляя въ уравненіе (53), найдемъ уравненіе искомой плоскости:

$$\lambda = -\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{AA_2 + BB_2 + CC_2} \tag{56}$$

слѣдовательно:

$$\begin{gathered}(AA_2 + BB_2 + CC_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - \\ -(AA_1 + BB_1 + CC_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0\end{gathered} \tag{57}$$

Если уравненія прямой и плоскости даны въ формахъ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad , \quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z-z_2}{\cos\gamma_1} \tag{58}$$

то искомую плоскость можно написать въ формѣ:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

но такъ какъ перпендикуляръ къ этой плоскости перпендикуляренъ къ перпендикуляру къ плоскости (58) и перпендикуляренъ къ прямой (58), то имѣемъ (38):

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

$$A\cos\alpha_1 + B\cos\beta_1 + C\cos\gamma_1 = 0$$

откуда:

$$\frac{A}{\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma} = \frac{B}{\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha} = \frac{C}{\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta}$$

слѣдовательно уравненіе искомой плоскости будетъ:

$$\begin{gathered}(\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\beta_1\cos\gamma)(x-x_1) + (\cos\gamma\cos\alpha_1 - \cos\gamma_1\cos\alpha)(y-y_1) + \\ + (\cos\alpha\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta)(z-z_1) = 0\end{gathered} \tag{59}$$

Задача 9. Даны уравненія двухъ непересѣкающихся прямыхъ:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma_1} \quad ; \quad \frac{x-x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos\beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos\gamma_2} \tag{60}$$

написать уравненіе плоскости, проходящей черезъ одну изъ данныхъ прямыхъ параллельно другой?

Рѣшеніе. Если искомая плоскость будетъ проходить по первой прямой, то ея уравненіе будетъ:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \tag{61}$$

Но перпендикуляръ къ этой плоскости перпендикуляренъ къ обѣимъ прямымъ (60), слѣдовательно (40) уравненіе искомой плоскости будетъ:

$$(x-x_1)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)+(y-y_1)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)+$$
$$+(z-z_1)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)=0 \tag{62}$$

Очевидно, что уравненіе плоскости, проходящей по второй изъ прямыхъ (60) параллельно первой, будетъ:

$$(x-x_2)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)+(y-y_2)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)+$$
$$+(z-z_2)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)=0 \tag{63}$$

Разстояніе между плоскостями (62) и (63), очевидно, будетъ разность перпендикуляровъ, опущенныхъ на эти плоскости изъ начала координатъ. Чтобы найти длину этихъ перпендикуляровъ надобно плоскостямъ (62) и (63) дать нормальную форму и положить въ нихъ $x=0$, $y=0$, $z=0$ (§ 442).

Чтобы этимъ плоскостямъ дать нормальную форму надобно обѣ раздѣлить на корень квадратный изъ суммы квадратовъ выраженій:

$$\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1 \quad , \quad \cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1 \quad , \quad \cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1$$

но этотъ корень есть ничто иное, какъ синусъ угла между плоскостями (§ 435), слѣдовательно, разстояніе между плоскостями будетъ, если черезъ φ назовемъ уголъ между ними:

$$\frac{(x_1-x_2)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)+(y_1-y_2)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)+}{\sin\varphi}$$
$$\frac{+(z_1-z_2)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)}{\sin\varphi} \tag{64}$$

Задача 10. Найти длину и уравненіе кратчайшаго разстоянія между двумя непересѣкающимися прямыми?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1} \quad ; \quad \frac{x-x_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma_2} \tag{65}$$

уравненія плоскостей, изъ коихъ каждая проходитъ черезъ одну изъ этихъ прямыхъ параллельно другой, какъ видѣли выше (62) и (63) суть:

$$\left.\begin{aligned}&(x-x_1)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)+(y-y_1)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)+\\&\qquad+(z-z_1)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)=0\\&(x-x_2)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)+(y-y_2)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)+\\&\qquad+(z-z_2)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)=0\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

разстояніе между этими плоскостями, какъ мы видѣли есть (64); оно-же, очевидно, и кратчайшее. Чтобы найти уравненія прямой, проходящей черезъ точки на прямыхъ (65), которыхъ, разстояніе есть кратчайшее, надобно составить уравненія двухъ плоскостей, изъ коихъ каждая, проходя черезъ одну изъ прямыхъ (65), была-бы перпендикулярна къ одной изъ плоскостей (66). Очевидно, что пересѣченіе этихъ плоскостей будетъ перпендикулярно къ обѣимъ прямымъ, а слѣдовательно и есть прямая кратчайшаго разстоянія.

Пусть уравненіе одной изъ этихъ плоскостей, положимъ той, которая проходитъ по первой изъ прямыхъ (65) и перпендикулярна ко второй изъ плоскостей (66), будетъ:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (67)$$

Такъ какъ эта плоскость проходитъ по первой прямой (65), то имѣемъ (§ 457):

$$A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1=0 \qquad (68)$$

но плоскость (67) должна быть перпендикулярна ко второй изъ плоскостей (66), слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}&(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)A+(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)B+\\&\qquad+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)C=0\end{aligned}\right\}\quad(69)$$

откуда найдемъ, что A, B, C пропорціональны выраженіямъ:

$$\cos\beta_1(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)-\cos\gamma_1(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)$$
$$\cos\gamma_1(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)-\cos\alpha_1(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)$$
$$\cos\alpha_1(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1)-\cos\beta_1(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1)$$

Если вспомнимъ, что:

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

то легко видѣть, что три предъидущія выраженія будутъ:

$$-\cos\alpha_2+\cos\alpha_1\cos\varphi\quad,\quad -\cos\beta_2+\cos\beta_1\cos\varphi\quad,\quad -\cos\gamma_2+\cos\gamma_1\cos\varphi$$

Слѣдовательно уравненіе искомой плоскости будетъ:

$$(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\varphi)(x-x_1)+(\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\varphi)(y-y_1)+ \\ +(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\varphi)(z-z_1)=0 \qquad (70)$$

Уравненіе другой плоскости, очевидно, будетъ, по симметріи:

$$(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\varphi)(x-x_2)+(\cos\beta_1-\cos\beta_2\cos\varphi)(y-y_2)+ \\ +(\cos\gamma_1-\cos\gamma_2\cos\varphi)(z-z_2)=0 \qquad (71)$$

Эти двѣ плоскости (70) и (71) и представляютъ прямую кратчайшаго разстоянія между данными двумя прямыми. Косинусы угловъ, которые прямая кратчайшаго разстоянія составляетъ съ координатными осями, очевидно, пропорціональны выраженіямъ:

$$\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\beta_2\cos\gamma_1\,;\,\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\gamma_2\cos\alpha_1\,;\,\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1$$

ГЛАВА XXVIII.

Двойственность въ пространствѣ.

Плоскость и точка.

§ 458. Мы видѣли, что уравненіе плоскости, приведенное къ простѣйшему виду содержитъ три постоянныя величины, которыя опредѣляютъ ея положеніе въ пространствѣ, таковы косинусы угловъ, которые перпендикуляръ къ плоскости составляетъ съ координатными осями и длина перпендикуляра, опущеннаго изъ начала координатъ на плоскость, отрѣзки, которые плоскость дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ и наконецъ, въ самой общей формѣ, отношенія трехъ коэфиціентовъ къ четвертому. Эти три величины, опредѣляющія положеніе плоскости въ пространствѣ мы будемъ называть *координатами плоскости;* очевидно, что онѣ во всѣхъ своихъ видахъ суть ничто иное, какъ три точки, такъ какъ положеніе плоскости опредѣляется *тремя точками;* отсюда вытекаетъ такая взаимность: что точка въ пространствѣ опредѣляется тремя плоскостями—это

система Декарта, а плоскость опредѣляется тремя точками; отсюда вытекаетъ то что называютъ *двойственностью координатъ*, которая состоитъ въ томъ, что три постоянныя величины можно разсматривать, какъ координаты точки или какъ координаты плоскости.

Въ первомъ случаѣ точка опредѣляется координатами или тремя уравненіями, а плоскость однимъ; во второмъ, плоскость опредѣляется координатами или тремя уравненіями, а точка однимъ уравненіемъ.

§ 459. Возьмемъ уравненіе плоскости въ канонической формѣ (§ 439):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{1}$$

гдѣ a, b, c суть отрѣзки, которые плоскость дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ. Возьмемъ на этой плоскости, какую нибудь, точку $(x_1\,y_1\,z_1)$, то будемъ имѣть:

$$\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}+\frac{z_1}{c}=1 \tag{2}$$

Если координаты точки, т. е. x_1, y_1, z_1 оставимъ постоянными, а отрѣзки a, b, c будемъ измѣнять, но такъ, чтобы они удовлетворяли постоянно уравненіе (2), то плоскость будетъ измѣнять свое положеніе, при чемъ будетъ постоянно проходить черезъ точку $(x_1\,y_1\,z_1)$. При такомъ условіи, разсматривая $(x_1\,y_1\,z_1)$, какъ постоянныя, а (a, b, c), какъ перемѣнныя величины, уравненіе (2) будетъ представлять уравненіе точки.

Чтобы дать этому уравненію болѣе симметрическую форму мы вмѣсто отрѣзковъ a, b, c возьмемъ ихъ обратныя величины съ противными знаками, т. е. положимъ:

$$\frac{1}{a}=-\xi \quad , \quad \frac{1}{b}=-\eta \quad , \quad \frac{1}{c}=-\zeta \tag{3}$$

тогда уравненіе (2) приметъ весьма простую форму:

$$x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta+1=0 \tag{4}$$

Если это уравненіе напишемъ въ формѣ:

$$x\xi+y\eta+z\zeta+1=0 \tag{5}$$

то разсматривая въ немъ ξ, η, ζ, какъ величины постоянныя, а x, y, z, какъ перемѣнныя, оно будетъ представлять плоскость, коей положеніе опредѣляется величинами или координатами ξ, η, ζ, а каждая по ней скользящая точка будетъ опредѣлятся перемѣнными x, y, z, удовлетворяющими уравненіе (5).

Обратно, если x, y, z будемъ разсматривать, какъ величины постоянныя, а ξ, η, ζ, какъ перемѣнныя, то уравненіе (5) будетъ представлять точку. которой положеніе опредѣляется координатами $(x\,y\,z)$; координаты плоскости, принимающей всевозможныя положенія около точки $(x\,y\,z)$ опредѣляются величинами перемѣнными ξ, η, ζ удовлетворяющими уравненіе (5).

§ 460. Если уравненія плоскости или точки будутъ даны общими уравненіями:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0 \tag{6}$$

то координаты плоскости, въ первомъ, а координаты точки, во второмъ, *очевидно*, будутъ:

$$\frac{A}{D} \;,\; \frac{B}{D} \;,\; \frac{C}{D} \tag{7}$$

Если будутъ, слѣдовательно, даны координаты плоскости ξ_1, η_1, ζ_1, то ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0 \tag{8}$$

а если даны координаты точки x_1, y_1, z_1, то ея уравненіе будетъ:

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0 \tag{9}$$

§ 461. Перенесемъ теперь, по смыслу двойственности, теоремы, найденныя выше, относительно плоскости, на теоремы относительно точки.

Пр. 1. Если положеніе плоскости дано координатами ξ_1, η_1, ζ_1, то ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0$$

Пр. 2. Если плоскость дана уравненіемъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0$$

то ея координаты будутъ:

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1$$

Пр. 3. Если уравненіе плоскости дано въ общей формѣ:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

то ея координаты будутъ:

$$\frac{A}{D} \;,\; \frac{B}{D} \;,\; \frac{C}{D}$$

Пр. 1. Если положеніе точки дано координатами x_1, y_1, z_1, то ея уравненіе будетъ:

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0$$

Пр. 2. Если точка дана уравненіемъ:

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0$$

то ея координаты будутъ:

$$x_1, y_1, z_1$$

Пр. 3. Если уравненіе точки дано въ общей формѣ:

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

то ея координаты будутъ:

$$\frac{A}{D} \;,\; \frac{B}{D} \;,\; \frac{C}{D}$$

Эта взаимность не имѣла бы мѣста если бы за координаты плоскости взяли не обратныя величины отрѣзковъ съ противными знаками, а сами отрѣзки.

Пр. 4. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$ есть (§ 443):

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

или

$$\xi_1(x-x_1)+\eta_1(y-y_1)+\zeta_1(z-z_1)=0$$

Пр. 5. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ три точки:

$$(x_1\, y_1\, z_1)\ ,\ (x_2\, y_2\, z_2)\ ,\ (x_3\, y_3\, z_3)$$

есть:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пр 6. Если четыре плоскости:

$$\xi_1 x+\eta_1 y+\zeta_1 z+1=0$$
$$\xi_2 x+\eta_2 y+\zeta_2 z+1=0$$
$$\xi_3 x+\eta_3 y+\zeta_3 z+1=0$$
$$\xi_4 x+\eta_4 y+\zeta_4 z+1=0$$

пересѣкаются въ одной точкѣ, то:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пр. 4. Уравненіе точки, лежащей на плоскости $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ есть:

$$A(\xi-\xi_1)+B(\eta-\eta_1)+C(\zeta-\zeta_1)=0$$

или

$$x_1(\xi-\xi_1)+y_1(\eta-\eta_1)+z_1(\zeta-\zeta_1)=0$$

Пр 5. Уравненіе точки находящейся на трехъ плоскостяхъ:

$$(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\ ,\ (\xi_2\,\eta_2\,\zeta_2)\ ,\ (\xi_3\,\eta_3\,\zeta_3)$$

есть:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пр. 6. Если четыре точки:

$$x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta+1=0$$
$$x_2\xi+y_2\eta+z_2\zeta+1=0$$
$$x_3\xi+y_3\eta+z_3\zeta+1=0$$
$$x_4\xi+y_4\eta+z_4\zeta+1=0$$

лежатъ въ одной плоскости то:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Изъ этихъ примѣровъ видимъ, что переходъ отъ однихъ теоремъ или выраженій къ другимъ дѣлается, замѣщая слова *плоскость—точкою*, а слова *точка—плоскостью.*

§ 462. Но если входятъ въ выраженія углы и отрѣзки, то такого перехода сдѣлать нельзя, а надобно перевесть всѣ данныя относительно точки на плоскость и рѣшить задачу въ этой системѣ.

Задача 1. Найти уголъ между двумя плоскостями, коихъ положеніе дано координатами?

Рѣшеніе Пусть координаты двухъ данныхъ плоскостей будутъ:

$$(\xi_1 \eta_1 \zeta_1) \quad ; \quad (\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$$

Если координаты плоскости даны, то уравненіе ея легко написать (§ 460), слѣдовательно уравненія двухъ данныхъ плоскостей будутъ:

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0 \quad , \quad \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z + 1 = 0$$

откуда уголъ φ между ними будетъ (§ 444):

$$\cos\varphi = \frac{\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2}}$$

Задача 2. Найти углы, которые прямая, соединяющая двѣ данныя (уравненіями) точки, составляетъ съ координатными осями?

Рѣшеніе. Пусть уравненія двухъ данныхъ точекъ будутъ:

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0 \quad , \quad x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + 1 = 0$$

Очевидно, координаты этихъ точекъ суть:

$$x_1, y_1, z_1 \quad ; \quad x_2, y_2, z_2$$

Слѣдовательно уравненія прямой, соединяющей эти двѣ точки будутъ (§ 455):

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2} = r$$

откуда если α, β, γ суть углы, которые эта прямая составляетъ съ координатными осями, а r разстояніе точекъ, то (§ 455):

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_2}{r} \quad , \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_2}{r} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z_2}{r}$$

Задача 3. Найти разстояніе точки данной уравненіемъ:

$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0 \tag{10}$$

отъ плоскости данной координатами $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$?

Рѣшеніе. Такъ какъ точка дана уравненіемъ (10), то ея координаты суть $(x_1\, y_1\, z_1)$, а плоскость дана координатами, то ея уравненіе есть (§ 460):

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0 \tag{11}$$

Слѣдовательно задача сводится на слѣдующую: найти разстояніе точки $(x_1 y_1 z_1)$ отъ плоскости (11), которая рѣшена въ § 442, а для этого надобно написать уравненіе (11) въ нормальной формѣ:

$$\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = 0 \tag{12}$$

и вставить въ него координаты данной точки; если разстояніе означимъ чрезъ r, то найдемъ:

$$\frac{\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = r \tag{13}$$

Если $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, то разстояніе начала координатъ отъ плоскости $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ будетъ:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = r \tag{14}$$

Уравненіе (13) можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$(\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 + 1)^2 = r^2(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) \tag{15}$$

Если въ этомъ уравненіи отбросимъ при ξ_1, η_1, ζ_1 индексы и примемъ ихъ за величины перемѣнныя, но удовлетворяющія предъидущему уравненію, то плоскость, которой положеніе будетъ опредѣлятся этими перемѣнными, будетъ принимать всевозможныя положенія около точки $(x_1 y_1 z_1)$, находясь отъ нея постоянно на разстояніи r, слѣдовательно во всѣхъ своихъ положеніяхъ она будетъ касаться шара, коего радіусъ есть r, а центръ въ точкѣ $(x_1\ y_1\ z_1)$, а потому уравненіе:

$$(x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1)^2 = r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \tag{16}$$

будетъ алгебраическое представленіе поверхности шара, коего радіусъ есть r, а центръ данъ уравненіемъ:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta + 1 = 0 \tag{17}$$

Если центръ шара находится въ началѣ координатъ, то $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, а уравненіе (16) приметъ весьма простую форму:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 \tag{18}$$

Это будетъ уравненіе поверхности шара, коего центръ находится въ началѣ координатъ, радіусъ есть r, а плоскость, коей координаты

удовлетворяютъ уравненіе (18) касается во всѣхъ своихъ положеніяхъ этого шара.

Изъ этого примѣра видимъ, что можно разсматривать поверхность шара, какъ обвертку плоскостей, которыя касаются его во всѣхъ своихъ положеніяхъ, если координаты, опредѣляющія эти положенія, удовлетворяютъ уравненія (16) или (18).

§ 463. Разсмотримъ теперь, какъ слѣдуетъ понимать уравненіе, связывающее координаты, опредѣляющія положеніе плоскости. Пусть будетъ какое нибудь уравненіе:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{19}$$

Это уравненіе имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, каждая система ξ, η, ζ, удовлетворяющая уравненіе (19), опредѣляетъ положеніе плоскости; этихъ положеній можетъ быть нѣсколько, смотря по характеру уравненія. Плоскости эти, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, будутъ касаться поверхности, которой форма и свойства будутъ зависить отъ уравненія (19). Поверхность эта называется *обверткой* всѣхъ положеній плоскостей, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненіе (19).

Слѣдовательно разъ поверхность представляется, какъ непрерывный рядъ точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ извѣстному уравненію $f(x, y, z) = 0$, другой разъ, какъ непрерывный рядъ плоскостей, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненіе $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$. Пояснимъ это примѣрами:

Пр. 1 Мы видѣли, что уравненіе:

$$x = a$$

представляетъ плоскость перпендикулярную къ оси x на разстояніи a отъ начала координатъ.

Пр. 2. Уравненія:

$$x = a \quad , \quad y = b$$

совокупно, представляютъ прямую пересѣченія двухъ плоскостей:

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b$$

Пр. 3. Уравненія:

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

представляютъ точку пересѣченія плоскостей:

$$x = a \quad , \quad y = b \quad \text{и} \quad z = c$$

Пр. 1. Уравненіе:

$$\xi = a$$

будетъ представлять точку на оси x на разстояніи $-\frac{1}{a}$ отъ начала координатъ:

Пр. 2. Уравненія:

$$\xi = a \quad , \quad \eta = b$$

совокупно, представляютъ прямую, проходящую черезъ точки:

$$\xi = a \quad \text{и} \quad \eta = b$$

Пр. 3. Уравненія:

$$\xi = a \quad , \quad \eta = b \quad , \quad \zeta = c$$

представляютъ плоскость проходящую черезъ точки:

$$\xi = a \quad , \quad \eta = b \quad , \quad \zeta = c$$

Если:

$$z=0 \quad , \quad x=a \quad , \quad y=b$$

то это будетъ точка на плоскости (OX, OY)

Если:

$$\zeta=0 \quad , \quad \xi=a \quad , \quad \eta=b$$

то соотвѣтственный отрѣзокъ на оси z будетъ равенъ ∞, а совокупно эти уравненія представляютъ плоскость параллельную оси Z.

Если:

$$x=0 \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=0$$

то это начало координатъ.

Если:

$$\xi=0 \quad , \quad \eta=0 \quad , \quad \zeta=0$$

то это будетъ плоскость на безконечности.

Если:

$$x=\infty \quad , \quad y=\infty \quad , \quad z=\infty$$

то это точка на безконечности.

Если:

$$\xi=\infty \quad , \quad \eta=\infty \quad , \quad \zeta=\infty$$

то это плоскость, проходящая черезъ начало координатъ.

§ 464. Мы видѣли, что уравненія двухъ поверхностей:

$$f(x,y,z)=0 \quad , \quad f_1(x,y,z)=0 \tag{20}$$

представляютъ совокупно кривую, образованную пересѣченіемъ двухъ поверхностей.

Два уравненія:

$$f(\xi,\eta,\zeta)=0 \quad , \quad f_1(\xi,\eta,\zeta)=0 \tag{21}$$

представляютъ поверхности, къ которымъ касаются плоскости, координаты которыхъ удовлетворяютъ обѣимъ предъидущимъ уравненіямъ. Эти касательныя плоскости, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, пересѣкаютъ координатныя плоскости по прямымъ, которыя во всѣхъ своихъ положеніяхъ касаются кривыхъ, уравненія которыхъ получатся, исключая одно изъ перемѣнныхъ между уравненіями (21). Исключая ζ, η и ξ, найдемъ уравненія этихъ кривыхъ на координатныхъ плоскостяхъ (OX, OY), (OX, OZ), (OY, OZ). Возьмемъ, напримѣръ, уравненія:

$$f(\xi,\eta,\zeta)=0 \quad \text{и} \quad x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta+1=0 \tag{22}$$

послѣднее есть точка, коей координаты суть x_1, y_1, z_1.

Координаты ξ, η, ζ, удовлетворяющія оба предъидущія уравненія, будутъ опредѣлять положенія плоскостей, которыя, проходя постоянно черезъ точку $(x_1\ y_1\ z_1)$, касаются поверхности $f(\xi,\eta,\zeta)=0$; очевидно, плоскости образуютъ конусъ, описанный около поверхности, вершина котораго находится въ точкѣ $(x_1\ y_1\ z_1)$, а его вѣтви, пересѣкаясь съ координатными плоскостями, образуютъ кривыя, которыя получатся, исключая между уравненіями (22) величины ζ или η, или ξ.

Пр. 1. Пусть будутъ даны двѣ поверхности:

$$r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)=1 \quad , \quad \zeta=a \tag{23}$$

первая изъ нихъ есть шаръ, коего центръ находится въ началѣ координатъ, а вторая точка на оси Z, на разстояніи $-\frac{1}{a}$ отъ начала координатъ. Если исключимъ изъ этихъ уравненій ζ, то найдемъ:

$$r^2(\xi^2+\eta^2+a^2)=1$$

или:

$$\left(\frac{r}{\sqrt{1-a^2r^2}}\right)^2(\xi^2+\eta^2)=1$$

форма этого уравненія показываетъ, что это есть кругъ (§ 65), коего радіусъ равенъ:

$$\frac{r}{\sqrt{1-a^2r^2}}$$

Это тотъ кругъ, который образуетъ конусъ, описанный около шара и имѣющій вершину въ точкѣ $\zeta=a$, пересѣченіемъ съ плоскостью (OX, OY). Если $a=0$, то вершина конуса находится на безконечности; конусъ обращается въ цилиндръ, описанный около шара, который пересѣкается съ плоскостью (OX, OY) по кругу:

$$r^2(\xi^2+\eta^2)=1$$

Пр. 2. Уравненія двухъ точекъ:

$$x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta+1=0 \quad , \quad x_2\xi+y_2\eta+z_2\zeta+1=0 \tag{24}$$

очевидно, въ совокупности, представляютъ прямую, проходящую черезъ эти точки. Эта прямая есть пересѣченіе всѣхъ плоскостей, координаты которыхъ удовлетворяютъ обѣимъ предъидущимъ уравненіямъ.

Очевидно, что уравненія:

$$x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta+1=0 \quad , \quad \zeta=0 \tag{25}$$

представляютъ прямую, проходящую черезъ точку $(x_1y_1z_1)$ параллельно оси Z. Эта прямая встрѣчаетъ, очевидно, плоскость (OX, OY) въ точкѣ:

$$x_1\xi+y_1\eta+1=0$$

Если имѣемъ уравненія трехъ поверхностей:

$$f(\xi,\eta,\zeta)=0 \quad , \quad f_1(\xi,\eta,\zeta)=0 \quad , \quad f_2(\xi,\eta,\zeta)=0 \qquad (26)$$

то совокупно онѣ представляютъ одну или нѣсколько общихъ касательныхъ плоскостей къ этимъ поверхностямъ. Напримѣръ:

$$r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)=0 \ , \ x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta+1=0 \ , \ x_2\xi+y_2\eta+z_2\zeta+1=0 \quad (27)$$

эти три уравненія будутъ представлять двѣ касательныя плоскости къ шару, проходящія черезъ точки $(x_1y_1z_1)$ и $(x_2\,y_2\,z_2)$.

§ 465. Всего сказаннаго выше достаточно для уразумѣнія геометрическаго значенія уравненія:

$$f(\xi,\eta,\zeta)=0$$

или такихъ уравненій въ совокупности. Рѣшимъ еще нѣсколько вопросовъ.

Задача 1. Даны уравненія четырехъ плоскостей, образующихъ тетраэдръ, найти уравненія его вершинъ?

Рѣшеніе. Пусть данныя уравненія будутъ:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1&=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2&=0\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3&=0\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4&=0 \end{aligned} \qquad (28)$$

Найдемъ уравненіе вершины, образуемой пересѣченіемъ послѣднихъ трехъ плоскостей (28). Пусть уравненіе, какой нибудь, плоскости, проходящей черезъ эту вершину будетъ:

$$\xi x+\eta y+\zeta z+1=0$$

Такъ какъ, по условію, эта плоскость проходитъ черезъ пересѣченіе послѣднихъ трехъ плоскостей (28), то слѣдующее условіе должно быть удовлетворено:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0 \qquad (29)$$

или:

$$A_1\xi+B_1\eta+C_1\zeta+D_1=0$$

это и есть искомое уравненіе вершины, гдѣ A_1, B_1,..... суть миноры, соотвѣтствующіе элементамъ a_1, b_1,..... опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = R \tag{30}$$

Легко видѣть теперь, что всѣ четыре вершины будутъ даны уравненіями:

$$\begin{aligned} A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 &= 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 &= 0 \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 &= 0 \\ A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Задача 2. Даны уравненія четырехъ точекъ, образующихъ вершины тетраэдра, найти уравненія его граней?

Рѣшеніе. Пусть уравненія вершинъ будутъ:

$$\begin{aligned} a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1 &= 0 \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_3 &= 0 \\ a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3 &= 0 \\ a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4 &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Разсужденія, подобныя предъидущимъ, даютъ слѣдующія уравненія граней:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

гдѣ A_1, B_1,..... имѣютъ тѣ же значенія, какъ и въ предъидущей задачѣ.

§ 466. *Задача.* Найти объемъ тетраэдра, коего вершины даны координатами?

Рѣшеніе. Пусть ребра тетраэдра будутъ r, r_1, r_2, а углы между эти-

ми ребрами пусть будутъ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$. Двойная площадь треугольника, коего стороны суть r и r_1, а уголъ между ними α_2, какъ извѣстно, есть:

$$2\,\Delta = rr_1 \sin \alpha_2$$

Высота тетраэдра, очевидно, есть;

$$r_2 \sin \alpha_1 \sin A$$

если A есть двугранный уголъ, коего ребро есть r. Слѣдовательно имѣемъ:

$$6\Pi = rr_1 r_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin A \tag{34}$$

гдѣ Π есть объемъ тетраэдра.

Изъ этого выраженія видимъ, что если отъ вершины тетраэдра, гдѣ сходятся ребра r, r_1, r_2, отложить отрѣзки r', r_1', r_2' такъ, чтобы:

$$rr_1 r_2 = r' r_1' r_2'$$

то получимъ новый тетраэдръ, коего объемъ будетъ равенъ объему даннаго, если только наклоненіе реберъ и граней неизмѣняется.

Возьмемъ теперь тетраэдръ, коего одна изъ вершинъ находится въ началѣ координатъ, а три остальныя, имѣя x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' координатами, лежатъ въ плоскости параллельной плоскости $(OX,\ OY)$. Такъ какъ площадь этого треугольника равна площади своей проэкціи на $(OX,\ OY)$, то его площадь будетъ (§ 5):

$$2\,\Delta = (x'y'' - x''y') + (x''y''' - x'''y'') + (x'''y' - x'y''') \tag{35}$$

Если этотъ треугольникъ возьмемъ за основаніе тетраэдра, то его высота z', будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на площадь предъидущаго треугольника.

Если положимъ $z' = z'' = z'''$, то объемъ тетраэдра можно написать въ формѣ:

$$6\Pi = (x'y'' - x''y')\,z''' + (x'''y' - x'y''')\,z'' + (x''y''' - x'''y'')\,z' \tag{36}$$

отложимъ теперь на ребрахъ тетраэдра отъ начала координатъ отрѣзки $r',\ r'_1,\ r'_2$, но такъ, чтобы $rr_1r_2 = r'r'_1r'_2$. Пусть координаты полученныхъ, такимъ образомъ, вершинъ втораго тетраэдра, котораго объемъ будетъ равенъ объему даннаго, будутъ:

$$(x'_1 y'_1 z'_1) \quad ; \quad (x'_2 y'_2 z'_2) \quad ; \quad (x'_3 y'_3 z'_3)$$

но котораго основаніе, очевидно, не будетъ параллельно плоскости (OX, OY). Изъ этого построенія легко видѣть, что:

$$x' = \frac{r}{r'} x'_1 \quad , \quad y' = \frac{r}{r'} y'_1 \quad , \quad z' = \frac{r}{r'} z'_1$$

$$x'' = \frac{r_1}{r'_1} x'_2 \quad , \quad y'' = \frac{r_1}{r'_1} y'_2 \quad , \quad z'' = \frac{r_1}{r'_1} z'_2$$

$$x''' = \frac{r_2}{r'_2} x'_3 \quad , \quad y''' = \frac{r_2}{r'_2} y'_3 \quad , \quad z''' = \frac{r_2}{r'_2} z'_3$$

подставляя эти выраженія въ (36) и замѣчая, что $rr_1r_2 = r'r'_1r'_2$, найдемъ:

$$6\Pi = (x'_2y'_3 - x'_3y'_2)z'_1 + (x'_3y'_1 - x'_1y'_3)z'_2 + (x'_1y'_2 - x'_2y'_1)z'_3$$

или:

$$6\Pi = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix} \tag{37}$$

Это шесть разъ взятый объемъ тетраэдра, коего одна изъ вершинъ находится въ началѣ, а координаты трехъ остальныхъ суть:

$$(x'_1y'_1z'_1) \quad , \quad (x'_2y'_2z'_2) \quad , \quad (x'_3y'_3z'_3)$$

Легко теперь найти объемъ тетраэдра, коего координаты вершинъ суть:

$$(x_1y_1z_1) \quad , \quad (x_2y_2z_2) \quad , \quad (x_3y_3z_3) \quad , \quad (x_4y_4z_4)$$

Для этого надобно только перенести начало координатъ въ вершину $(x_1y_1z_1)$, тогда, очевидно, координаты остальныхъ вершинъ будутъ:

$$x_1 - x_2 \quad , \quad x_1 - x_3 \quad , \quad x_1 - x_4$$

$$y_1 - y_2 \quad , \quad y_1 - y_3 \quad , \quad y_1 - y_4$$

$$z_1 - z_2 \quad , \quad z_1 - z_3 \quad , \quad z_1 - z_4$$

которыя, подставивъ въ (37) вмѣсто x'_1, y'_1, $z'_1, \ldots$, найдемъ:

$$6\Pi = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \ , & y_1 - y_2 \ , & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 \ , & y_1 - y_3 \ , & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 \ , & y_1 - y_4 \ , & z_1 - z_4 \end{vmatrix}$$

а этотъ опредѣлитель легко преобразовать въ слѣдующій:

$$6П = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{38}$$

Если этотъ опредѣлитель сравнимъ съ опредѣлителемъ, найденнымъ въ § 461, то найдемъ, что онъ есть тотъ, который, обращаясь въ нуль, показываетъ, что четыре точки лежатъ въ одной плоскости.

Слѣдовательно уравненіе плоскости, проходящей черезъ три, данныя координатами точки (§ 445), есть ничто иное, какъ условіе, что четвертая вершина тетраэдра лежитъ въ плоскости трехъ данныхъ точекъ.

§ 467. *Задача.* Даны уравненія четырехъ граней тетраэдра, найти его объемъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія его граней будутъ:

$$\begin{gathered} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{gathered}$$

уравненія вершинъ тетраэдра будутъ:

$$\begin{gathered} A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 = 0 \\ A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 = 0 \\ A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 = 0 \end{gathered}$$

откуда, очевидно, координаты его вершинъ будутъ:

$$\left(\frac{A_1}{D_1}, \frac{B_1}{D_1}, \frac{C_1}{D_1}\right); \left(\frac{A_2}{D_2}, \frac{B_2}{D_2}, \frac{C_2}{D_2}\right); \left(\frac{A_3}{D_3}, \frac{B_3}{D_3}, \frac{C_3}{D_3}\right); \left(\frac{A_4}{D_4}, \frac{B_4}{D_4}, \frac{C_4}{D_4}\right)$$

откуда:

$$\begin{vmatrix} \frac{A_1}{D_1}, & \frac{B_1}{D_1}, & \frac{C_1}{D_1}, & 1 \\ \frac{A_2}{D_2}, & \frac{B_2}{D_2}, & \frac{C_2}{D_2}, & 1 \\ \frac{A_3}{D_3}, & \frac{B_3}{D_3}, & \frac{C_3}{D_3}, & 1 \\ \frac{A_4}{D_4}, & \frac{B_4}{D_4}, & \frac{C_4}{D_4}, & 1 \end{vmatrix} = 6П$$

или:

$$6\Pi = \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_1 D_2 D_3 D_4}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}^3$$

§ 468. *Задача.* Найти объемъ тетраэдра, коего вершины даны уравненіями:

$$a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1 = 0$$
$$a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2 = 0$$
$$a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_2 = 0$$
$$a_4\xi + b_3\eta + c_4\zeta + d_4 = 0$$

Изъ этихъ уравненій видимъ, что координаты вершинъ тетраэдра будутъ (§ 460):

$$\left(\frac{a_1}{d_1}, \frac{b_1}{d_1}, \frac{c_1}{d_1}\right) \quad ; \quad \left(\frac{a_2}{d_2}, \frac{b_2}{d_2}, \frac{c_2}{d_2}\right) \quad ; \quad \left(\frac{a_3}{d_3}, \frac{b_3}{d_3}, \frac{c_3}{d_3}\right) \quad ; \quad \left(\frac{a_4}{d_4}, \frac{b_4}{d_4}, \frac{c_4}{d_4}\right)$$

слѣдовательно:

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{d_1} & \frac{b_1}{d_1} & \frac{c_1}{d_1} & 1 \\ \frac{a_2}{d_2} & \frac{b_2}{d_2} & \frac{c_2}{d_2} & 1 \\ \frac{a_3}{d_3} & \frac{b_3}{d_3} & \frac{c_3}{d_3} & 1 \\ \frac{a_4}{d_4} & \frac{b_4}{d_4} & \frac{c_4}{d_4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{d_1 d_2 d_3 d_4}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

ГЛАВА XXIX.

Сокращенный способъ.

§ 469. Въ § 448 мы видѣли, что если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \tag{1}$$

суть уравненія двухъ плоскостей, то:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \tag{2}$$

будетъ уравненіе плоскости, проходящей черезъ пересѣченіе плоскостей (1). Измѣняя λ получимъ безчисленное множество—систему плоскостей, которыя пересѣкаются по одной прямой линіи.

Если уравненія (1) даны въ канонической формѣ:

$$A_1 = \xi_1 a + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0 \quad , \quad A_2 = \xi_2 x + \eta_3 y + \zeta_2 z + 1 = 0$$

то уравненіе (2) будетъ:

$$\frac{\xi_1 + \lambda\xi_2}{1+\lambda} x + \frac{\eta_1 + \lambda\eta_2}{1+\lambda} y + \frac{\zeta_1 + \lambda\zeta_2}{1+\lambda} z + 1 = 0 \tag{3}$$

Слѣдовательно положеніе этой плоскости опредѣляется координатами (§ 460):

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda\xi_2}{1+\lambda} \quad , \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda\eta_2}{1+\lambda} \quad , \quad \zeta = \frac{\zeta_1 + \lambda\zeta_2}{1+\lambda} \tag{4}$$

Если будутъ даны три плоскости:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \tag{5}$$

то уравненіе (§ 447):

$$A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \tag{6}$$

будетъ плоскость, проходящая черезъ точку пересѣченія плоскостей (5). Если:

$$A_1 = \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0$$
$$A_2 = \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z + 1 = 0$$
$$A_3 = \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z + 1 = 0$$

то уравненіе плоскости (6) будетъ:

$$\frac{\xi_1 + \lambda\xi_2 + \mu\xi_3}{1+\lambda+\mu} x + \frac{\eta_1 + \lambda\eta_2 + \mu\eta_3}{1+\lambda+\mu} y + \frac{\zeta_1 + \lambda\zeta_2 + \mu\zeta_3}{1+\lambda+\mu} z + 1 = 0 \tag{7}$$

Слѣдовательно координаты, опредѣляющія ея положеніе, будутъ:

$$\xi = \frac{\xi_1 + \lambda\xi_2 + \mu\xi_3}{1+\lambda+\mu} \quad , \quad \eta = \frac{\eta_1 + \lambda\eta_2 + \mu\eta_3}{1+\lambda+\mu} \quad , \quad \zeta = \frac{\zeta_1 + \lambda\zeta_2 + \mu\zeta_3}{1+\lambda+\mu} \tag{8}$$

§ 470. Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

будутъ уравненія точекъ, то:

$$A_1 + \lambda A_2 = 0 \tag{9}$$

будетъ уравненіе точки, находящейся на прямой соединяющей двѣ данныя точки. Если онѣ даны въ канонической формѣ, т. е.:

$$A_1 = x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0 \quad , \quad A_2 = x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + 1 = 0$$

то уравненіе (9) будетъ:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\xi + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\eta + \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\zeta + 1 = 0 \tag{10}$$

Слѣдовательно координаты, опредѣляющія положеніе точки (9), будутъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \quad , \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \tag{11}$$

какъ мы уже выше видѣли (§ 437).

Слѣдовательно форма координатъ (4) перемѣнной плоскости (3), проходящей черезъ одну прямую и координатъ, скользящей по прямой точки, есть одна и таже.

Если:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \tag{12}$$

суть уравненія трехъ точекъ, то уравненіе:

$$A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3 = 0 \tag{13}$$

будетъ точка, лежащая на плоскости, положеніе, которой опредѣляется уравненіями (12).

Если:

$$A_1 = x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0$$
$$A_2 = x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta + 1 = 0$$
$$A_3 = x_3\xi + y_3\eta + z_3\zeta + 1 = 0$$

то уравненіе (13) будетъ:

$$\frac{x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3}{1+\lambda+\mu}\xi + \frac{y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3}{1+\lambda+\mu}\eta + \frac{z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3}{1+\lambda+\mu}\zeta + 1 = 0 \tag{14}$$

Слѣдовательно координаты этой точки будутъ:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3}{1+\lambda+\mu} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3}{1+\lambda+\mu} \quad , \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3}{1+\lambda+\mu} \tag{15}$$

Откуда видимъ, что форма координатъ плоскости (§ 469), проходящей черезъ точку пересѣченія трехъ плоскостей и координатъ точки, лежащей на плоскости, положеніе которой опредѣляется тремя точками, одна и таже.

Элементы:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_3=0 \tag{16}$$

постоянны; элементы:

$$A_1+\lambda A_2=0 \quad , \quad A_1+\lambda A_2+\mu A_3=0 \tag{17}$$

перемѣнны, слѣдовательно первые служатъ координатами для послѣднихъ, которые измѣняютъ свое положеніе относительно элементовъ (16) съ измѣненіемъ параметровъ λ и μ.

§ 471. Изслѣдуемъ теперь нѣкоторыя свойства системы плоскостей и системы точекъ.

Если уравненія двухъ плоскостей:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \tag{18}$$

даны въ нормальной формѣ, т. е. если:

$$\begin{aligned} A_1 &= x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0 \\ A_2 &= x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p=0 \end{aligned} \tag{19}$$

то легко видѣть, что:

$$A_1-A_2=0 \quad , \quad A_1+A_2=0 \tag{20}$$

будутъ уравненія плоскостей, дѣлящихъ пополамъ смежные двугранные углы между плоскостями (18).

§ 472. Пусть:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_3=0 \tag{21}$$

будутъ уравненія трехъ плоскостей въ нормальной формѣ, эти плоскости дѣлятъ пространство на восемь частей, изъ коихъ каждая есть трегранный уголъ, въ одномъ изъ которыхъ лежитъ начало координатъ. Уравненія плоскостей, дѣлящихъ двугранные углы того треграннаго угла, въ которомъ лежитъ начало координатъ, очевидно, будутъ:

$$A_1-A_2=0 \quad , \quad A_2-A_3=0 \quad , \quad A_3-A_1=0 \tag{22}$$

Такъ какъ сумма этихъ трехъ уравненій тождественно равна нулю, то плоскости (22) пересѣкаются по одной прямой. Это предложеніе можно выразить въ слѣдующей формѣ. Опишемъ изъ вершины трегранного угла, какъ изъ центра произвольнымъ радіусомъ, шаръ; пересѣченія поверхности этого шара съ гранями трегранного угла образуютъ сферическій треугольникъ, а пересѣченія съ плоскостями образуютъ дуги большихъ круговъ, равнодѣлящія углы сферическаго треугольника; слѣдовательно предложеніе можетъ быть выражено въ такой формѣ.

Предложеніе 1. Большіе круги, дѣлящіе внутренніе углы сферическаго треугольника пополамъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Уравненія плоскостей, дѣлящихъ пополамъ внѣшніе углы разсматриваемаго трегранпаго угла, очевидно, суть:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad , \quad A_2 + A_3 = 0 \quad , \quad A_3 + A_1 = 0 \tag{23}$$

Если изъ двухъ первыхъ уравненій (23) и послѣдняго (22) составимъ тождество:

$$A_1 + A_2 - (A_2 + A_3) + (A_2 - A_1) = 0 \tag{24}$$

то будемъ имѣть, перенося на поверхность шара, слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 2. Дуги большихъ круговъ, дѣлящія пополамъ два внѣшнихъ угла и одинъ внутренній сферическаго треугольника, пересѣкаются въ одной точкѣ. Это предложеніе относительно сферическаго треугольника не отличается отъ предъидущаго, такъ какъ равнодѣлящіе круги, два внѣшніе угла и одинъ внутренній, суть равнодѣлящіе внутренніе углы сферическаго треугольника, полученнаго отъ продолженія двухъ его сторонъ.

Но это предложеніе отлично отъ предъидущаго относительно плоскаго треугольника (§ 81).

§ 473. Разсмотримъ еще слѣдующія четыре уравненія:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ -A_1 + A_2 + A_3 &= 0 \\ A_1 - A_2 + A_3 &= 0 \\ A_1 + A_2 - A_3 &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

эти уравненія, очевидно, (§ 447) представляютъ плоскости, пересѣкающіяся въ одной точкѣ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0$$

Первое изъ уравненій (25) есть плоскость, проходящая черезъ пересѣченіе плоскостей $A_1 = 0$ и $A_2 + A_3 = 0$ (§ 449), а также черезъ пересѣченіе плоскостей $A_2 = 0$, $A_1 + A_3 = 0$ и плоскостей $A_3 = 0$, $A_1 + A_2 = 0$. Слѣдовательно три прямыя пересѣченія этихъ плоскостей всѣ находятся въ одной плоскости. Точно также пересѣченія плоскостей:

$$A_1 = 0 \ , \ A_2 + A_3 = 0 \ ; \ A_3 = 0 \ , \ A_2 - A_1 = 0 \ ; \ A_2 = 0 \ , \ A_3 - A_1 = 0$$

находятся въ одной плоскости:

$$-A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

подобныя свойства имѣютъ мѣсто и для двухъ послѣднихъ плоскостей (25). Первое изъ предъидущихъ свойствъ можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ.

Предложеніе 1. Пересѣченія плоскостей, равнодѣлящихъ внѣшніе углы треграннаго угла, съ противулежащими гранями лежатъ въ одной плоскости. Это предложеніе, перенесенное на сферическій треугольникъ, можно выразить слѣдующимъ образомъ: точки пересѣченія большихъ круговъ, равнодѣлящихъ внѣшніе углы сферическаго треугольника, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ съ противулежащими сторонами.

Второе изъ предъидущихъ свойствъ, перенесенное на шаръ, можно выразить слѣдующимъ образомъ:

Предложеніе 2. Точки пересѣченія большихъ круговъ, равнодѣлящихъ два внутренніе угла и одинъ внѣшній сферическаго треугольника, съ противулежащими сторонами, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

§ 474. Возьмемъ еще уравненія четырехъ плоскостей, непересѣкающихся въ одной точкѣ, пусть эти уравненія будутъ:

$$A_1=0\quad,\quad A_2=0\quad,\quad A_3=0\quad,\quad A_4=0 \tag{26}$$

Эти плоскости образуютъ тетраэдръ—трегранную пирамиду. Въ томъ предположеніи, что начало координатъ находится внутри тетраэдра, уравненія плоскостей, равнодѣлящихъ внутренніе двугранные углы тетраэдра, будутъ:

$$\begin{aligned}&A_1-A_2=0\quad,\quad A_2-A_3=0\quad,\quad A_3-A_4=0\\&A_1-A_3=0\quad,\quad A_2-A_4=0\\&A_1-A_4=0\quad,\end{aligned} \tag{27}$$

Такъ какъ изъ трехъ первыхъ, въ горизонтальной линіи, уравненій вытекаютъ три послѣднія (§ 447), то имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 1. Всѣ шесть плоскостей, равнодѣлящія внутренніе углы тетраэдра, пересѣкаются въ одной точкѣ. Точка эта, очевидно, есть центръ описаннаго около тетраэдра шара.

Уравненіе плоскостей равнодѣлящихъ всѣ внѣшніе двугранные углы тетраэдра суть:

$$\begin{aligned}&A_1+A_2=0\quad,\quad A_2+A_3=0\quad,\quad A_3+A_4=0\\&A_1+A_3=0\quad,\quad A_2+A_4=0\quad,\\&A_1+A_4=0\end{aligned} \tag{26}$$

Если возьмемъ уравненія:

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 = 0 \quad &, \quad A_1 + A_4 = 0 \\ A_2 - A_3 = 0 \quad &, \quad A_2 + A_4 = 0 \\ A_3 - A_1 = 0 \quad &, \quad A_3 + A_4 = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

то легко видѣть, что эти плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ, откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе 2. Плоскости равнодѣлящія три двугранные угла, одного изъ трегранныхъ угловъ тетраэдра, и три плоскости, равнодѣлящія внѣшніе двугранные углы, противулежащіе первымъ тремъ, пересѣкаются въ одной точкѣ. Эта точка есть центръ вписаннаго внѣшне въ тетраэдръ шара.

§ 475. Если уравненія:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \tag{30}$$

представляютъ точки и написаны въ нормальной формѣ, то уравненія:

$$A_1 - A_2 = 0 \quad , \quad A_1 + A_2 = 0 \tag{31}$$

будутъ представлять, первое точку на безконечности на прямой соединяющей точки (30), а второе точку, дѣлящую разстояніе между тѣми-же точками пополамъ.

Предложенія, выраженныя уравненіями (22), (24), (25) относительно плоскостей не дадутъ новыхъ предложеній относительно точекъ, а дадутъ предложенія относительно плоскаго треугольника, такъ какъ три точки всегда лежатъ въ одной плоскости. Относительно четырехъ точекъ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \tag{32}$$

будемъ имѣть слѣдующія предложенія соотвѣтствующія предложеніямъ (27) и (29).

Уравненія точекъ, дѣлящихъ ребра тетраэдра пополамъ, суть:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 = 0 \quad &, \quad A_3 + A_4 = 0 \\ A_1 + A_3 = 0 \quad &, \quad A_4 + A_2 = 0 \\ A_1 + A_4 = 0 \quad &, \quad A_2 + A_3 = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Каждая пара, въ горизонтальной линіи, уравненій сложенная даетъ уравненіе:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \tag{34}$$

изъ котораго вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Если средины трехъ противулежащихъ ребръ тетраэдра, соединимъ прямыми линіями, то эти три прямыя линіи пересѣкутся въ одной точкѣ.

Если уравненіе (34) будемъ разсматривать, какъ сложенное изъ уравненій:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

или:

$$A_2 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_3 + A_4 = 0$$

или:

$$A_3 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 + A_4 = 0$$

или наконецъ:

$$A_4 = 0 \quad \text{и} \quad A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

то будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

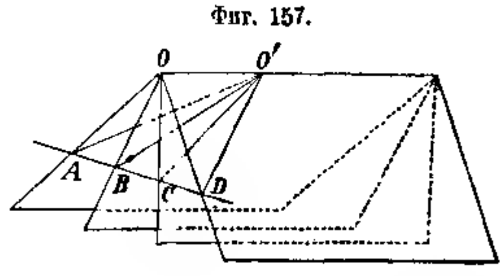
Предложеніе 2. Если центры тяжести граней тетраэдра соединимъ прямыми линіями съ вершинами тетраэдра, то эти четыре прямыя линіи пересѣкутся въ одной точкѣ.

ГЛАВА XXX.

Ангармонія, гармонія и инволюція плоскостей.

§ 476. *Ангармонія* Если четыре плоскости пересѣкаются на одной прямой, то *ангармоническимъ отношеніемъ* называютъ *ангармоническое отношеніе* связки прямыхъ линій, полученной пересѣченіемъ данныхъ четырехъ плоскостей плоскостью перпендикулярною къ общему ихъ ребру пересѣченія.

Фиг. 157.



§ 477. Пусть OO' будетъ общее пересѣченіе четырехъ плоскостей, пусть OA, OB, OC, OD (фиг. 157) будетъ связка, полученная пересѣченіемъ четырехъ плоскостей плоскостью перпендикулярною къ ребру OO'.

Ангармоническое отношеніе этой связки будетъ (§ 144):

$$\frac{\sin AOC}{\sin AOD} : \frac{\sin BOC}{\sin BOD} \tag{1}$$

Пересѣчемъ данныя плоскости, какою-нибудь, плоскостью, которая образуетъ связку $O'A$, $O'B$, $O'C$, $O'D$. Пересѣченіе первой сѣкущей плоскости со

второю даетъ прямую $ABCD$, которая пересѣкаетъ обѣ связки, слѣдовательно будемъ имѣть (§ 144):

$$\frac{\sin AOC}{\sin AOD} : \frac{\sin BOC}{\sin BOD} = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{\sin AO'C}{\sin AO'D} : \frac{\sin BO'C}{\sin BO'D} \tag{2}$$

Откуда заключаемъ, что ангармоническое отношеніе всѣхъ связокъ, полученныхъ пересѣченіемъ четырехъ данныхъ плоскостей пятою произвольною, неизмѣняется; неизмѣняется, очевидно, и ангармоническое отношеніе отрѣзковъ пересѣченія четырехъ плоскостей съ прямою, проведенною въ произвольномъ направленіи.

§ 478. Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \tag{3}$$

будутъ уравненія двухъ плоскостей въ нормальной формѣ.

Уравненіе плоскости, проходящей черезъ пересѣченіе этихъ двухъ будетъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \tag{4}$$

Если на этой плоскости возьмемъ, какую-нибудь, опредѣленную точку, коей разстоянія отъ плоскостей (3) будутъ a_1 и a_2, то будемъ имѣть:

$$a_1 - \lambda a_2 = 0$$

откуда:

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2}$$

Слѣдовательно уравненіе (4) сдѣлается:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \tag{5}$$

Означимъ плоскость (4) номеромъ 3, а символами (1,3), (2,3) означимъ углы между плоскостями (3) и плоскостью (4), то будемъ имѣть:

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin(1,3)}{\sin(2,3)}$$

Возьмемъ четвертую плоскость также, проходящую черезъ пересѣченіе плоскостей (3); пусть эта плоскость будетъ:

$$A_1 - \mu A_2 = 0 \tag{6}$$

Ангармоническое отношеніе четырехъ плоскостей:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad A_1 - \mu A_2 = 0 \tag{7}$$

очевидно, будетъ (§ 144):

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\sin(1,3)}{\sin(1,4)}:\frac{\sin(2,3)}{\sin(2,4)} \tag{8}$$

§ 479. Если уравненія четырехъ плоскостей будутъ даны не въ нормальной формѣ:

$$U_1=0 \quad , \quad U_2=0 \quad , \quad U_1-lU_2=0 \quad , \quad U_1-mU_2=0 \tag{9}$$

то ихъ ангармоническое отношеніе будетъ также равно отношенію $l:m$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$U_1=\rho_1 A_1 \quad , \quad U_2=\rho_2 A_2 \tag{10}$$

гдѣ A_1 и A_2 имѣютъ нормальную форму, а ρ_1 и ρ_2 суть тѣ множители, которые обращаютъ U_1 и U_2 въ нормальную форму. Уравненія (9) сдѣлаются:

$$A_1=0 \quad , \quad A_2=0 \quad , \quad A_1-l\frac{\rho_1}{\rho_2}A_2 \quad , \quad A_1-m\frac{\rho_1}{\rho_2}A_2=0 \tag{11}$$

откуда, такъ какъ эти уравненія даны въ нормальной формѣ, то ихъ ангармоническое отношеніе будетъ:

$$l\frac{\rho_1}{\rho_2}:m\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{l}{m} \tag{12}$$

§ 480. Въ предъидущемъ параграфѣ мы выражали уравненія двухъ изъ четырехъ данныхъ плоскостей съ помощью другихъ двухъ, т. е. какъ бы плоскости $A_1=0$ и $A_2=0$ служили координатами. Возьмемъ теперь уравненія четырехъ плоскостей, пересѣкающихся по одной прямой линіи, выраженныя съ помощью одной пары $U_1=0$ и $U_2=0$. Пусть эти уравненія будутъ:

$$U_1-\lambda_1 U_2=0 \ , \ U_1-\lambda_2 U_2=0 \ , \ U_1-\lambda_3 U_2=0 \ , \ U_1-\lambda_4 U_2=0 \tag{13}$$

Поступая съ этими четырьмя плоскостями какъ поступили въ § 145, найдемъ, что ихъ ангармоническое отношеніе будетъ:

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_4}:\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_4} \tag{14}$$

§ 481. *Гармонія.* Если ангармоническое отношеніе равно —1, то оно называется *гармоническимъ* и если четыре плоскости будутъ гармоническія, то имѣемъ:

$$\frac{\sin(1,3)}{\sin(1,4)}:\frac{\sin(2,3)}{\sin(2,4)}=-1 \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_4}:\frac{\lambda_2-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_4}=-1 \tag{15}$$

откуда:

$$\frac{\sin(1,3)}{\sin(1,4)} + \frac{\sin(2,3)}{\sin(2,4)} = 0$$

и

$$\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_3+\lambda_4) + \lambda_2\lambda_4 = 0 \qquad (16)$$

§ 482. *Задача.* Даны уравненія двухъ паръ плоскостей, проходящихъ по одной прямой линіи; найти уравненія третьей пары, которая была бы гармоническая обѣимъ даннымъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ плоскостей будутъ:

$$\begin{aligned} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \quad &, \quad U_1 - \lambda_3 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \quad &, \quad U_1 - \lambda_4 U_2 = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

пусть уравненія искомой пары будутъ:

$$U_1 - \lambda U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \mu U_2 = 0$$

Такъ какъ эта пара должна быть гармонична обѣимъ, то имѣемъ (§ 16).

$$\begin{aligned} \lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda+\mu) + \lambda_1\lambda_2 = 0 \\ \lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_3+\lambda_4)(\lambda+\mu) + \lambda_3\lambda_4 = 0 \end{aligned} \qquad (18)$$

откуда легко опредѣлить $\lambda+\mu$ и $\lambda\mu$, а потому легко построить квадратное уравненіе, коего корнями будутъ λ и μ. Пусть $\lambda+\mu=a$, $\lambda\mu=b$, то уравненіе, опредѣляющее λ и μ, будетъ:

$$t^2 - at + b = 0 \qquad (19)$$

Искомая пара будетъ дѣйствительная или мнимая, смотря потому какіе корни будутъ въ уравненіи (19).

§ 483. *Инволюція.* Три пары плоскостей, проходящихъ черезъ одну прямую, составляютъ инволюцію, если можетъ быть найдена четвертая пара гармоническая къ каждой изъ данныхъ трехъ паръ.

Двѣ пары плоскостей, проходящихъ по одной прямой линіи, опредѣляютъ, какъ выше видѣли (§ 482), третюю пару, которая гармонична каждой изъ двухъ паръ. Третяя пара, гармоничная парѣ, опредѣленной двумя данными парами, будетъ составлять съ ними инволюцію. Но такъ какъ, составляя третюю пару можно первую плоскость взять произвольно, а вторая, затѣмъ, опредѣлится изъ условія гармоничности, то видимъ, что изъ трехъ паръ плоскостей въ инволюціи, проходящихъ по одной прямой, пять можно взять произвольно, а шестая опредѣлится пятью взятыми.

Слѣдовательно между тремя парами плоскостей, составляющихъ инволюцію, должно существовать условное уравненіе.

Пусть уравненія трехъ паръ плоскостей будутъ:

$$\begin{aligned} &U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \lambda_3 U_2 = 0 \\ &U_1 - \mu_1 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \mu_2 U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Если онѣ составляютъ инволюцію, то существуетъ четвертая пара, гармоничная ко всѣмъ тремъ парамъ; пусть эта пара будетъ:

$$U_1 - \lambda U_2 = 0 \quad , \quad U_1 - \mu U_2 = 0 \tag{21}$$

такъ какъ она гармонична къ каждой парѣ (20), то имѣемъ:

$$\begin{aligned} &\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda + \mu) + \lambda_1\mu_2 = 0 \\ &\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda + \mu) + \lambda_2\mu_2 = 0 \\ &\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda_3 + \mu_3)(\lambda + \mu) + \lambda_3\mu_3 = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

откуда имѣемъ искомое условіе:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_1 + \mu_1 & 1 \\ \lambda_2\mu_2 & \lambda_2 + \mu_2 & 1 \\ \lambda_3\mu_3 & \lambda_3 + \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{23}$$

или:

$$(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_3)(\lambda_3 - \mu_1) + (\mu_1 - \lambda_2)(\mu_3 - \lambda_3)(\mu_3 - \lambda_1) = 0 \tag{24}$$

Если положимъ:

$$\lambda_1 = \mu_1 = \lambda \quad , \quad \lambda_3 = \mu_3 = \mu$$

то предъидущее условіе переходитъ въ условіе гармоничности четырехъ плоскостей, откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе.

Предложеніе. Если изъ трехъ паръ плоскостей, составляющихъ инволюцію, двѣ пары, каждая, обращается въ одну пару, то третяя инволюціонная пара будетъ гармоническая къ двумъ полученнымъ парамъ.

§ 484. Если въ уравненіяхъ (20) положимъ $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \infty$, то эти уравненія сдѣлаются:

$$\begin{aligned} &1)\ U_1 = 0 \quad , \quad 3)\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \quad , \quad 5)\ U_1 - \lambda_3 U_2 = 0 \\ &2)\ U_2 = 0 \quad , \quad 4)\ U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \quad , \quad 6)\ U_1 - \mu_3 U_2 = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

а условіе (24) ихъ инволюціи сдѣлается:

$$\lambda_2\mu_3 = \lambda_3\mu_3 \tag{26}$$

или, припоминая значеніе коэфиціентовъ λ_2, μ_2 и λ_3, μ_3 (§ 478), найдемъ:

$$\frac{\sin(3,1)}{\sin(3,2)} \cdot \frac{\sin(4,1)}{\sin(4,2)} = \frac{\sin(5,1)}{\sin(5,2)} \cdot \frac{\sin(6,1)}{\sin(6,2)} \tag{27}$$

§ 485. Условію инволюціи трехъ паръ плоскостей можно дать еще слѣдующую форму.

Уравненія трехъ паръ плоскостей, составляющихъ инволюцію, можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\begin{matrix} V_1 - \lambda_1 V_2 = 0 & , & V_1 - \lambda_2 V_2 = 0 & , & V_1 - \lambda_3 V_2 = 0 \\ V_1 + \lambda_1 V_2 = 0 & , & V_1 + \lambda_2 V_2 = 0 & , & V_1 + \lambda_3 V_2 = 0 \end{matrix} \tag{28}$$

которыя, какъ видно изъ формы ихъ, суть гармоничны съ парой плоскостей:

$$V_1 = 0 \quad , \quad V_2 = 0$$

Если вмѣсто символовъ V_1 и V_2, съ помощью которыхъ выражены уравненія (28), выберемъ три символа U_1, U_2, U_3, связанныя съ V_1 и V_2 уравненіями:

$$V_1 - \lambda_1 V_2 = \frac{U_1}{\lambda_2 - \lambda_3} \;,\; V_1 - \lambda_2 V_2 = \frac{U_2}{\lambda_3 - \lambda_1} \;,\; V_1 - \lambda_2 V_2 = \frac{U_3}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{29}$$

то эти уравненія даютъ тождество:

$$U_1 + U_2 + U_3 \equiv 0 \tag{30}$$

а уравненія (28) сдѣлаются:

$$U_1 = 0 \;,\; U_2 = 0 \;,\; U_3 = 0 \;,\; \frac{U_2}{\mu_2} - \frac{U_3}{\mu_3} = 0 \,,\; \frac{U_3}{\mu_2} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0 \,,\; \frac{U_1}{\mu_1} - \frac{U_2}{\mu_2} = 0 \tag{31}$$

гдѣ:

$$\mu_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \quad , \quad \mu_3 = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \quad , \quad \mu_3 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{32}$$

Такъ какъ коэфиціенты λ въ уравненіяхъ (28) суть величины произвольныя, то коэфиціенты μ, составленные изъ нихъ, будутъ также величины произвольныя. Послѣднія три изъ уравненій (31), съ произвольными коэфиціентами μ, въ предположеніи тождества (30), которое показываетъ, что плоскости:

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad U_3 = 0$$

пересѣкаются по одной прямой, также проходятъ черезъ туже прямую; слѣдовательно, шесть плоскостей (31) составляютъ инволюцію. Если уравненіямъ:

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad U_3 = 0$$

дадимъ нормальную форму, положивъ:

$$\rho_1 U_1 = A_1 \quad , \quad \rho_2 U_2 = A_2 \quad , \quad \rho_3 U_3 = A_3$$

то тождество (30) сдѣлается:

$$\frac{A_1}{\rho_1} + \frac{A_2}{\rho_2} + \frac{A_3}{\rho_3} = 0 \tag{33}$$

а уравненія (31) плоскостей, составляющихъ инволюцію, будутъ:

$$\begin{array}{lll} 1)\ A_1 = 0 & ,\ 2)\ A_2 = 0 & ,\ 3)\ A_3 = 0 \\ 4)\ \dfrac{A_2}{\rho_2\mu_2} - \dfrac{A_3}{\rho_3\mu_3} = 0 & ,\ 5)\ \dfrac{A_2}{\rho_3\mu_3} - \dfrac{A_1}{\rho_1\mu_1} = 0 & ,\ 6)\ \dfrac{A_1}{\rho_1\mu_1} - \dfrac{A_2}{\rho_2\mu_2} = 0 \end{array} \tag{34}$$

откуда, припоминая значенія коэфиціентовъ ρ, μ, найдемъ:

$$\frac{\rho_2\mu_2}{\rho_3\mu_3} = \frac{\sin(4,2)}{\sin(4,3)} \quad , \quad \frac{\rho_3\mu_3}{\rho_1\mu_1} = \frac{\sin(5,3)}{\sin(5,1)} \quad , \quad \frac{\rho_1\mu_1}{\rho_2\mu_2} = \frac{\sin(6,1)}{\sin(6,2)} \tag{35}$$

перемножая, получимъ:

$$\frac{\sin(4,2) \,.\, \sin(5,3) \,.\, \sin(6,1)}{\sin(4,3) \,.\, \sin(5,1) \,.\, \sin(6,2)} = 1 \tag{36}$$

Это послѣднее уравненіе есть одна изъ различныхъ формъ условія инволюціи трехъ паръ плоскостей, пересѣкающихся по одной прямой линіи.

§ 486. Возьмемъ уравненія трехъ плоскостей въ нормальной формѣ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \tag{37}$$

которыя пересѣкаются въ точкѣ P или, что тоже, которыя попарно связываютъ три прямыя линіи, исходящія изъ точки P.

Уравненія:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{38}$$

будутъ, очевидно, три плоскости, проходящія, каждая, черезъ пересѣченіе

двухъ изъ (37) и пересѣкающихся по одной прямой, проходящей черезъ точку P. Слѣдовательно шесть уравненій (37) и (38) представляютъ три пары плоскостей, соединяющихъ попарно четыре произвольныя прямыя, исходящія изъ точки P.

Три пары уравненій (37) и (38) совершенно сходны съ тремя парами уравненій (34), разница только въ томъ, что между уравненіями (38) не имѣетъ мѣста тождество (33), откуда заключаемъ, что три пары плоскостей, составляющихъ инволюцію, есть только частный случай трехъ паръ плоскостей, связывающихъ, попарно, четыре прямыя линіи, исходящія изъ одной точки. Въ самомъ дѣлѣ, если четыре прямыя, исходящія изъ одной точки, совпадаютъ, то и условіе (30) будетъ удовлетворено, т. е. всѣ условія инволюціи будутъ удовлетворены.

Если точка P будетъ отодвинута на бѣзконечность, то четыре прямыя, исходящія изъ этой точки, сдѣлаются параллельными, но между синусами угловъ наклоненія трехъ паръ плоскостей будетъ имѣть мѣсто уравненіе (36) и какъ это уравненіе выражаетъ условіе инволюціи плоскостей, то мы построимъ три пары плоскостей, составляющихъ инволюцію, если черезъ данную прамую проведемъ шесть плоскостей, параллельныхъ шести плоскостямъ, которыя связываютъ попарно четыре прямыя линіи параллельныя данной прямой.

Это даетъ возможность построить шестую плоскость, составляющую инволюцію съ пятью данными, проходящими по одной прямой.

§ 487. Если черезъ пересѣченіе каждой пары плоскостей, данныхъ уравненіями:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \tag{39}$$

проведемъ три произвольныя плоскости, пересѣкающіяся по одной прямой линіи внутри треграннаго угла (39), то ихъ уравненія будутъ, полагая начало координатъ внутри угла (39):

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} - \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{40}$$

Если теперь въ каждомъ двугранномъ углѣ треграннаго угла (39) построимъ плоскость—четвертую гармоническую къ тремъ проходящимъ черезъ его ребра, то уравненія этихъ плоскостей будутъ:

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_3}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_2} + \frac{A_3}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{a_3} + \frac{A_1}{a_1} = 0 \tag{41}$$

вычитая первыя два уравненія (41) и складывая съ послѣднимъ (40), найдемъ:

$$\left(\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}\right)-\left(\frac{A_2}{a_2}+\frac{A_3}{a_3}\right)+\left(\frac{A_3}{a_3}-\frac{A_1}{a_1}\right)=0 \qquad (42)$$

что показываетъ, что эти три плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ. Перенося это свойство на поверхность шара, коего центръ находится въ вершинѣ трегранного угла (33) будемъ имѣть слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Если черезъ произвольную точку, взятую на поверхности шара, и черезъ вершины сферическаго треугольника проведемъ большіе круги и въ каждомъ углѣ проведемъ четвертый гармоническій большой кругъ, то два изъ этихъ круговъ пересѣкаются въ точкѣ, черезъ которую проходитъ большой кругъ, проходящій черезъ третій уголъ треугольника и черезъ взятую на шарѣ точку.

Разсуждая надъ уравненіями:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}+\frac{A_3}{a_3}&=0\\
-\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}+\frac{A_3}{a_3}&=0\\
\frac{A_1}{a_1}-\frac{A_2}{a_2}+\frac{A_3}{a_3}&=0\\
\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}-\frac{A_3}{a_3}&=0
\end{aligned} \qquad (43)$$

какъ выше (§ 473), найдемъ:

Предложеніе 2. Если, какую-нибудь, точку шара соединимъ съ вершинами сферическаго треугольника дугами большихъ круговъ, и въ каждомъ углѣ проведемъ четвертый гармоническій большой кругъ, то эти послѣдніе круги пересѣкутъ противулежащія стороны сферическаго треугольника въ точкахъ, лежащихъ на одномъ большомъ кругѣ.

Предложеніе 3. Если, какую-нибудь, точку поверхности шара соединимъ дугами большихъ круговъ съ вершинами сферическаго треугольника и въ одномъ изъ угловъ проведемъ большой кругъ четвертый гармоническій, то онъ пересѣчетъ противулежащую сторону въ точкѣ, которая съ точками пересѣченія двухъ остальныхъ большихъ круговъ, проведенныхъ черезъ взятую точку, съ противулежащими сторонани, лежитъ на одномъ большомъ кругѣ.

Послѣднее предложеніе важно въ томъ отношеніи, что съ помощью его можно построить линейно, т. е. только съ помощью проведенія большихъ

круговъ, четвертый гармоническій большой кругъ къ тремъ даннымъ, проходящимъ черезъ одну точку.

§ 488. Остается показать, какъ построить линейно къ даннымъ пяти плоскостямъ, пересѣкающимся по одной прямой, шестую, которая бы составляла инволюцію съ пятью данными плоскостями.

Пусть:

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad , \quad U_3 = 0 \quad , \quad U_4 = 0 \tag{44}$$

будутъ уравненія четырехъ плоскостей, проходящихъ черезъ центръ P шара, коего радіусъ равенъ единицѣ. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, будутъ величины, которыя получатъ выраженія U_1, U_2,...., когда въ нихъ вмѣсто перемѣнныхъ координатъ вставимъ координаты, какой-нибудь, данной точки p, которую для простоты возьмемъ на поверхности шара, то:

$$\begin{aligned}\frac{U_1}{a_1} - \frac{U_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{U_2}{a_2} - \frac{U_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{U_3}{a_3} - \frac{U_4}{a_4} = 0 \\ \frac{U_2}{a_2} - \frac{U_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{U_3}{a_3} - \frac{U_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{U_1}{a_1} - \frac{U_4}{a_4} = 0\end{aligned} \tag{45}$$

будутъ уравненія трехъ паръ плоскостей, которыя пересѣкаются на прямой Pp и проходятъ черезъ шесть прямыхъ линій, по которымъ пересѣкаются четыре плоскости (44). Чтобы предъидущія уравненія преобразовать въ нормальную форму, съ помощью множителей ρ, μ,..., положимъ:

$$\frac{U_1}{a_1} - \frac{U_4}{a_4} = \frac{A_1}{\rho_1\mu_1} \quad ; \quad \frac{U_2}{a_2} - \frac{U_4}{a_4} = \frac{A_2}{\rho_2\mu_2} \quad ; \quad \frac{U_3}{a_3} - \frac{U_4}{a_4} = \frac{A_3}{\rho_3\mu_3} \tag{46}$$

этими подстановленіями уравненія (45) сдѣлаются:

$$\begin{aligned}A_1 = 0 \quad , \qquad A_2 = 0 \quad , \qquad A_3 = 0 \\ \frac{A_2}{\rho_2\mu_2} - \frac{A_3}{\rho_3\mu_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{\rho_3\mu_3} - \frac{A_1}{\rho_1\mu_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{\rho_1\mu_1} - \frac{A_3}{\rho_2\mu_3} = 0\end{aligned} \tag{47}$$

эти послѣднія уравненія суть ничто иное, какъ уравненія (24), изъ коихъ вывели условіе инволюціи (35); изъ нихъ вытекаетъ предложеніе, которое перенося на поверхность шара, можно выразить такъ:

Предложеніе. Если произвольно взятую точку на поверхности шара соединимъ дугами большихъ круговъ съ точками пересѣченія, какихъ-нибудь, шести большихъ круговъ, то шесть большихъ круговъ, проходящихъ черезъ взятую на шарѣ точку, будутъ составлять инволюцію.

Въ этомъ предположеніи подъ большими кругами, составляющими инволюцію, надобно разумѣть такіе круги, которые лежатъ въ плоскостяхъ, составляющихъ инволюцію. Предъидущее предложеніе даетъ способъ построить шестой большой кругъ къ пяти даннымъ, проходящимъ черезъ одну точку, такъ чтобы они составляли инволюцію, такъ же точно, какъ и шестую инволюціонную плоскость къ пяти даннымъ, проходящимъ черезъ одну прямую линію.

§ 489. Если изъ центра шара проведемъ четыре прямыя линіи въ одной плоскости, то онѣ встрѣтятъ поверхность шара въ четырехъ точкахъ на одномъ большомъ кругѣ.

Если эти точки означимъ нумерами 1, 2, 3, 4, а символами (1, 2), (1,3),.... означимъ дуги большаго круга между точками 1 и 2, 1 и 3, и т. д. то ангармоническое отношеніе этихъ точекъ будетъ:

$$\frac{\sin(1,3)}{\sin(1,4)}:\frac{\sin(2,3)}{\sin(2,4)} \tag{48}$$

Если это отношеніе равно — 1, то говорятъ, что четыре точки большаго круга составляютъ гармонію.

Если между дугами шести точекъ на одномъ большомъ кругѣ существуетъ зависимость (36):

$$\frac{\sin(4,2)\,.\,\sin(5,3)\,.\,\sin(6,1)}{\sin(4,3)\,.\,\sin(5,1)\,.\,\sin(6,2)} = 1 \tag{49}$$

то говорятъ, что шесть точекъ на одномъ большомъ кругѣ составляютъ инволюцію.

§ 490. Если положимъ, что формулы (47) и (48) относятся къ весьма малымъ дугамъ, которыя можно разсматривать, какъ отрѣзки прямой линіи, то синусы такихъ дугъ равны дугамъ и наши формулы относительно дугъ обращаются въ формулы относительно прямой линіи:

$$\frac{(1,3)}{(1,4)}:\frac{(2,3)}{(2,4)}$$

это ангармоническое отношеніе отрѣзковъ прямой, а:

$$\frac{(4,2)\,.\,(5,3)\,.\,(6,1)}{(4,3)\,.\,(5,1)\,.\,(5,2)} = 1$$

будетъ инволюція шести отрѣзковъ.

Шаровая поверхность общнѣе плоской, а поэтому всѣ предложенія, имѣющія мѣсто на плоскости имѣютъ мѣсто и на шарѣ, но не всѣ предложенія на шарѣ имѣютъ мѣсто на плоскости.

§ 491. Изложимъ еще одно начало на шаровой поверхности, которое соотвѣтствуетъ началу двойственности на плоскости, именно: способъ перехода отъ предложеній относительно прямыхъ и точекъ къ предложеніямъ относительно точекъ и прямыхъ. Вотъ это начало:

Каждой точкѣ на поверхности шара, какъ полюсу, соотвѣтствуетъ большой кругъ, а каждому большому кругу соотвѣтствуетъ полюсъ.

Пр. 1. Полюсы большихъ круговъ на шарѣ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

Пр. 2. Дуга большого круга, соединяющая два полюса двухъ большихъ круговъ, равна углу наклоненія между плоскостями большихъ круговъ.

Пр 1. Большіе круги шара, коихъ полюсы лежатъ на одномъ большомъ кругѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Пр. 2. Наклоненіе плоскостей двухъ большихъ круговъ, равно дугѣ соединяющей два полюса большихъ круговъ.

Полярной фигурой, соотвѣтствующей данной фигурѣ на шарѣ, называется фигура, которая строится изъ данной, построивъ каждой точкѣ, данной фигуры, какъ полюсъ, большой кругъ, а каждому большому кругу, данной фигуры, полюсъ; такимъ образомъ получится фигура, которая и называется полярной данной фигуры.

Такимъ образомъ предложенія относительно данной фигуры дадутъ предложенія полярной, но такъ какъ полярная фигура полярной есть данная фигура, то всѣ предложенія относительно полярной фигуры дадутъ предложенія относительно данной.

Слѣдующія предложенія вытекаютъ изъ четырехъ предложеній §§ 472, 473.

Предложеніе 1. Точки, дѣлящія пополамъ дополненія сторонъ сферическаго треугольника, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

Предложеніе 2. Точки, дѣлящія пополамъ двѣ стороны сферическаго треугольника и точка, дѣлящая пополамъ дополненіе третей стороны, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

Предложеніе 3. Большіе круги, соединяющіе средины сторонъ сферическаго треугольника съ противулежащими вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Предложеніе 4. Большіе круги, соединяющіе средины дополненій двухъ сторонъ сферическаго треугольника и средину третьей стороны съ противулежащими вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Слѣдующія четыре предложенія вытекаютъ изъ предложеній §§ 487, 488.

Предложеніе 1. Если стороны сферическаго треугольника, или ихъ продолженія, пересѣчемъ дугою большаго круга и построимъ на сторонахъ

треугольника четвертыя гармоническія точки, то двѣ, какія-нибудь, изъ этихъ послѣднихъ съ точкою пересѣченія третьей стороны съ сѣкущимъ кругомъ, лежатъ на одномъ большомъ кругѣ.

Предложеніе 2. Если стороны сферическаго треугольника или ихъ продолженія пересѣчемъ дугою большаго круга и на сторонахъ треугольника построимъ четвертыя гармоническія точки, то большіе круги, соединяющіе эти точки съ противулежащими вершинами, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Предложеніе 3. Если стороны сферическаго треугольника или ихъ продолженія пересѣчемъ дугою большаго круга и двѣ изъ этихъ точекъ пересѣченія соединимъ дугами большихъ круговъ съ противулежащими вершинами треугольника, то эти дуги пересѣкутся въ точкѣ, черезъ которую проходитъ большой кругъ, соединяющій четвертую гармоническую точку на третьей сторонѣ треугольника съ противулежащей вершиной.

Предложеніе 4. Три пары большихъ круговъ, соединяющихъ попарно, какія нибудь, четыре точки на поверхности шара, пересѣкаютъ, какой нибудь, большой кругъ въ точкахъ, составляющихъ инволюцію.

§ 492. Относительно ангармоніи, гармоніи и инволюціи точекъ на прямой въ пространствѣ можно только повторить то, что было сказано въ первой части настоящаго сочиненія, или повторить всѣ предложенія и выраженія, изложенныя въ §§ 476 до 485 включительно, относительно плоскостей, измѣняя слова *плоскость* на *точку*, а вмѣсто синусовъ поставить отрѣзки.

Въ заключеніе прибавимъ слѣдующее. Пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0 \qquad (50)$$

будутъ уравненія вершинъ тетраэдра.

Три произвольныя точки на ребрахъ тетраэдра, исходящихъ изъ вершины $A_1 = 0$, можно представить слѣдующими уравненіями:

$$\frac{A_1}{a_1} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{a_1} - \frac{A_4}{a_4} = 0 \qquad (51)$$

вычитая эти уравненія получимъ уравненія:

$$\frac{A_3}{a_3} - \frac{A_4}{a_4} = 0 \quad , \quad \frac{A_4}{a_4} - \frac{A_2}{a_2} = 0 \quad , \quad \frac{A_2}{a_2} - \frac{A_3}{a_3} = 0 \qquad (52)$$

трехъ точекъ на остальныхъ ребрахъ, которыя лежатъ также на плоскости, проходящей черезъ три первыя точки (51), такъ что точки пересѣченія, какой нибудь, плоскости съ шестью ребрами тетраэдра, могутъ быть выражены предъидущими уравненіями (51) и (52).

Уравненія четвертыхъ гармоническихъ точекъ съ точками (50), (51) и (52) на ребрахъ тетраэдра, очевидно, будутъ:

$$\begin{aligned} &\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}=0 \ , \quad \frac{A_1}{a_1}+\frac{A_3}{a_3}=0 \ , \quad \frac{A_1}{a_1}+\frac{A_4}{a_4}=0 \\ &\frac{A_3}{a_3}+\frac{A_4}{a_4}=0 \ , \quad \frac{A_4}{a_4}+\frac{A_2}{a_2}=0 \ , \quad \frac{A_2}{a_2}+\frac{A_3}{a_3}=0 \end{aligned} \tag{53}$$

складывая каждую пару, стоящую въ одной вертикальной линіи, найдемъ уравненіе:

$$\frac{A_1}{a_1}+\frac{A_2}{a_2}+\frac{A_3}{a_3}+\frac{A_4}{a_4}=0 \tag{54}$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если ребра тетраэдра или ихъ продолженія пересѣчемъ плоскостью и на каждомъ ребрѣ построимъ четвертую гармоническую точку, то три прямыя, соединяющія построенныя на противуположныхъ ребрахъ точки, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если плоскость, пересѣкающая ребра тетраэдра, находится на безконечности, то четвертыя гармоническія точки суть средины реберъ тетраэдра, слѣдовательно, прямыя, соединяющія средины противуположныхъ реберъ тетраэдра, пересѣкаются въ одной точкѣ.

ГЛАВА XXXI.

Преобразованіе координатъ.

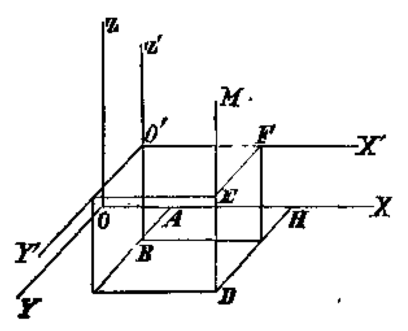
§ 493. Преобразовать координаты значитъ отнесть положеніе точки къ другимъ координатнымъ осямъ. Эти вторыя координатныя оси, относительно первыхъ, бываютъ расположены такъ что, оставаясь параллельными старымъ осямъ, имѣютъ начало въ другой точкѣ, или онѣ имѣя тоже начало, имѣютъ другое направленіе, или наконецъ онѣ имѣютъ другое начало и другое направленіе. Мы будемъ разсматривать преобразованія только прямоугольныхъ координатъ и прямоугольныхъ къ косоугольнымъ, такъ какъ другіе случаи рѣдко употребляются.

Случай 1. Преобразовать координаты въ другія, которыя бы, оставаясь параллельными старымъ, имѣли начало въ другой точкѣ?

Пусть старое начало будетъ O, координаты какой нибудь точки M (фиг. 158) означимъ черезъ x, y, z; пусть координаты новаго начала O' отно-

сительно старыхъ осей, будутъ a, b, c, а координаты точки M относительно новаго начала пусть будутъ x', y', z'.

Фиг. 158.



Очевидно, имѣемъ:

$$OA = a \quad , \quad AB = b \quad , \quad BO' = c$$
$$OH = x \quad , \quad HD = y \quad , \quad DM = z$$
$$O'F = x' \quad , \quad FE = y' \quad , \quad EM = z'$$

откуда легко видѣть, что:

$$x = a + x' \quad , \quad y = b + y' \quad , \quad z = c + z'$$

Случай 2. Преобразовать координаты въ другія, которыя бы, имѣя тоже начало, имѣли другое направленіе? Обѣ системы прямоугольны.

Пусть (фиг. 159) старыя координаты будутъ x, y, z, а новыя x', y', z'.

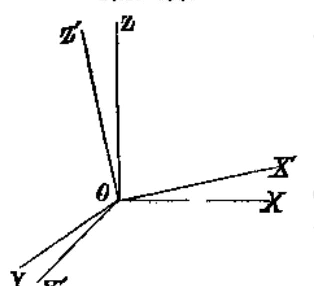
Пусть новая ось X' со старыми осями X, Y, Z составляетъ углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Пусть новая ось Y' со старыми осями X, Y, Z составляетъ углы $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

Наконецъ, пусть новая ось Z' со старыми осями составляетъ углы $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Замѣтимъ, что координаты x, y, z, какой-нибудь, точки суть ничто иное, какъ ея разстоянія отъ плоскостей (OY, OZ), (OX, OZ), (OX, OY).

Фиг. 159.



Уравненія плоскостей (OY', OZ'), (OX', OZ'), (OX', OY') относительно старыхъ осей легко написать.

Въ самомъ дѣлѣ, OX' есть перпендикуляръ къ плоскости (OY', OZ'), и составляетъ углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ съ осями X, Y, Z; плоскость проходитъ черезъ начало координатъ, слѣдовательно, ея уравненіе есть:

$$x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 = 0$$

очевидно, уравненія плоскостей (OX', OZ'), (OX', OY') будутъ:

$$x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 = 0$$
$$x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3 = 0$$

Если x, y, z будутъ координаты точки M, внѣ этихъ плоскостей, то предъидущія уравненія не будутъ равны нулю, а будутъ представлять длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ взятой точки M на эти плоскости.

Означимъ эти перпендикуляры черезъ x', y', z', то найдемъ:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 \\ y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 \\ z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3 \end{aligned} \tag{1}$$

гдѣ x', y', z' суть, очевидно, координаты точки M относительно новыхъ осей, слѣдовательно формулы (1) даютъ зависимость между старыми и новыми координатами, какой-нибудь, точки. Углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ связаны слѣдующими уравненіями. Оси X', Y', Z', составляютъ углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ съ осями X, Y, Z, слѣдовательно имѣемъ (§ 434, 16):

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 &= 1 \\ \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 &= 1 \\ \cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Оси X, Y, Z составляютъ углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. съ осями X', Y', Z', слѣдовательно имѣемъ (§ 434, 16):

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 &= 1 \\ \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 &= 1 \\ \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Оси X', Y', Z' перпендикулярны между собою, слѣдовательно (§ 435):

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 &= 0 \\ \cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3 &= 0 \\ \cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Оси X, Y, Z перпендикулярны между собой, слѣдовательно (§ 435):

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 &= 0 \\ \cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \cos\alpha_3\cos\gamma_3 &= 0 \\ \cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Имѣя эти зависимости между углами легко выразить старыя координаты въ функціи новыхъ. Для этого помножимъ уравненія (1) сначала на $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$ и сложимъ; затѣмъ помножимъ на $\cos\beta_1$, $\cos\beta_2$, $\cos\beta_3$ и сложимъ; наконецъ помножимъ на $\cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \cos\gamma_3$ и сложимъ; соображаясь съ уравненіями (3) и (6), найдемъ:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_2 \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Эти формулы и служатъ для преобразованія старыхъ координатъ въ новыя.

Замѣтимъ при этомъ, что всегда имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{7}$$

Это равенство получимъ, подставляя вмѣсто x, y, z ихъ выраженія (6) или просто, замѣчая, что обѣ части уравненія (7) выражаютъ разстояніе взятой точки отъ начала координатъ (§ 433).

Случай 3. Легко видѣть, что перенося начало координатъ въ точку $(a\,b\,c)$ и измѣняя направленія осей, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= b + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z &= c + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned} \tag{8}$$

§ 494. *Задача.* Преобразовать прямоугольныя координаты въ косоугольныя?

Рѣшеніе. Пусть прямоугольныя координаты, какой-нибудь точки M будутъ x, y, z, а косоугольныя, имѣющія тоже начало, пусть будутъ x', y', z'. Пусть косоугольныя координаты составляютъ между собою углы λ, μ, ν; λ уголъ между Y' и Z', μ между X' и Z', а ν между X' и Y'. Пусть ось X' составляетъ съ осями X, Y, Z углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; ось Y' съ X, Y, Z углы $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и ось Z' съ X, Y, Z углы $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Эти углы, очевидно, связаны слѣдующими условіями:

$$\begin{aligned} \cos\lambda &= \cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 \\ \cos\mu &= \cos\alpha_1\cos\alpha_3 + \cos\beta_1\cos\beta_3 + \cos\gamma_1\cos\gamma_3 \\ \cos\nu &= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Такъ какъ сумма проэкцій координатъ x', y', z', точки M на оси X, равна координатѣ x этой точки, то:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned} \tag{10}$$

гдѣ углы α, β, γ связаны условіями (2) и (9).

Изъ предъидущихъ уравненій легко видѣть, что разстояніе точки M отъ начала координатъ будетъ, если его означимъ чрезъ r:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\lambda + 2x'z'\cos\mu + 2x'y'\cos\nu \tag{11}$$

а разстояніе между точками, коихъ координаты суть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, будетъ:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 +$$

$$+2(y_1 - y_2)(z_1 - z_2)\cos\lambda + 2(x_1 - x_2)(z_1 - z_2)\cos\mu + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\nu \quad (12)$$

Это уравненіе (14) § 433.

Такъ какъ двѣ системы координатъ связаны между собою линейными уравненіями, то преобразованіе координатъ не можетъ ни повысить, ни понизить степень уравненія поверхности.

§ 495. *Полярныя координаты.* Опредѣляютъ также положеніе точки въ пространствѣ, ея разстояніемъ отъ начала координатъ и углами, которые это разстояніе составляетъ съ координатными осями.

Пусть r будетъ это разстояніе, пусть α, β, γ будутъ углы, которые это разстояніе составляетъ съ осями X, Y и Z, то, очевидно, будемъ имѣть:

$$x = r\cos\alpha \quad , \quad y = r\cos\beta \quad , \quad z = r\cos\gamma \qquad (13)$$

углы α, β, γ связаны уравненіемъ:

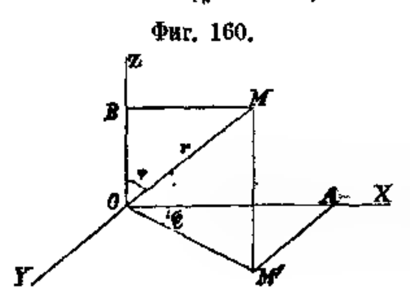
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (14)$$

Подставляя въ уравненіе поверхности вмѣсто x, y, z эти величины, найдемъ уравненіе поверхности въ координатахъ, которыя называются *полярными.*

Замѣтимъ, что уголъ γ есть функція угловъ α и β, вслѣдствіи зависимости (14).

§ 496. *Сферическія координаты.* Опредѣляютъ еще положеніе точки въ пространствѣ, ея разстояніемъ r отъ начала координатъ, угломъ ψ, который это разстояніе составляетъ съ осью Z и угломъ φ, который проэкція r на плоскости (OX, OY) составляетъ съ осью X (фиг. 160):

Фиг. 160.



$$OM = r \quad , \quad OM' = \rho$$

$$\angle AOM' = \varphi \quad , \quad \angle MOB = \psi$$

$$OA = x \quad , \quad M'A = y \quad , \quad OB = z$$

Очевидно, имѣемъ:

$$x = \rho\cos\varphi \quad , \quad y = \rho\sin\varphi \quad , \quad z = r\cos\psi$$

но:

$$\rho = r\sin\psi$$

слѣдовательно:

$$x = r\cos\varphi\sin\psi \quad , \quad y = r\sin\varphi\sin\psi \quad , \quad z = r\cos\psi \tag{15}$$

r, φ и ψ называются *сферическими координатами.*

Сравнивая выраженія для x, y и z (15) съ (13), найдемъ:

$$\cos\alpha = \cos\varphi\sin\psi \quad , \quad \cos\beta = \sin\varphi\sin\psi \quad , \quad \cos\gamma = \cos\psi \tag{16}$$

Это есть зависимость между сферическими и полярными координатами.

Преобразованіе плоскостныхъ координатъ.

§ 497. Посмотримъ теперь, какъ преобразуются координаты плоскости; когда переносится только начало координатъ, когда измѣняется только ихъ направленіе и когда дѣлается и то и другое.

Случай 1. Мы выше видѣли (§ 460), что если x, y, z суть координаты точки, то ея уравненіе будетъ:

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = 0 \tag{17}$$

перенесемъ начало координатъ въ точку (a, b, c), неизмѣняя направленія осей; для этого положимъ (§ 483):

$$x = a + x' \quad , \quad y = b + y' \quad , \quad z = c + z'$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (17), найдемъ:

$$x'\xi + y'\eta + z'\zeta + a\xi + b\eta + c\zeta + 1 = 0$$

или:

$$x'\frac{\xi}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} + y'\frac{\eta}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} + z'\frac{\zeta}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} + 1 = 0 \tag{18}$$

если ξ', η', ζ' будутъ новыя координаты плоскости, то:

$$\xi' = \frac{\xi}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} \quad , \quad \eta' = \frac{\eta}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} \quad , \quad \zeta' = \frac{\zeta}{a\xi+b\eta+c\zeta+1} \tag{19}$$

откуда:

$$\xi = \frac{\xi'}{-a\xi'-b\eta'-c\zeta'+1} \; , \; \eta = \frac{\eta'}{-a\xi'-b\eta'-c\zeta'+1} \; , \; \zeta = \frac{\zeta'}{-a\xi'-b\eta'-c\zeta'+1} \tag{20}$$

таковы формулы для преобразованія координатъ плоскости, когда переносится только начало координатъ.

Знаменатель въ выраженіяхъ (19), приравненный нулю, есть, очевидно, уравненіе новаго начала:

$$a\xi + b\eta + c\zeta + 1 = 0$$

а:

$$a\xi' + b\eta' + c\zeta' - 1 = 0$$

есть уравненіе стараго начала относительно новыхъ осей.

Случай 2. Если, оставивъ начало, измѣнимъ направленіе осей, то мы должны въ уравненіе (17), поставить вмѣсто x, y, z выраженія (6), что даетъ:

$$(x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\xi + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\eta +$$
$$+ (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\zeta + 1 = 0 \qquad (21)$$

или:

$$x'(\xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1) + y'(\xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2) +$$
$$z'(\xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_3) + 1 = 0 \qquad (22)$$

означимъ черезъ ξ', η', ζ' новыя координаты плоскости, то будемъ имѣть:

$$\xi' = \xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1$$
$$\eta' = \xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2 \qquad (23)$$
$$\zeta' = \xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3$$

откуда:

$$\xi = \xi'\cos\alpha_1 + \eta'\cos\alpha_2 + \zeta'\cos\alpha_3$$
$$\eta = \xi'\cos\beta_1 + \eta'\cos\beta_2 + \zeta'\cos\beta_3 \qquad (24)$$
$$\zeta = \xi'\cos\gamma_1 + \eta'\cos\gamma_2 + \zeta'\cos\gamma_3$$

Изъ этихъ выраженій видно, что онѣ ничѣмъ не отличны отъ формулъ, служащихъ для преобразованія координатъ точки (4) и (6).

Случай 3. Перенесеніе начала и измѣненіе направленія осей дается выраженіями (8), которыя подставляя въ уравненіе (17), найдемъ:

$$(a + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\xi + (b + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\eta +$$
$$+ (c + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3)\zeta + 1 = 0$$

откуда:

$$x'(\xi\cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1) + y'(\xi\cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2) +$$
$$+ z'(\xi\cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3) + a\xi + b\eta + c\zeta + 1 = 0$$

раздѣляя на:

$$a\xi + b\eta + c\zeta + 1$$

и означая через ξ', η', ζ' новыя координаты, найдемъ:

$$\xi' = \frac{\xi \cos\alpha_1 + \eta\cos\beta_1 + \zeta\cos\gamma_1}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1}$$

$$\eta' = \frac{\xi \cos\alpha_2 + \eta\cos\beta_2 + \zeta\cos\gamma_2}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1} \qquad (25)$$

$$\zeta' = \frac{\xi \cos\alpha_3 + \eta\cos\beta_3 + \zeta\cos\gamma_3}{a\xi + b\eta + c\zeta + 1}$$

откуда легко опредѣлить ξ, η, ζ въ функціи новыхъ координатъ ξ', η', ζ'.

Изъ выраженій для преобразованія координатъ плоскости видимъ, что онѣ не имѣютъ той формы и характера, который имѣютъ формулы, служащія для преобразованія координатъ точки; это, опять повторяемъ, происходитъ отъ того, что система координатъ Декарта есть только частный случай болѣе общей системы, которую мы и изложимъ теперь.

Тетраэдрическая система координатъ.

§ 498. Возьмемъ уравненія четырехъ плоскостей не пересѣкающихся въ одной точкѣ, образующихъ тетраэдръ. Пусть эти уравненія будутъ:

$$\begin{aligned} &1)\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0\\ &2)\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\\ &3)\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0\\ &4)\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0 \end{aligned} \qquad (26)$$

Такъ какъ, по условію, эти четыре плоскости не пересѣкаются въ одной точкѣ, то:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \gtrless 0 \qquad (27)$$

Означимъ черезъ $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ миноры, соотвѣтствующіе элементамъ $a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ опредѣлителя (27).

Уравненія вершинъ тетраэдра (§ 465, 31) будутъ:

$$\begin{aligned} &(2,3,4)\ \ A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0\\ &(1,3,4)\ \ A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 = 0\\ &(1,2,4)\ \ A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 = 0\\ &(1,2,3)\ \ A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 = 0 \end{aligned} \qquad (28)$$

Символы $(2, 3, 4)$, $(1, 3, 4)$, ... означаютъ какія изъ плоскостей (26) пересѣкаются въ этой точкѣ.

Въ *тетраэдрической системѣ* координатъ положеніе точки относится къ четыремъ плоскостямъ (26), а положеніе плоскости къ четыремъ точкамъ (28). Этотъ тетраэдръ называется *координатнымъ*.

Означимъ черезъ p_1, p_2, p_3, p_4 разстоянія, какой нибудь точки (x, y, z) отъ четырехъ граней тетраэдра; эти четыре элемента, очевидно, находятся въ извѣстной зависимости между собою, такъ какъ положеніе точки вполнѣ опредѣляется ея разстояніями отъ трехъ плоскостей, слѣдовательно эти четыре элемента будутъ равносильны тремъ, если будемъ принимать не ихъ величины, а ихъ отношенія. Такъ какъ тетраэдръ данъ, то всегда можно опредѣлить и числовую величину четырехъ элементовъ p_1, p_2, p_3, p_4, но въ тетраэдрической системѣ координатъ въ этомъ нѣтъ надобности, даже вмѣсто разстояній, для большей общности, можно брать разстоянія точки (x, y, z) въ извѣстныхъ направленіяхъ, т. е. помножить p_1, p_2, p_3, p_4 на постоянные коэфиціенты, напримѣръ, на k_1, k_2, k_3, k_4. Означимъ черезъ x_1, x_2, x_3, x_4 такія величины, которыя бы удовлетворяли уравненія:

$$\rho x_1 = p_1 k_1 \quad , \quad \rho x_2 = p_2 k_2 \quad , \quad \rho x_3 = p_3 k_3 \quad , \quad \rho x_4 = p_4 k_4 \qquad (29)$$

гдѣ ρ есть коэфиціентъ пропорціональности. Эти величины x_1, x_2, x_3, x_4 примемъ ва координаты точки (x, y, z) относительно координатнаго тетраэдра. Слѣдовательно, координатами точки, въ этой системѣ, мы будемъ называть: *четыре числа, имѣющія между собою отношенія равныя отношеніямъ разстояній точки отъ граней тетраэдра помноженныхъ, каждое, на постоянный коэфиціентъ, т. е. отсчитываемыя въ извѣстномъ направленіи.*

Легко видѣть, что уравненія граней тетраэдра будутъ:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_4 = 0 \quad . \qquad (30)$$

а уравненія его реберъ:

$$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \qquad (31)$$

а координаты его вершинъ:

$$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \; , \; \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \qquad (32)$$

§ 499. Точно также мы опредѣлимъ тетраэдрическія координаты плоскости. Пусть q_1, q_2, q_3, q_4 будутъ разстоянія плоскости, данной координатами (ξ, η, ζ), отъ вершинъ тетраэдра, данныхъ уравненіями (28); пусть эти разстоянія будутъ отсчитыватся, не по перпендикулярнымъ направленіямъ, а въ извѣстныхъ, опредѣленныхъ, но произвольныхъ; для этого q_1, q_2, q_3, q_4 множатся на коэфиціенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и черезъ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ означаются величины, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\sigma\xi_1 = \lambda_1 q_1 \quad , \quad \sigma\xi_2 = \lambda_2 q_2 \quad , \quad \sigma\xi_3 = \lambda_3 q_3 \quad , \quad \sigma\xi_4 = \lambda_4 q_4 \qquad (33)$$

гдѣ σ есть коэфиціентъ пропорціональности.

Числа $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ называютъ *координатами плоскости*, слѣдовательно координаты плоскости суть *четыре числа, имѣющія между собою отношенія равныя отношеніямъ разстояній плоскости отъ вершинъ тетраэдра, каждое разстояніе помножено на произвольный, но постоянный коэфиціентъ; т. е. отсчитывается это разстояніе въ произвольномъ, но постоянномъ направленіи.*

Очевидно, уравненія вершинъ тетраэдра суть:

$$\xi_1 = 0 \quad , \quad \xi_2 = 0 \quad , \quad \xi_3 = 0 \quad , \quad \xi_4 = 0 \qquad (34)$$

уравненія его реберъ:

$$\begin{matrix} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \xi_1 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \xi_1 = 0 \\ \xi_4 = 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \xi_2 = 0 \\ \xi_4 = 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \xi_3 = 0 \\ \xi_4 = 0 \end{matrix} \qquad (35)$$

а координаты его граней будутъ:

$$\begin{matrix} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_4 = 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \xi_1 = 0 \\ \xi_3 = 0 \\ \xi_4 = 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \\ \xi_4 = 0 \end{matrix} \qquad (36)$$

§ 500. Если напишемъ уравненія (26) и (28) въ нормальной формѣ, то найдемъ:

$$\rho x_1 = k_1 p_1 = k_1 \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \qquad \sigma\xi_1 = \lambda_1 q_1 = \lambda_1 \frac{A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1}{D_1\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

$$\rho x_2 = k_2 p_2 = k_2 \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \qquad \sigma\xi_2 = \lambda_2 q_2 = \lambda_2 \frac{A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2}{D_2\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

$$\rho x_3 = k_3 p_3 = k_3 \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}} \qquad \sigma\xi_3 = \lambda_3 q_3 = \lambda_3 \frac{A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3}{D_3\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

$$\rho x_4 = k_4 p_4 = k_4 \frac{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}} \qquad \sigma\xi_4 = \lambda_4 q_4 = \lambda_4 \frac{A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4}{D_4\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$$

Такъ какъ k и λ суть величины совершенно произвольныя, то можемъ ихъ выбрать такъ, чтобы:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = \xi x + \eta y + \zeta z + 1 \tag{37}$$

т. е. чтобы уравненія плоскости и точки представлялись въ формѣ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \tag{38}$$

а для этого положимъ:

$$k_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\quad,\quad k_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$$
$$\lambda_1 = D_1\quad,\quad \lambda_2 = D_2$$
$$k_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}\quad,\quad k_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}$$
$$\lambda_3 = D_3\quad,\quad \lambda_4 = D_4$$

введя общій дѣлитель $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ въ коэфиціентъ пропорціональности σ, найдемъ:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ \rho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ \rho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \\ \rho x_4 &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 \\ \sigma\xi_2 &= A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 \\ \sigma\xi_3 &= A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 \\ \sigma\xi_4 &= A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 \end{aligned} \tag{39'}$$

Таковы формулы, служащія для перехода отъ тетраэдрическихъ координатъ къ декартовымъ. Если эти уравненія рѣшимъ относительно x, y, z, то найдемъ формулы для обратнаго перехода, т. е. отъ декартовыхъ къ тетраэдрическимъ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4}{D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4} \\ y &= \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4x_4}{D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4} \\ z &= \frac{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4}{D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4} \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4}{d_1\xi_1 + d_2\xi_2 + d_3\xi_3 + d_4\xi_4} \\ \eta &= \frac{b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 + b_4\xi_4}{d_1\xi_1 + d_2\xi_2 + d_3\xi_3 + d_4\xi_4} \\ \zeta &= \frac{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 + c_4\xi_4}{d_1\xi_1 + d_2\xi_2 + d_3\xi_3 + d_4\xi_4} \end{aligned} \tag{40'}$$

Легко видѣть теперь, перемноживъ уравненія (39), что будемъ имѣть:

$$\rho\sigma(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4) = \Delta(\xi x + \eta y + \zeta z + 1)$$

Слѣдовательно уравненіе:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_2 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \tag{41}$$

будетъ представлять плоскость, коей координаты суть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и точку, коей координаты суть x_1, x_2, x_3, x_4.

Изъ всего предъидущаго слѣдуетъ, что въ тетраэдрической системѣ координатъ существуетъ полная соотвѣтственность.

Положеніе точки опредѣляется относительно координатнаго тетраэдра ея разстояніями отъ его граней, отсчитываемыми въ опредѣленномъ направленіи.	Положеніе плоскости опредѣляется относительно вершинъ координатнаго тетраэдра ея разстояніями отъ его вершинъ, отсчитываемыми въ опредѣленномъ направленіи.

Поэтому формулы для преобразованія координатъ въ обѣихъ системахъ тождественны по формѣ.

§ 501. Остается показать, какъ выше замѣтили, что система координатъ Декарта есть только частный случай системы тетраэдрической.

Для этого преобразуемъ координатный тетраэдръ въ другой, котораго бы три грани $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ были перпендикулярны между собою. Пусть x, y, z будутъ разстоянія, какой нибудь, точки отъ плоскостей $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$; пусть p будетъ ея разстояніе отъ четвертой плоскости $x_4 = 0$, которой разстояніе отъ пересѣченія трехъ плоскостей $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, означимъ черезъ q. Очевидно, будемъ имѣть:

$$\rho x_1 = k_1 x \quad , \quad \rho x_2 = k_2 y \quad , \quad \rho x_3 = k_3 z \quad , \quad \rho x_4 = k_4 p$$

полагая:

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1 \quad , \quad k_4 = \frac{1}{q}$$

найдемъ:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = z \quad , \quad \rho x_4 = \frac{p}{q}$$

Если плоскость $x_4 = 0$ отодвинемъ на безконечность, то $p = \infty$ и $q = \infty$; слѣдовательно $\frac{p}{q} = 1$, откуда:

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = z \quad , \quad \rho x_4 = 1 \tag{42}$$

Изъ этого видимъ, что въ декартовой системѣ координатъ четвертая координатная плоскость находится на безконечности и переходъ отъ тетраэдрической системы къ декартовой дѣлается съ помощью уравненій (42).

§ 502. Одно изъ самыхъ замѣчательныхъ уравненій плоскости, есть уравненіе:

$$D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4 = 0 \tag{43}$$

полученное, приравнявъ нулю знаменатель въ уравненіяхъ (40).

Для всѣхъ точекъ этой плоскости $x=\infty$, $y=\infty$ и $z=\infty$, слѣдовательно на этой плоскости находятся всѣ безконечно-удаленныя точки. Мы эту плоскость будемъ называть *безконечно-удаленною*. Ниже увидимъ, какую важную роль играетъ эта плоскость во всѣхъ изслѣдованіяхъ свойствъ поверхностей.

Мы видѣли въ первой части (§ 185), что всѣ безконечно-удаленныя точки на плоскости, лежатъ на одной прямой, здѣсь-же видимъ, что всѣ безконечно-удаленныя точки пространства находятся на одной плоскости.

Отсюда видимъ, что плоскость можно разсматривать, какъ площадь круга, коего окружность находится на безконечности, а пространство—какъ замкнутый шаръ, коего поверхность находится на безконечности.

§ 503. Остается показать, какъ преобразуется одна тетраэдрическая система координатъ въ другую, тоже тетраэдрическую.

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 будутъ координаты точки, а $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ координаты плоскости въ одной системѣ, а y_1, y_2, y_3, y_4 и $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ координаты точки и плоскости въ другой системѣ.

Уравненіе плоскости въ первой системѣ будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \tag{44}$$

а уравненіе той-же плоскости въ другой системѣ:

$$\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 = 0 \tag{45}$$

Координаты y_1, y_2, y_3, y_4 второй системы будутъ линейныя функціи координатъ первой системы; пусть онѣ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}
\rho y_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\
\rho y_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\
\rho y_3 &= a_{31} x_1 + a_{33} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \\
\rho y_4 &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Если эти выраженія подставимъ въ (45) и сравнимъ съ (44), то найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma\xi_1 &= a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + a_{31}\eta_3 + a_{41}\eta_4 \\
\sigma\xi_2 &= a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{32}\eta_3 + a_{42}\eta_4 \\
\sigma\xi_3 &= a_{13}\eta_1 + a_{23}\eta_2 + a_{33}\eta_3 + a_{43}\eta_4 \\
\sigma\xi_4 &= a_{14}\eta_1 + a_{24}\eta_2 + a_{34}\eta_3 + a_{44}\eta_4
\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Составимъ опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{48}$$

который не долженъ быть равенъ нулю, такъ какъ въ противномъ случаѣ, второй тетраэдръ обращается въ точку. Если черезъ $A_{k,i}$ назовемъ миноръ, соотвѣтствующій элементу $a_{k,i}$ въ Δ, то изъ уравненій (46) и (47), найдемъ:

$$\begin{aligned} \mu x_1 &= A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 + A_{41}y_4 \\ \mu x_2 &= A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 + A_{42}y_4 \\ \mu x_3 &= A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 + A_{43}y_4 \\ \mu x_4 &= A_{14}y_1 + A_{24}y_2 + A_{34}y_3 + A_{44}y_4 \end{aligned} \tag{49}$$

и:

$$\begin{aligned} \nu\eta_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 + A_{14}\xi_4 \\ \nu\eta_2 &= A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 + A_{24}\xi_4 \\ \nu\eta_3 &= A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{34}\xi_4 \\ \nu\eta_4 &= A_{41}\xi_1 + A_{42}\xi_2 + A_{43}\xi_3 + A_{44}\xi_4 \end{aligned} \tag{50}$$

Изъ уравненій (46), (47), (49) и (50) ясно видно значеніе коэфиціентовъ $a_{k,i}$ и $A_{k,i}$. Уравненія:

$$\begin{aligned} y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_3 = 0 \quad , \quad y_4 = 0 \\ \eta_1 = 0 \quad , \quad \eta_2 = 0 \quad , \quad \eta_3 = 0 \quad , \quad \eta_4 = 0 \end{aligned} \tag{51}$$

представляютъ стороны и вершины втораго тетраэдра относительно перваго. Эти уравненія суть:

грани:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \end{aligned} \tag{52}$$

вершины:

$$\begin{aligned} A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 + A_{14}\xi_4 = 0 \\ A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 + A_{24}\xi_4 = 0 \\ A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{34}\xi_4 = 0 \\ A_{41}\xi_1 + A_{42}\xi_2 + A_{43}\xi_3 + A_{44}\xi_4 = 0 \end{aligned} \tag{52'}$$

откуда видимъ, что координаты:

новыхъ граней:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix} \qquad (53)$$

новыхъ вершинъ:

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{matrix} \qquad (53')$$

Уравненія сторонъ и вершинъ стараго координатнаго тетраэдра, отнесенныя къ новому, будутъ:

$$\begin{matrix} x_1 = 0 \;, & x_2 = 0 \;, & x_3 = 0 \;, & x_4 = 0 \\ \xi_1 = 0 \;, & \xi_2 = 0 \;, & \xi_3 = 0 \;, & \xi_4 = 0 \end{matrix} \qquad (54)$$

старыя грани:

$$\begin{aligned} A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 + A_{41}y_4 = 0 \\ A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 + A_{42}y_4 = 0 \\ A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 + A_{43}y_4 = 0 \\ A_{14}y_1 + A_{24}y_2 + A_{34}y_3 + A_{44}y_4 = 0 \end{aligned} \qquad (55)$$

старыя вершины:

$$\begin{aligned} a_{11}\eta_1 + a_{21}\eta_2 + a_{31}\eta_3 + a_{41}\eta_4 = 0 \\ a_{12}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + a_{32}\eta_3 + a_{42}\eta_4 = 0 \\ a_{13}\eta_1 + a_{23}\eta_2 + a_{33}\eta_3 + a_{43}\eta_4 = 0 \\ a_{14}\eta_1 + a_{24}\eta_2 + a_{34}\eta_3 + a_{44}\eta_4 = 0 \end{aligned} \qquad (55')$$

Откуда видимъ, что координаты:

старыхъ граней:

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{matrix} \qquad (56)$$

старыхъ вершинъ:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{matrix} \qquad (56')$$

Тетраэдрическая система координатъ въ особенности прилагается удобно къ предложеніямъ относительно положенія, гдѣ не входятъ числовыя значенія величинъ.

§ 504. Рѣшимъ еще слѣдующую задачу:

Задача. Написать уравненіе плоскости, проходящей черезъ три точки:

$$(x'_1 x'_2 x'_3 x'_4)\,,\ (x_1'' x_2'' x_3'' x_4'')\,,\ (x_1''' x_2''' x_3''' x_4''')$$

Пусть искомое уравненіе плоскости будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \qquad (57)$$

Такъ какъ координаты данныхъ точекъ

Задача. Написать уравненіе точки, лежащей на трехъ плоскостяхъ:

$$(\xi_1' \xi_2' \xi_3' \xi_4')\,,\ (\xi_1'' \xi_2'' \xi_3'' \xi_4'')\,,\ (\xi_1''' \xi_2''' \xi_3''' \xi_4''')$$

Пусть уравненіе точки будетъ:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = 0 \qquad (57')$$

Такъ какъ плоскости проходятъ черезъ

должны удовлетворять уравненіе плоскости, то имѣемъ:

$$\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' + \xi_4 x_4' = 0$$
$$\xi_1 x_1'' + \xi_2 x_2'' + \xi_3 x_3'' + \xi_4 x_4'' = 0 \quad (58)$$
$$\xi_1 x_1''' + \xi_2 x_2''' + \xi_3 x_3''' + \xi_4 x_4''' = 0$$

исключая изъ уравненій (57) и (58) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix} = 0 \quad (59)$$

искомую точку, то ихъ координаты должны удовлетворять уравненіе точки и мы имѣемъ:

$$x_1\xi_1' + x_2\xi_2' + x_3\xi_3' + x_4\xi_4' = 0$$
$$x_1\xi_1'' + x_2\xi_2'' + x_3\xi_3'' + x_4\xi_4'' = 0 \quad (58')$$
$$x_1\xi_1''' + x_2\xi_2''' + x_3\xi_3''' + x_4\xi_4''' = 0$$

исключая изъ уравненій (57') и (58') x_1, x_2, x_3, x_4, найдемъ:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' & \xi_4' \\ \xi_1'' & \xi_2'' & \xi_3'' & \xi_4'' \\ \xi_1''' & \xi_2''' & \xi_3''' & \xi_4''' \end{vmatrix} = 0 \quad (59')$$

Легко видѣть, что координаты плоскости и координаты точки будутъ даны минорами предъидущихъ опредѣлителей, соотвѣтствующихъ элементамъ x_1, x_2, x_3, x_4, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Изъ уравненій (59) и (59'), найдемъ:

$$\rho x_1 = x_1' + \lambda x_1'' + \mu x_1'''$$
$$\rho x_2 = x_2' + \lambda x_2'' + \mu x_2'''$$
$$\rho x_3 = x_3' + \lambda x_3'' + \mu x_3'''$$
$$\rho x_4 = x_4' + \lambda x_4'' + \mu x_4'''$$

$$\sigma\xi_1 = \xi_1' + \lambda\xi_1'' + \mu\xi_1'''$$
$$\sigma\xi_2 = \xi_2' + \lambda\xi_2'' + \mu\xi_2'''$$
$$\sigma\xi_3 = \xi_3' + \lambda\xi_3'' + \mu\xi_3'''$$
$$\sigma\xi_4 = \xi_4' + \lambda\xi_4'' + \mu\xi_4'''$$

Если уравненія двухъ плоскостей будутъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \quad , \quad \xi'_1 x_1 + \xi'_2 x_2 + \xi'_3 x_3 + \xi'_4 x_4 = 0$$

то уравненіе плоскости, проходящей черезъ пересѣченіе этихъ двухъ, будетъ:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 + \lambda(\xi'_1 x_1 + \xi'_2 x_2 + \xi'_3 x_3 + \xi'_4 x_4) = 0$$

или:

$$(\xi_1 + \lambda\xi'_1)x_1 + (\xi_3 + \lambda\xi'_2)x_2 + (\xi_3 + \lambda\xi'_3)x_3 + (\xi_4 + \lambda\xi'_4)x_4 = 0$$

Слѣдовательно координаты этой плоскости будутъ:

$$\xi_1 + \lambda\xi_1' \quad , \quad \xi_2 + \lambda\xi_2' \quad , \quad \xi_3 + \lambda\xi_3' \quad , \quad \xi_4 + \lambda\xi_4'$$

Если уравненія двухъ точекъ будутъ:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = 0 \quad , \quad x'_1\xi_1 + x'_2\xi_2 + x'_3\xi_3 + x'_4\xi_4 = 0$$

то уравненіе точки на прямой, соединяющей эти двѣ точки, будетъ:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 + \lambda(x'_1\xi_1 + x'_2\xi_2 + x'_3\xi_3 + x'_4\xi_4) = 0$$

откуда координаты этой точки будутъ:

$$x_1 + \lambda x'_1 \quad , \quad x_2 + \lambda x'_2 \quad , \quad x_3 + \lambda x'_3 \quad , \quad x_4 + \lambda x'_4$$

§ 505. Тетраэдрическая система координатъ вытекаетъ изъ того свойства, что уравненіе всякой плоскости можно выразить съ помощью четырехъ данныхъ плоскостей не пересѣкающихся въ одной точкѣ, а уравненіе каждой точки можно выразить съ помощью четырехъ данныхъ точекъ, не лежащихъ въ одной плоскости.

Пусть уравненія четырехъ данныхъ плоскостей будутъ:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

$$a_4x + b_4y + c_4z + d_4 = 0$$

требуется съ помощью этихъ уравненій выразить уравненіе плоскости:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Для этого помножимъ предъидущія уравненія на λ, μ, ν, ρ и сложивъ приравняемъ коэфиціенты при x, y, z коэфиціентамъ a, b, c, d, то найдемъ:

$$\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 + \rho a_4 = a$$

$$\lambda b_1 + \mu b_2 + \nu b_2 + \rho b_4 = b$$

$$\lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 + \rho c_4 = c$$

$$\lambda d_1 + \mu d_2 + \nu d_3 + \rho d_4 = d$$

изъ этихъ четырехъ уравненій, найдемъ искомыя коэфиціенты λ, μ, ν, ρ.

Если уравненія четырехъ точекъ будутъ:

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1 = 0$$

$$A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2 = 0$$

$$A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 = 0$$

$$A_4\xi + B_4\eta + C_4\zeta + D_4 = 0$$

то уравненіе пятой точки:

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0$$

можетъ быть выражено съ помощью предъидущихъ уравненій.

Для этого помножимъ ихъ на коэфиціенты λ, μ, ν ρ и сложивъ приравняемъ коэфиціенты коэфиціентамъ послѣдняго уравненія, что даетъ слѣдующія уравненія для опредѣленія λ, μ, ν, ρ:

$$A_1\lambda + A_2\mu + A_3\nu + A_4\rho = A$$

$$B_1\lambda + B_2\mu + B_3\nu + B_4\rho = B$$

$$C_1\lambda + C_2\mu + C_3\nu + C_4\rho = C$$

$$D_1\lambda + D_2\mu + D_3\nu + D_4\rho = D$$

изъ коихъ опредѣлимъ λ, μ, ν, ρ, если четыре, данныя уравненіями, точки не лежатъ на одной плоскости.

ГЛАВА XXXII.

Общія свойства поверхностей втораго порядка.

§ 506. Геометрическое мѣсто точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію второй степени:

$$f(x, y, z) = a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + 2a_2yz + 2b_2xz + 2c_2xy +$$
$$+ 2a_3x + 2b_3y + 2c_3z + k = 0 \qquad (1)$$

называется *поверхностью втораго порядка.*

Какъ видно изъ формы уравненія оно содержитъ десять членовъ, слѣдовательно десять коэфиціентовъ, при: $x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy, x, y, z, 1$. Изъ этихъ десяти числовыхъ коэфиціентовъ, не нарушая общности уравненія (1), можно одинъ сдѣлать равнымъ единицѣ, напримѣръ k, раздѣляя на него всѣ остальные девять коэфиціентовъ.

Такимъ образомъ, въ уравненіе поверхности войдутъ линейно только девять коэфиціентовъ, коихъ числовыя величины опредѣляютъ форму и свойства поверхности.

Эти девять коэфиціентовъ будутъ состоять въ линейной зависимости, если поверхность должна проходить черезъ данную точку. Эта линейная зависимость между коэфиціентами получится, вставивъ въ уравненіе по-

верхности координаты данной точки. Если поверхность должна проходить и черезъ другую, данную координатами точку, то мы будемъ имѣть между девятью коэфиціентами и другую линейную зависимость, слѣдовательно, чтобы всѣ девять коэфиціентовъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и поверхность, вполнѣ опредѣлились, необходимо имѣть девять такихъ линейныхъ уравненій, т. е. девять данныхъ точекъ, черезъ которыя должна проходить поверхность. Но не каждыя девять точекъ опредѣляютъ поверхность, такъ какъ положеніе точекъ можетъ быть таково, что изъ девяти линейныхъ уравненій одно или нѣсколько могутъ вытекать изъ остальныхъ; въ этомъ случаѣ мы не имѣемъ достаточнаго числа уравненій для опредѣленія девяти коэфиціентовъ.

Слѣдовательно восемь данныхъ точекъ не опредѣляютъ вполнѣ поверхность. Между девятью коэфиціентами мы будемъ имѣть только восемь линейныхъ уравненій, изъ которыхъ восемь коэфиціентовъ опредѣляются линейно черезъ девятый; если этотъ девятый назовемъ черезъ λ, который остается совершенно произвольнымъ, то, очевидно, восемь остальныхъ коэфиціентовъ будутъ имѣть форму $a+b\lambda$, гдѣ a и b суть функціи координатъ данныхъ восьми точекъ. Подставляя восемь коэфиціентовъ, выраженныхъ линейно черезъ девятый λ, въ уравненіе (1) и собирая члены независимые отъ λ и члены, имѣющіе коэфиціентомъ λ, найдемъ:

$$f(x,y,z)=\varphi(x,y,z)-\lambda\psi(x,y,z)=0 \qquad (2)$$

Въ этомъ уравненіи съ произвольнымъ коэфиціентомъ λ заключаются всѣ поверхности втораго порядка, проходящія черезъ восемь данныхъ точекъ. Произвольный коэфиціентъ опредѣлится, если будетъ дана девятая точка, черезъ которую поверхность, проходящая уже черезъ восемь точекъ, должна пройти.

Уравненія:

$$\varphi(x,y,z)=0 \quad , \quad \psi(x,y,z)=0 \qquad (3)$$

полученныя, полагая $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$, представляютъ двѣ поверхности втораго порядка, каждая изъ коихъ проходитъ черезъ восемь данныхъ точекъ. Эти двѣ поверхности пересѣкаются по кривой, которая также проходитъ черезъ восемь данныхъ точекъ. Эта кривая, проходя черезъ восемь точекъ, проходитъ еще черезъ безчисленное множество другихъ, которыя всѣ, данными восьмю точками, опредѣляются и которыя всѣ лежатъ на общей поверхности, проходящей черезъ восемь данныхъ точекъ.

Слѣдовательно всѣ поверхности втораго порядка, которыя проходятъ черезъ восемь произвольно выбранныхъ точекъ въ пространствѣ, прохо-

дятъ по кривой, которая опредѣляется взятыми восьмью точками, черезъ которую проходятъ и поверхности (3).

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для того, чтобы поверхность втораго порядка девятью точками вполнѣ опредѣлилась надобно, чтобы эти точки не лежали всѣ на кривой пересѣченія поверхностей (3). И въ самомъ дѣлѣ, кривая опредѣляется восемью точками, а координаты каждой, лежащей на ней точки, обращаютъ въ нуль $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$, слѣдовательно девятою точкою на кривой, λ изъ уравненій (3) неопредѣляется.

§ 507. Особенный случай поверхности втораго порядка представляютъ двѣ плоскости, если уравненіе (1) разлагается на два линейные множителя:

$$F(x, y, z) = A \cdot B = 0 \tag{4}$$

гдѣ:

$$A = a'x + b'y + c'z + d' \quad , \quad B = a''x + b''y + c''z + d'' \tag{5}$$

очевидно, что координаты точекъ, лежащихъ какъ на одной, такъ и на другой изъ плоскостей:

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = 0 \tag{6}$$

удовлетворяютъ уравненію втораго порядка (4).

Если двѣ плоскости пересѣкаютъ, какую нибудь, поверхность втораго порядка $f(x, y, z) = 0$ по двумъ плоскимъ кривымъ, то всѣ поверхности втораго порядка, проходящія по обѣимъ этимъ кривымъ, могутъ быть представлены въ формѣ:

$$f(x, y, z) - \lambda A \cdot B = 0 \tag{7}$$

такъ, что если $f_1(x, y, z) = 0$ есть, какая нибудь, поверхность втораго порядка, проходящая по двумъ плоскимъ кривымъ, то λ и μ можно такъ опредѣлить, что:

$$f(x, y, z) - \lambda A \cdot B = \mu f_1(x, y, z) \tag{8}$$

Если-же будутъ даны только поверхность $f = 0$ и плоскость $A = 0$, то уравненіе (7) будетъ содержать четыре произвольные коэфиціента въ плоскости $\lambda B = 0$ и мы покажемъ, что всѣ поверхности втораго порядка, проходящія черезъ пересѣченіе $f = 0$ съ $A = 0$, представляются уравненіемъ:

$$f(x, y, z) - \lambda A \cdot B = 0 \tag{9}$$

Замѣтимъ сначала, что пересѣченіе поверхности втораго порядка съ плоскостью есть одно изъ коническихъ сѣченій. Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ уравненіи (1) $z = 0$, или $y = 0$, или $x = 0$, найдемъ пересѣченіе

поверхности съ плоскостями (OX, OY), (OX, OZ), (OY, OZ), которыя, очевидно, суть коническія сѣченія.

Но такъ какъ каждую плоскость можно сдѣлать, преобразованіемъ координатъ, которое неизмѣняетъ поверхности, одною изъ координатныхъ плоскостей, то изъ этого вытекаетъ сдѣланное выше заключеніе.

Возвратимся къ нашему предложенію. Предложеніе состоитъ въ томъ, что всякая поверхность, проходящая черезъ пересѣченіе $f=0$ и $A=0$, т. е. черезъ коническое сѣченіе, можетъ быть представлена въ формѣ (9). Если поверхность $\varphi=0$ проходитъ черезъ пересѣченіе поверхностей $f=0$ и $A=0$, то она должна удовлетворять пяти условіямъ, такъ какъ коническое сѣченіе опредѣляется пятью точками, слѣдовательно поверхность $\varphi=0$ заключаетъ еще только четыре произвольныхъ коэфиціента, въ линейной формѣ, а этому условію удовлетворяетъ и уравненіе (9). Слѣдовательно если $f=0$ и $\varphi=0$ суть уравненія двухъ какихъ-нибудь, поверхностей вторагэ порядка, которыя пересѣкаются по плоской кривой, лежащей въ плоскости $A=0$, то можно всегда такъ опредѣлить четыре коэфиціента въ $\lambda B=0$ и еще множитель μ, что будемъ имѣть тождество:

$$f-\mu\varphi=\lambda A\,.\,B \tag{10}$$

а это даетъ слѣдующее свойство:

Если двѣ поверхности вторато порядка пересѣкаются по одной плоской кривой, то онѣ въ тоже время пересѣкаются и по другой плоской кривой.

§ 508. Если будутъ даны только семь точекъ, черезъ которыя должна проходить поверхность вторато порядка, то между десятью коэфиціентами въ уравненіи поверхности, будемъ имѣть только семь линейныхъ уравненій, съ помощью которыхъ семь коэфиціентовъ опредѣлятся линейно черезъ два λ и μ, которые останутся совершенно произвольными. Форма семи коэфиціентовъ будетъ:

$$a+b\lambda+c\mu$$

которые если вставимъ въ уравненіе (1), то оно сдѣлается:

$$\varphi_1(x,\,y,\,z)+\lambda\,\varphi_2(x,\,y,\,z)+\mu\,\varphi_3(x,\,y,\,z)=0 \tag{11}$$

Это уравненіе съ двумя произвольными коэфиціентами λ и μ представляетъ цѣлую систему поверхностей, которыя всѣ проходятъ черезъ семь данныхъ точекъ. Между этими поверхностями находятся и поверхности вторато порядка:

$$\varphi_1(x,y,z)\quad,\quad\varphi_2(x,y,z)\quad,\quad\varphi_3(x,y,z) \tag{12}$$

которыя соотвѣтствуютъ значеніямъ:

$$\lambda=0\ ,\ \mu=0\quad ;\quad \mu=0\ ,\ \lambda=\infty\quad ;\quad \lambda=0\ ,\ \mu=\infty$$

Такъ какъ онѣ втораго порядка, то онѣ пересѣкаются въ восьми точкахъ, слѣдовательно всѣ поверхности втораго порядка, проходящія черезъ семь данныхъ точекъ, проходятъ въ тоже время и черезъ восьмую, которая опредѣляется семью данными.

Изъ этого слѣдуетъ, что для опредѣленія кривой въ пространствѣ, по которой пересѣкаются поверхности втораго порядка, проходящія черезъ восемь точекъ, восьмая точка не должна быть та, которая опредѣляется семью данными или, что всѣ восемь точекъ не должны быть тѣ, по которымъ пересѣкаются поверхности (12).

§ 509. Возьмемъ координатный тетраэдръ, пусть уравненія его граней будутъ:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{aligned}\right\}\qquad (13)$$

Если черезъ x_1, x_2, x_3, x_4 означимъ тетраэдрическія координаты, то декартовскія x, y, z выразятся въ этихъ послѣднихъ уравненіями (§ 500, 40). Если эти выраженія подставимъ вмѣсто x, y, z въ уравненіе (1), то послѣ всѣхъ приведеній оно приметъ форму:

$$f=a_{11}x_1{}^2+a_{22}x_2{}^2+a_{33}x_3{}^2+a_{44}x_4{}^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+$$
$$+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0\qquad (14)$$

Это уравненіе можно написать въ символической формѣ, какъ было показано въ § 199 (9):

$$f=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4)^2=0\qquad (15)$$

§ 510. *Задача.* Найти точки пересѣченія прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки, съ поверхностью втораго порядка?

Рѣшеніе. Пусть данныя точки будутъ:

$$(y_1y_2y_3y_4)\quad ,\quad (z_1z_2z_3z_4)$$

Всякая точка на прямой, соединяющей эти двѣ точки, будетъ дана уравненіями (§ 437):

$$\rho x_1=y_1+\lambda z_1\ ,\ \rho x_2=y_2+\lambda z_2\ ,\ \rho x_3=y_3+\lambda z_3\ ,\ \rho x_4=y_4+\lambda z_4\qquad (16)$$

Если точка $(x_1x_2x_3x_4)$ находится на поверхности, то предъидущія выраженія должны удовлетворять уравненіямъ (14) и (15).

Подставляя въ (15), найдемъ:

$$\{a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+a_4y_4+\lambda(a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3+a_4z_4)\}^2=0 \quad (17)$$

откуда, развертывая, найдемъ:

$$R\lambda^2+2Q\lambda+P=0 \quad (18)$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} P&=(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+a_4y_4)^2\\ R&=(a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3+a_4z_4)^2 \quad (19)\\ Q&=(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+a_4y_4)(a_1z_1+a_2z_2+a_3z_3+a_4z_4)\end{aligned}$$

Очевидно, что первыя два выраженія (19) суть ничто иное, какъ уравненіе (14), въ которое вмѣсто x_1, x_2, x_3, x_4 подставили y_1, y_2, y_3, y_4 и z_1, z_2, z_3, z_4, т. е:

$$P=f(y_1y_2y_3y_4) \quad , \quad R=f(z_1z_2z_3z_4) \quad (20)$$

а Q, очевидно, есть:

$$\frac{1}{2}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right) \quad \frac{1}{2}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial z_3}+y_4\frac{\partial f}{\partial z_4}\right) \quad (21)$$

Рѣшая уравненіе (18), найдемъ:

$$\lambda=-\frac{Q\mp\sqrt{Q^2-PR}}{R} \quad (22)$$

Подставляя вмѣсто λ его выраженіе въ (16), найдемъ:

$$\begin{aligned} \rho x_1&=Ry_1-(Q\mp\sqrt{Q^2-PR})z_1\\ \rho x_2&=Ry_2-(Q\mp\sqrt{Q^2-PR})z_2\\ \rho x_3&=Ry_3-(Q\mp\sqrt{Q^2-PR})z_3\\ \rho x_4&=Ry_4-(Q\mp\sqrt{Q^2-PR})z_4\end{aligned} \quad (23)$$

Откуда видно, что прямая встрѣчаетъ поверхность вторaго порядка всегда въ двухъ точкахъ дѣйствительныхъ, мнимыхъ или совпадающихъ. Общій знаменатель R вошелъ въ составъ коэфиціента пропорціональности.

Такимъ образомъ на данной прямой будемъ имѣть четыре точки: двѣ данныя и двѣ точки пересѣченія поверхности съ прямою. Если че-

резъ λ_1 и λ_2 означимъ корни уравненія (18), то ангармоническое отношеніе этихъ четырехъ точекъ будетъ или $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Если первое означимъ черезъ α_1, а второе черезъ α_2, то будемъ имѣть:

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

но λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (18), слѣдовательно:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2Q}{R} \quad , \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{P}{R}$$

откуда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{4Q^2 - 2PR}{PR}$$

но $\alpha_1 \alpha_2 = 1$, слѣдовательно α_1 и α_2 суть корни уравненія:

$$\alpha^2 - \frac{4Q^2 - 2PR}{PR}\alpha + 1 = 0 \tag{24}$$

или:

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4Q^2\alpha = 0 \tag{25}$$

Корни этого уравненія даютъ непосредственно ангармоническое отношеніе четырехъ точекъ.

Если теперь дадимъ въ уравненіи (25) ангармоническому отношенію α опредѣленное числовое значеніе и, неизмѣняя положенія точки $(y_1 y_2 y_3 y_4)$, будемъ двигать точку $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ такъ, чтобы ея координаты удовлетворяли постоянно уравненію (25), то это уравненіе будетъ представлять поверхность втораго порядка, которая будетъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, коихъ ангармоническое отношеніе съ точкою $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ и съ двумя точками пересѣченія прямой, проходящей черезъ эту точку, съ поверхностью, будетъ имѣть опредѣленное значеніе. Давая ангармоническому отношенію α различныя величины получимъ безчисленное множество поверхностей, связанныхъ съ точкою $(y_1 y_2 y_3 y_4)$. Между этой системою поверхностей будетъ одна, соотвѣтствующая значенію $\alpha = -1$, которая играетъ весьма важную роль въ изслѣдованіи поверхностей втораго порядка. Уравненіе этой поверхности есть:

$$Q^2 = 0 \quad \text{или} \quad Q = 0 \tag{26}$$

такъ какъ Q первой степени относительно перемѣнныхъ координатъ z_1, z_2, z_3, z_4:

$$Q = z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \qquad (27)$$

то это есть плоскость. Эта плоскость называется *полярной плоскостью* точки $(y_1 y_2 y_3 y_4)$, которая, по отношенію къ плоскости (27), называется *полюсомъ*.

Очевидно, полярная плоскость есть геометрическое мѣсто гармоническихъ точекъ къ тремъ точкамъ: $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ и къ двумъ точкамъ пересѣченія прямыхъ, проходящихъ черезъ точку $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ съ поверхностью. Означимъ черезъ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ координаты полярной плоскости, то будемъ имѣть:

$$\sigma\xi_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1}\ ,\quad \sigma\xi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\ ,\quad \sigma\xi_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3}\ ,\quad \sigma\xi_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_4} \qquad (28)$$

или:

$$\begin{aligned}
\sigma\xi_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 \\
\sigma\xi_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 \\
\sigma\xi_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 \\
\sigma\xi_4 &= a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4
\end{aligned} \qquad (29)$$

гдѣ $a_{i,k} = a_{k,i}$. Откуда видимъ, что каждая точка въ пространствѣ имѣетъ полярную плоскость.

Этими уравненіями выражаются координаты полярной плоскости черезъ координаты полюса и, обратно, координаты полюса выразятся черезъ координаты полярной плоскости уравненіями:

$$\begin{aligned}
\rho y_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + A_{31}\xi_3 + A_{41}\xi_4 \\
\rho y_2 &= A_{12}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{32}\xi_3 + A_{42}\xi_4 \\
\rho y_3 &= A_{13}\xi_1 + A_{23}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{43}\xi_4 \\
\rho y_4 &= A_{14}\xi_1 + A_{24}\xi_2 + A_{34}\xi_3 + A_{44}\xi_4
\end{aligned} \qquad (30)$$

если только опредѣлитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \gtrless 0 \qquad (31)$$

Но такъ какъ координаты $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ полярной плоскости могутъ быть совершенно произвольныя величины, то каждая произвольная плоскость въ пространствѣ можетъ быть полярной плоскостью полюса, коего координаты опредѣляются уравненіями (30).

§ 511. Мы видѣли, что уравненіе полярной плоскости можетъ быть написано въ двухъ формахъ:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0$$
$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0 \qquad (32)$$

изъ которыхъ видимъ, что если возьмемъ на полярной плоскости, какую нибудь, точку, то полярная плоскость этой точки пройдетъ черезъ полюсъ полярной плоскости.

Откуда вытекаетъ слѣдующее весьма важное предложеніе:

Предложеніе 1. Если точка скользитъ по данной плоскости, то полярная плоскость этой точки вращается около полюса данной плоскости.

Изъ этого предложенія вытекаетъ слѣдующее:

Предложеніе 2. Если точка скользитъ по прямой пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей, то полярная плоскость, скользящей точки, вращается около прямой, проходящей черезъ полюсы данныхъ плоскостей.

Эти двѣ прямыя такъ связаны между собою, что полярная плоскость точки на одной изъ этихъ прямыхъ проходитъ по другой. Такая пара прямыхъ линій называется *взаимными полярами* поверхности втораго порядка и легко видѣть, что произвольно взятая прямая въ пространствѣ имѣетъ свою взаимную поляру.

Легко доказать слѣдующія обратныя предложенія двумъ предъидущимъ:

Предложеніе 3. Если плоскость вращается около данной точки, то ея полюсъ скользитъ по полярной плоскости данной точки.

Предложеніе 4. Если плоскость вращается около данной прямой, то ея полюсъ скользитъ по взаимной полярѣ данной прямой.

§ 512. Смотря по положенію полюса относительно поверхности, онъ лежитъ, то ближе, то дальше отъ своей полярной плоскости; онъ лежитъ и на самой полярной плоскости.

Чтобы полюсъ $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$ находился на своей полярной поверхности:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \qquad (33)$$

надобно, чтобы координаты y_1, y_2, y_3, y_4 полюса удовлетворяли предъидущему уравненію, т. е. чтобы:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \qquad (34)$$

но это уравненіе есть ничто *иное* какъ:

$$f(y_1 y_2 y_3 y_4) = 0$$

т. е. полюсъ есть точка на поверхности; слѣдовательно, если полюсъ есть точка на поверхности, то онъ лежитъ въ своей полярной плоскости.

Въ этомъ случаѣ, полярная плоскость имѣетъ замѣчательныя свойства.

Возьмемъ, какую нибудь, точку на полярной плоскости, коей полюсъ находится на поверхности, соединимъ эту точку съ полюсомъ, то по свойству полюса и полярной плоскости эти двѣ точки будутъ сопряженно-гармоническія съ точками пересѣченія, проведенной прямой съ поверхностью; но полюсъ совпадаетъ съ одною изъ точекъ пересѣченія прямой съ поверхностью, а потому и вторая точка пересѣченія совпадаетъ съ полюсомъ. Слѣдовательно прямая, соединяющая, какую нибудь, точку полярной плоскости съ ея полюсомъ, лежащимъ на поверхности, пересѣкаетъ поверхность въ двухъ совпадающихъ точкахъ. Такая прямая называется *касательной къ поверхности* въ точкѣ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$. Слѣдовательно полярная плоскость точки $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ на поверхности, есть геометрическое мѣсто касательныхъ къ поверхности въ точкѣ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$. Въ этомъ случаѣ поляриая плоскость называется *касательной плоскостью* къ поверхности, коей полюсъ есть точка касанія.

Слѣдовательно:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0 \qquad (35)$$

будетъ уравненіе касательной плоскости, если точка $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ лежитъ на поверхности.

§ 513. Если, какая-нибудь, плоскость A, коей полюсъ есть P, пересѣкаетъ поверхность втораго порядка, то касательная плоскость къ поверхности въ точкѣ O, взятой на кривой пересѣченія плоскости A съ поверхностью, пройдетъ черезъ точку P, такъ какъ касательная плоскость есть полярная точки O, слѣдовательно прямая PO касается поверхности. Откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе.

Предложеніе. Если полюсъ, какой-нибудь, плоскости соединимъ прямою линіей съ какой-нибудь, точкой кривой пересѣченія плоскости съ поверхностью, то эта прямая будетъ касательная къ поверхности.

Слѣдовательно, всѣ прямыя, соединяющія, какую-нибудь точку съ точками кривой пересѣченія полярной плоскости взятой точки съ поверхностью втораго порядка, суть касательныя къ поверхности. Геометрическое мѣсто этихъ касательныхъ есть, очевидно, конусъ, который называется *касательнымъ конусомъ* къ поверхности. Слѣдовательно касательный конусъ касается поверхности по кривой, по которой полярная плоскость его вершины, пересѣкается съ поверхностью.

§ 514. *Касательная плоскость.* Мы выше видѣли, что если точка $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ находится на поверхности, то уравненіе касательной будетъ:

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0$$

Если вспомнимъ, что:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 2f(y_1 y_2 y_3 y_4) = 0$$

то, вычитая это уравненіе изъ предъидущаго, найдемъ:

$$(z_1 - y_1) \frac{yf}{\partial y_1} + (z_2 - y_2) \frac{\partial f}{\partial y_2} + (z_3 - y_3) \frac{\partial f}{\partial y_3} + (z_4 - y_4) \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0$$

Чтобы, перейти отъ тетраэдрической системы координатъ къ декартовой, выдѣли выше (§ 501), что надобно сдѣлать:

$$\rho z_1 = x \quad , \quad \rho z_2 = y \quad , \quad \rho z_3 = z \quad , \quad \rho z_4 = 1$$

$$\rho y_1 = x_1 \quad , \quad \rho y_2 = y_1 \quad , \quad \rho y_3 = z_1 \quad , \quad \rho y_4 = 1$$

что даетъ:

$$(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + (z - z_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \qquad (36)$$

Это уравненіе касательной плоскости въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ къ поверхности втораго порядка:

$$f(x\, y\, z) = 0$$

§ 515. Касательная плоскость къ поверхности втораго порядка $f=0$ въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ есть:

$$(x - x_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (y - y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} + (z - z_1) \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \qquad (37)$$

слѣдовательно косинусы угловъ, которые перпендикуляръ къ касательной плоскости составляетъ съ координатными осями, будутъ (§ 441):

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}} \tag{38}$$

Уравненіе перпендикуляра къ касательной плоскости въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ будетъ (§ 457, зад. 4):

$$\frac{(x-x_1)}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{(y-y_1)}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} = \frac{(z-z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \tag{39}$$

Этотъ перпендикуляръ называется *нормалью* къ поверхности въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$.

§ 516. Мы выше видѣли (§ 510), что координаты полярной плоскости ξ и координаты ея полюса y связаны уравненіями:

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \sigma\xi_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \sigma\xi_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3} \\ \sigma\xi_4 &= a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_4} \end{aligned} \tag{40}$$

уравненіе той-же полярной плоскости будетъ:

$$\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4 = 0 \tag{41}$$

Если полюсъ будетъ на поверхности, то полярная плоскость, какъ мы видѣли (§ 511), будетъ касательная къ поверхности и ея уравненіе будетъ:

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 = 0 \tag{42}$$

Исключая изъ уравненій (40) и (42) y_1, y_2, y_3, y_4, найдемъ условіе, которому

должны удовлетворять координаты ξ плоскости, чтобы она, во всѣхъ своихъ положеніяхъ, касалась поверхности втораго порядка (1). Это условіе есть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} & a_{24} & \xi_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \xi_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \xi_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 = F(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4) \tag{43}$$

§ 517. Если при этихъ условіяхъ, т. е. полагая точку $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ на поверхности, исключимъ $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4$ изъ уравненій (30) и (42), то найдемъ уравненіе поверхности втораго порядка, выраженное въ формѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 = f(x_1 x_2 x_3 x_4) \tag{44}$$

гдѣ поставлены вмѣсто y, какъ перемѣнныя, координаты x.

Уравненія (43) и (44) представляютъ поверхности втораго порядка, второе въ декартовыхъ координатахъ, а первое въ плоскостныхъ.

ГЛАВА XXXIII.

Общія свойства поверхностей втораго порядка въ плоскостныхъ координатахъ.

§ 518. Въ предъидущей главѣ (§ 516, 43) мы нашли уравненіе между плоскостными координатами, которое выражаетъ, что плоскость, коей координаты удовлетворяютъ этому уравненію, касается поверхности втораго порядка. Это уравненіе можетъ служить аналитическимъ представленіемъ поверхности, которая и можетъ быть изслѣдована съ этой точки зрѣнія.

Пусть это уравненіе будетъ:

$$F(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) = 0 \tag{1}$$

Оно имѣетъ такую же форму относительно координатъ ξ, какъ и уравненіе (§ 509, 14) относительно координатъ x, именно:

$$F = A_{11}\xi^2_1 + A_{22}\xi^2_2 + A_{33}\xi^2_3 + A_{44}\xi^2_4 +$$
$$+ 2A_{12}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{14}\xi_1\xi_4 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + 2A_{34}\xi_3\xi_4 = 0 \qquad (2)$$

въ немъ десять членовъ, слѣдовательно и десять коэфиціентовъ. Если положимъ:

$$\sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = \zeta \quad , \quad \sigma\xi_4 = 1$$

то оно преобразуется въ форму, соотвѣтствующую формѣ уравненія въ декартовыхъ координатахъ:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0 \qquad (3)$$

Въ этой формѣ мы сначала и изслѣдуемъ общія свойства поверхности.

Одинъ изъ десяти коэфиціентовъ въ уравненіи (3) можно сдѣлать равнымъ единицѣ, раздѣливъ на него всѣ остальные; слѣдовательно, уравненіе будетъ содержать девять коэфиціентовъ, входящихъ въ него линейно, которыхъ числовыя значенія опредѣлятъ свойства и образъ поверхности.

§ 519. Если поверхность втораго порядка касается плоскости, данной координатами, то девять коэфиціентовъ уравненія поверхности должны удовлетворять линейному уравненію, которое получится, если координаты данной плоскости вставить въ уравненіе поверхности. Девять такихъ условій дадутъ девять линейныхъ уравненій между коэфиціентами уравненія поверхности, изъ которыхъ опредѣлятся всѣ девять коэфиціентовъ.

Слѣдовательно, поверхность втораго порядка девятью, произвольно выбранными, касательными плоскостями вполнѣ опредѣляется. Восемь касательныхъ плоскостей къ поверхности втораго порядка не вполнѣ ее опредѣляютъ, такъ какъ между девятью коэфиціентами будетъ существовать, въ этомъ случаѣ, только восемь линейныхъ уравненій, изъ которыхъ восемь коэфиціентовъ опредѣлятся черезъ девятый, который останется совершенно произвольнымъ. Пусть этотъ девятый коэфиціентъ будетъ λ, то форма всѣхъ остальныхъ будетъ $a + b\lambda$. Подставляя это выраженіе восьми коэфиціентовъ въ уравненіе (3), найдемъ общую форму уравненія всѣхъ поверхностей втораго порядка, которыя касаются восьми данныхъ плоскостей. Форма эта, очевидно, есть:

$$\Phi(\xi\,\eta\,\zeta) - \lambda\psi(\xi\,\eta\,\zeta) = 0 \qquad (4)$$

Между этими поверхностями находятся и поверхности:

$$\Phi(\xi\,\eta\,\zeta) = 0 \quad , \quad \psi(\xi\,\eta\,\zeta) = 0 \qquad (5)$$

когда $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

Обѣ поверхности (5) имѣютъ безчисленное множество общихъ касательныхъ плоскостей, коихъ координаты, одновременно, удовлетворяютъ оба уравненія (5). Но такъ какъ плоскостныя координаты, удовлетворяющія оба уравненія (5), удовлетворяютъ и уравненіе (4), то имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Всѣ поверхности втораго порядка, касающіяся восьми данныхъ плоскостей, будутъ касаться всѣхъ общихъ касательныхъ плоскостей къ двумъ поверхностямъ (5).

Слѣдовательно, если поверхность втораго порядка должна опредѣлятся девятью касательными плоскостями, то онѣ не должны касаться одновременно поверхностей (5).

Частный случай поверхности втораго порядка есть пара точекъ или поверхность въ видѣ отрѣзка прямой между парою точекъ. И въ самомъ дѣлѣ, если:

$$A=0 \quad , \quad B=0 \tag{6}$$

суть уравненія двухъ точекъ, то:

$$A.B=0 \tag{7}$$

будетъ второй степени и представляетъ поверхность втораго порядка.

Если:

$$F(\xi\eta\zeta)=0 \tag{8}$$

будетъ уравненіе въ плоскостныхъ координатахъ, данной поверхности, то общее уравненіе всѣхъ поверхностей втораго порядка, къ которымъ касаются всѣ касательныя плоскости къ поверхности (8), проходящія черезъ одну или черезъ другую изъ точекъ (6), есть:

$$F-\lambda A.B=0 \tag{9}$$

Другими словами, уравненіе (9), съ произвольнымъ коэфиціентомъ λ, представляетъ всевозможныя поверхности втораго порядка, которыя кругомъ обвертываютъ оба касательныя конуса къ поверхности F, коихъ вершины находятся въ точкахъ (6). Поэтому, если $\Phi=0$, есть уравненіе поверхности втораго порядка, которая кругомъ обвертываетъ каждый изъ выше упомянутыхъ конусовъ, то можно всегда опредѣлить два коэфиціента λ и μ такъ, чтобы:

$$F-\lambda.AB-\mu\Phi \tag{10}$$

Если положимъ, что F и A даны, то уравненіе (9) съ четырьмя произвольными коэфиціентами въ $\lambda.B$ представляетъ поверхность втораго порядка, которая касается касательнаго конуса къ поверхности $F=0$, коего вершина находится въ точкѣ $A=0$.

Ниже мы увидимъ, что касательный конусъ къ поверхности втораго порядка, исходящій изъ, какой-нибудь, точки, опредѣляется вполнѣ пятью его касательными плоскостями.

Поэтому, если будетъ дана точка $A=0$ и поверхность $F=0$, то касательный конусъ къ поверхности $F=0$, исходящій изъ точки $A=0$, пятью касательными къ нему плоскостями, а слѣдовательно и къ поверхности, вполнѣ опредѣляется. Но поверхность $F=0$ этими пятью касательными плоскостями вполнѣ не опредѣляется, а пять касательныхъ плоскостей даютъ пять линейныхъ уравненій между коэфиціентами уравненія поверхности, а слѣдовательно въ этомъ уравненіи будетъ еще содержатся четыре произвольные коэфиціента въ линейной формѣ.

Въ уравненіи:

$$F-\lambda A.B=0 \tag{11}$$

пять коэфиціентовъ удовлетворяютъ пяти линейнымъ уравненіямъ, а четыре въ $\lambda.B$ еще остаются произвольными; слѣдовательно оно представляетъ всѣ поверхности втораго порядка, къ которымъ касается конусъ, имѣющій вершину въ точкѣ $A=0$ и касающійся поверхности $F=0$.

Если теперь будутъ уравненія:

$$F=0 \quad , \quad \Phi=0$$

двухъ поверхностей втораго порядка, которыя имѣютъ общій касательный конусъ, исходящій изъ точки $A=0$, то всегда можно опредѣлить μ и четыре коэфиціента въ $\lambda.B$ такъ, чтобы:

$$F-\mu\Phi=\lambda A.B \tag{12}$$

откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если двѣ поверхности втораго порядка обвернуты однимъ касательнымъ конусомъ, то онѣ будутъ обвернуты еще и другимъ конусомъ.

§ 520. Если даны, координатами, семь касательныхъ плоскостей къ поверхности втораго порядка $F=0$, то будемъ имѣть семь линейныхъ уравненій между девятью его коэфиціентами, слѣдовательно эти семь могутъ быть выражены линейно двумя произвольными, которые назовемъ черезъ λ и μ. Общая форма коэфиціентовъ будетъ $a+\lambda b+\mu c$, подставляя ихъ выраженія въ уравненіе данной поверхности, найдемъ самую общую форму поверхности втораго порядка, которая касается семи данныхъ плоскостей:

$$\Phi_1+\lambda\Phi_2+\mu\Phi_3=0 \tag{13}$$

Это уравненіе составлено изъ уравненій трехъ поверхностей втораго порядка:

$$\Phi_1 = 0 \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = 0 \tag{14}$$

и будетъ удовлетворятся каждой системой плоскостныхъ координатъ, удовлетворяющихъ предъидущія три уравненія, т. е. общія касательныя плоскости къ тремъ поверхностямъ (14) будутъ касаться и поверхности (13).

Такъ какъ уравненія (14), каждое второй степени, то существуетъ восемь системъ плоскостныхъ координатъ, удовлетворяющихъ эти уравненія, слѣдовательно существуетъ восемь общихъ касательныхъ къ поверхностямъ (14). Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Всѣ поверхности втораго порядка, касающіяся семи данныхъ плоскостей, касаются еще и восьмой, которая опредѣляется семью данными.

Слѣдовательно если дано восемь такихъ плоскостей, для построенія поверхности втораго порадка, то онѣ равносильны только семи изъ нихъ.

§ 521. Отнесемъ теперь поверхность втораго порядка, выраженную въ плоскостныхъ координатахъ, къ вершинамъ тетраэдра, коего грани суть (§ 498, 26), а вершины (§ 498, 28).

Для этого мы должны положить (§ 500, 40') въ уравненіи (3) § 518:

$$\xi = \frac{a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4}{d_1\xi_1 + d_2\xi_2 + d_3\xi_3 + d_4\xi_4}$$

$$\eta = \frac{b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 + b_4\xi_4}{d_1\xi_1 + d_2\xi_2 + d_3\xi_3 + d_4\xi_4}$$

$$\zeta = \frac{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 + c_4\xi_4}{d_1\xi_1 + d_2\xi_2 + d_3\xi_3 + d_4\xi_4}$$

откуда, послѣ всѣхъ преобразованій, найдемъ:

$$F(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + A_{44}\xi_4^2 +$$

$$+2A_{12}\xi_1\xi_3 + 2A_{13}\xi_1\xi_3 + 2A_{14}\xi_1\xi_4 + 2A_{23}\xi_2\xi_3 + 2A_{24}\xi_2\xi_4 + 2A_{34}\xi_3\xi_4 = 0 \tag{16}$$

или въ символической формѣ:

$$F(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) = (A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 + A_4\xi_4)^2 = 0 \tag{17}$$

§ 522. *Задача.* Найти касательныя плоскости къ поверхности втораго порядка, проходящія черезъ пересѣченіе двухъ данныхъ, координатами, плоскостей?

Рѣшенiе. Пусть координаты двухъ данныхъ плоскостей будутъ:

$$(\eta_1\,\eta_2\,\eta_3\,\eta_4) \quad , \quad (\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3\,\zeta_4) \tag{18}$$

Координаты, какой нибудь, плоскости, проходящей черезъ пересѣченiе данныхъ двухъ плоскостей, будутъ (§ 504):

$$\sigma\xi_1 = \eta_1 + \lambda\zeta_1 \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta_2 + \lambda\zeta_2 \quad , \quad \sigma\xi_3 = \eta_3 + \lambda\zeta_3 \quad , \quad \sigma\xi_4 = \eta_4 + \lambda\zeta_4 \tag{19}$$

Если плоскость, коей координаты суть (18), касается поверхности (16) или (17), то выраженiя (19) должны удовлетворять уравненiю (17); слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\left\{A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + A_4\eta_4 + \lambda(A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3 + A_4\zeta_4)\right\}^2 = 0$$

откуда:

$$R\lambda^2 + 2Q\lambda + P = 0 \tag{20}$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} P &= (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + A_4\eta_4)^2 \\ R &= (A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3 + A_4\zeta_4)^2 \\ Q &= (A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + A_4\eta_4)(A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3 + A_4\zeta_4) \end{aligned} \tag{21}$$

т. е. R и P суть значенiя функцiи (16), когда въ нее подставили координаты данныхъ плоскостей, а:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\left(\eta_1\frac{\partial F}{\partial\zeta_1} + \eta_2\frac{\partial F}{\partial\zeta_2} + \eta_3\frac{\partial F}{\partial\zeta_3} + \eta_4\frac{\partial F}{\partial\zeta_4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\zeta_1\frac{\partial F}{\partial\eta_1} + \zeta_2\frac{\partial F}{\partial\eta_2} + \zeta_3\frac{\partial F}{\partial\eta_3} + \zeta_4\frac{\partial F}{\partial\eta_4}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Такъ какъ λ опредѣляется квадратнымъ уравненiемъ (20), то черезъ пересѣченiе двухъ данныхъ плоскостей можно провести двѣ касательныя плоскости къ поверхности, дѣйствительныя или мнимыя.

Опредѣляя λ изъ уравненiя (20), и вставляя въ (19), найдемъ:

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= R\eta_1 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\zeta_1 \\ \sigma\xi_2 &= R\eta_2 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\zeta_2 \\ \sigma\xi_3 &= R\quad - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\zeta_3 \\ \sigma\xi_4 &= R\eta_4 - (Q \mp \sqrt{Q^2 - PR})\zeta_4 \end{aligned} \tag{23}$$

Ангармоническое отношенiе четырехъ плоскостей: двухъ данныхъ и двухъ

найденныхъ касательныхъ къ поверхности, будетъ или $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ или $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, если λ_1 и λ_2 суть корни уравненія (20).

Положимъ:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \alpha_1 \quad ; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \alpha_2$$

то будемъ имѣть:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2Q}{R} \quad , \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{P}{R}$$

откуда:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{4Q^2 - 2PR}{PR} \quad , \quad \alpha_1\alpha_2 = 1$$

Слѣдовательно α_1 и α_2 будутъ корнями уравненія:

$$\alpha^2 - \frac{4Q^2 - 2PR}{PR}\alpha + 1 = 0 \tag{24}$$

или:

$$(\alpha + 1)^2 PR - 4Q^2\alpha = 0 \tag{25}$$

Корни этого уравненія дадутъ ангармоническое отношеніе четырехъ плоскостей.

Если въ уравненіе (25) дадимъ ангармоническому отношенію α опредѣленное числовое значеніе, сдѣлаемъ координаты одной изъ двухъ данныхъ плоскостей, напримѣръ $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, постоянными, а координаты $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ другой будемъ такъ измѣнять, чтобы онѣ постоянно удовлетворяли уравненіе (25), то оно будетъ представлять поверхность втораго порядка, такъ какъ уравненіе (25), относительно координатъ ζ, второй степени. Такимъ образомъ, измѣняя α, получимъ систему поверхностей втораго порядка, связанныхъ извѣстнымъ образомъ съ данною поверхностью и съ данною плоскостью. Самая замѣчательная изъ этой системы поверхностей та, которая соотвѣтствуетъ значенію $\alpha = -1$, т. е., когда четыре, выше опредѣленныя, плоскости, суть гармоническія.

При этомъ значеніи α уравненіе (25) обращается въ:

$$Q^2 = 0 \quad \text{или} \quad Q = 0$$

или

$$\zeta_1\frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \zeta_2\frac{\partial F}{\partial \eta_2} + \zeta_2\frac{\partial F}{\partial \eta_3} + \zeta_4\frac{\partial F}{\partial \eta_4} = 0 \tag{26}$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\eta_1\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} + \eta_2\frac{\partial F}{\partial \zeta_2} + \eta_3\frac{\partial F}{\partial \zeta_3} + \eta_4\frac{\partial F}{\partial \zeta_4} = 0 \tag{27}$$

Въ этомъ уравненіи координаты η суть постоянныя, а ζ перемѣнныя, и какъ это уравненіе относительно ζ и η первой степени, то оно представляетъ точку, коей координаты суть:

$$\rho y_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \eta_1}\quad,\quad \rho y_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \eta_2}\quad,\quad \rho y_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\sigma \eta_3}\quad,\quad \rho y_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\sigma \eta_4} \tag{28}$$

или:

$$\begin{aligned} \rho y_1 &= A_{11}\eta_1 + A_{12}\eta_2 + A_{13}\eta_3 + A_{14}\eta_4 \\ \rho y_2 &= A_{21}\eta_1 + A_{22}\eta_2 + A_{23}\eta_3 + A_{24}\eta_4 \\ \rho y_3 &= A_{31}\eta_1 + A_{32}\eta_2 + A_{33}\eta_3 + A_{34}\eta_4 \\ \rho y_4 &= A_{41}\eta_1 + A_{42}\eta_2 + A_{43}\eta_3 + A_{44}\eta_4 \end{aligned} \tag{29}$$

откуда, обратно:

$$\begin{aligned} \sigma\eta_1 &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 \\ \sigma\eta_2 &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 \\ \sigma\eta_3 &= a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 + a_{43}y_4 \\ \sigma\eta_4 &= a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4 \end{aligned} \tag{30}$$

гдѣ $A_{i,k}$ суть миноры опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \Delta \tag{31}$$

если F есть выраженіе (43) § 516. Опредѣлитель $\Delta \gtrless 0$.

Уравненіе (26) показываетъ, что всѣ плоскости четвертыя гармоническія къ данной плоскости и къ двумъ касательнымъ плоскостямъ, проходятъ черезъ одну точку, коей координаты даны уравненіями (29). Данная координатами η плоскость, называется *полярной* плоскостью точки y, а точка, данная координатами y, называется *полюсомъ* плоскости η. Уравненія (29) и (30) показываютъ, что плоскость η и точка y суть полярная плоскость и ея полюсъ, свойства которыхъ мы уже частью разсмотрѣли въ § 510—513.

Откуда имѣемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Плоскость четвертая гармоническая данной плоскости, относительно поверхности втораго порядка, проходитъ черезъ полюсъ данной полярной плоскости,

Изъ уравненій (26) и (27) видимъ, что полюсъ одной изъ двухъ гармоническихъ плоскостей, лежитъ въ другой. Пара такихъ плоскостей называется *полярными гармоническими* плоскостями.

Изъ уравненій (26), (27) и (29), (30) слѣдуетъ:

Что полюсы пары гармоническихъ плоскостей суть гармоническія полюсы поверхмостей втораго порядка, а полярныя плоскости пары гармоническихъ полюсовъ суть гармоническія полярмыя плоскости поверхности втораго порядка.

§ 523. Если координаты полюса, выраженныя координатами полярной плоскости (26), поверхности втораго порядка:

$$\rho y_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_1} \quad , \quad \rho y_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_2} \quad , \quad \rho y_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_3} \quad , \quad \rho y_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_4}$$

вставить въ уравненіе другой поверхности втораго порядка:

$$\Phi(y_1\, y_2\, y_3\, y_4) = 0$$

то получимъ третью поверхность втораго порядка въ плоскостныхъ координатахъ:

$$\Phi\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_1}\, ,\, \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_2}\, ,\, \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_3}\, ,\, \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \xi_4}\right\} = 0$$

Если же, обратно, мы въ уравненіи поверхности втораго порадка въ плоскостныхъ координатахъ:

$$\varphi(\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4) = 0$$

вставимъ ихъ выраженія въ координатахъ полюса (30):

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad , \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} \quad , \quad \xi_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} \quad , \quad \xi_4 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4}$$

то получимъ третее уравненіе поверхности втораго порядка въ тетраэдрическихъ координатахъ:

$$\varphi\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\, ,\, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\, ,\, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3}\, ,\, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4}\right\} = 0$$

Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если полюсъ данной поверхности втораго порядка перемѣщается по другой поверхности, также втораго порядка, то его полярная плоскость касается третьей поверхности втораго порядка, и, обратно, если полярная плоскость данной поверхности втораго порядка, ка-

сается другой поверхности втораго порядка, то ея полюсъ перемѣщается по третьей поверхности втораго порядка.

Вторая и третяя поверхность совпадаютъ съ данною, если полюсъ перемѣщается по данной поверхности, или если полярная плоскость ея касается.

Изъ предъидущаго непосредственно слѣдуютъ еще слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Ангармоническое отношеніе четырахъ точекъ на одной прямой линіи, равно ангармоническому отношенію ихъ полярныхъ плоскостей.

Предложеніе 2. Ангармоническое отношеніе четырехъ плюскостей, которыя пересѣкаются по одной прямой линіи, равно ангармоническому отношенію ихъ полюсовъ.

Предложеніе 3. Полярныя плоскости гармоническихъ точекъ суть гармоничны.

Предложеніе 4. Полюсы четырехъ гармоническихъ плоскостей, гармоничны.

Предложеніе 5. Полярныя плоскости, трехъ паръ инволюціонныхъ точекъ, составляютъ инволюцію.

Предложеніе 6. Полюсы трехъ паръ инволюціонныхъ плоскостей, составляютъ инволюцію.

§ 524. Изъ свойства взаимныхъ поляръ (§ 511) поверхности втораго порядка вытекаютъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Всякая прямая линія, пересѣкающая двѣ взаимныя поляры поверхности втораго порядка, встрѣчаетъ поверхность въ двухъ точкахъ гармоническихъ съ точками ея встрѣчи съ взаимными полярами.

Такъ какъ полярныя плоскости, всѣхъ точекъ, находящихся въ одной плоскости, пересѣкаются въ полюсѣ этой послѣдней плоскости, то полярная плоскость точки, находящейся на пересѣченіи двухъ прямыхъ въ данной плоскости, проходитъ черезъ полюсъ этой плоскости. Откуда слѣдуетъ:

Предложеніе 2. Если двѣ прямыя линіи въ пространствѣ пересѣкаются, то пересѣкаются и ихъ взаимныя поляры въ точкѣ, которая есть полюсъ плоскости двухъ данныхъ прямыхъ и обратно, точка пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ есть полюсъ плоскости, въ которой находятся ихъ взаимныя поляры.

Предложеніе 3. Если прямая линія описываетъ, какимъ-бы то нибыло образомъ, плоскость, то ея взаимная поляра вращается около полюса, описываемой прямою плоскости.

Предложеніе 4. Если прямая вращается около одной точки, то ея взаимная поляра описываетъ плоскость, которой данная точка есть полюсъ.

Предложеніе 5. Если прямая линія въ одной плоскости вращается около одной точки, то ея взаимная поляра вращается около полюса первой въ полярной плоскости точки вращенія первой прямой.

§ 525. Такъ какъ взаимная поляра данной прямой линіи находится въ полярной плоскости, какой нибудь, точки дамной прямой (§ 511), то взаимная поляра касательной къ поверхности втораго порядка, лежитъ въ касательной плоскости, проведенной въ точкѣ касанія касательной. Слѣдовательно, взаимная поляра касательной къ поверхности втораго порядка есть также касательная къ поверхности въ той-же точкѣ.

Изъ выше сказаннаго и изъ предъидущихъ предложеній вытекаютъ слѣдующія:

Предложеніе 1. Если прямая линія движется, касаясь плоской кривой на поверхности втораго порядка, то ея взаимная поляра опишетъ конусъ, который обвертываетъ поверхность, касаясь ея по плоской кривой, и обратно, если прямая, касаясь поверхности втораго порядка описываетъ конусъ, то ея взаимная поляра касается плоской кривой, по которой конусъ соприкасается съ поверхностью.

Предложеніе 2. Если прямая линія движется, касаясь поверхности втораго порядка, отличной отъ основной поверхности, то ея взаимная поляра, перемѣщаясь, касается третьей поверхности втораго порядка, которой касаются полярныя плоскости точекъ второй поверхности.

Если полюсъ описываетъ вторую поверхность втораго порядка, то его полярная плоскость касается третьей поверхности втораго порядка (§ 523).

Касательная линія ко второй поверхности есть линія, соединяющая двѣ безконечно близкія точки на поверхности, ихъ полярныя плоскости, которыя касаются третьей поверхности, лежатъ также безконечно близко и пересѣкаются по касательной къ поверхности. Эта касательная есть взаимная поляра, вышеупомянутой касательной ко второй поверхности.

§ 526. *Методъ взаимныхъ поляръ.* Изъ свойствъ полюса и полярной плоскости относительно поверхности втораго порядка вытекаетъ методъ изслѣдованія кривыхъ поверхностей втораго порядка, который извѣстенъ подъ именемъ *метода взаимности* или *метода взаимныхъ поляръ.*

Онъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Всякая фигура въ пространствѣ, состоящая изъ точекъ, прямыхъ линій, кривыхъ, плоскостей и поверхностей можетъ быть образована точкою или плоскостью. Если выберемъ точку, какъ элементъ образованія фигуръ, то каждая фигура есть собраніе точекъ, которыя на ней находятся.

Если выберемъ плоскость, какъ элементъ образованія фигуръ, то точка есть собраніе плоскостей, черезъ нее проходящихъ; прямая линія есть собраніе всѣхъ плоскостей, по ней пересѣкающихся; кривая есть собраніе плоскостей, пересѣкающихся по ея касательнымъ; наконецъ, поверхность есть собраніе всѣхъ касательныхъ къ ней плоскостей.

Возьмемъ, какую-нибудь, поверхность втораго порядка и назовемъ ее *директрисой* и будемъ разсматривать каждую точку данной фигуры въ пространствѣ, какъ полюсъ нѣкоторой плоскости, относительно директрисы, а каждую плоскость, какъ полярную плоскость, нѣкоторой точки относительно той-же директрисы. Такимъ образомъ, каждой точкѣ данной фигуры будетъ соотвѣтствовать плоскость, а каждой плоскости будетъ соотвѣтствовать точка. Эти соотвѣтственныя плоскости и точки образуютъ вторую фигуру, которая называется *взаимной* данной, относительно директрисы. Слѣдовательно каждой точкѣ данной фигуры соотвѣтствуетъ плоскость взаимной фигуры; каждой плоскости данной фигуры соотвѣтствуетъ точка взаимной; каждой прямой, данной фигуры, соотвѣтствуетъ прямая, взаимной; каждой кривой данной фигуры соотвѣтствуетъ кривая взаимной, и наконецъ, каждой поверхности данной фигуры соотвѣтствуетъ поверхность взаимной.

Обратно, каждой точкѣ взаимной фигуры, соотвѣтствуетъ плоскость данной; каждой плоскости взаимной соотвѣтствуетъ точка данной; каждой прямой линіи взаимной фигуры, соотвѣтствуетъ прямая данной фигуры; каждой кривой взаимной, соотвѣтствуетъ кривая данной фигуры и наконецъ, каждой поверхности взаимной фигуры соотвѣтствуетъ поверхность данной, т. е. данная фигура есть взаимная ея взаимной. Такимъ образомъ, каждое свойство данной фигуры, относительно положенія ея составныхъ частей, обусловливаетъ соотвѣтственное свойство взаимной фигуры. Однимъ словомъ, изъ каждаго предложенія относительно положенія частей данной фигуры слѣдуетъ предложеніе относительно соотвѣтственныхъ частей взаимной фигуры.

Пояснимъ это начало простымъ примѣромъ; выберемъ для этого слѣдующее предложеніе: три поверхности втораго порядка пересѣкаются въ восьми точкахъ.

Тремъ поверхностямъ втораго порядка данной фигуры, соотвѣтствуютъ три поверхности втораго порядка взаимной фигуры. Каждой точкѣ одной изъ данныхъ поверхностей соотвѣтствуетъ касательная плоскость взаимной поверхности. Каждой точкѣ, лежащей на всѣхъ трехъ данныхъ поверхностяхъ, соотвѣтствуетъ плоскость, которая касается всѣхъ трехъ взаимныхъ поверхностей. Слѣдовательно число точекъ пересѣченія трехъ данныхъ поверхностей равно числу общихъ касательныхъ плоскостей къ

тремъ взаимнымъ поверхностямъ. Если бы три взаимныя поверхности имѣли еще и девятую общую касательную плоскость, то мы, обратно, заключили-бы, что данныя поверхности пересѣкаются еще и въ девятой точкѣ. Слѣдовательно три поверхности втораго порядка имѣютъ восемь общихъ касательныхъ плоскостей.

Легко видѣть, что методъ взаимныхъ поляръ есть только частный случай двойственности, гдѣ точка опредѣляется разъ координатами, а другой разъ уравненіемъ также какъ и плоскость.

Переходъ отъ даннаго продложенія къ взаимному, дѣлается замѣщая слова: точка, прямая, плоскость, словами: плоскость прямая, точка.

Пояснимъ сказанное выше простыми примѣрами:

Предложеніе 1. Если пара точекъ есть пара гармоническихъ полюсовъ къ каждой изъ двухъ данныхъ поверхностей втораго порядка, то эта пара будетъ пара гармоническихъ полюсовъ, относительно всѣхъ поверхностей втораго порядка, проходящихъ черезъ кривую пересѣченія двухъ данныхъ поверхностей.

Это предложеніе можно доказать на основаніи § 177.

Предложеніе 1'. Если пара плоскостей есть пара гармоническихъ плоскостей къ каждой изъ двухъ данныхъ поверхностей втораго порядка, то эта пара будетъ гармоническая и къ каждой поверхности втораго порядка, которая касается всѣхъ общихъ касательныхъ плоскостей къ даннымъ двумъ поверхностямъ.

Предложеніе 2. Всякая прямая линія пересѣкаетъ три поверхности втораго порядка, изъ коихъ одна проходитъ черезъ кривую пересѣченія двухъ другихъ въ шести точкахъ, которыя составляютъ инволюціонный рядъ. Это предложеніе непосредственно слѣдуетъ изъ предъидущаго и изъ § 178.

Предложеніе 2'. Если черезъ, какую нибудь, прямую линію проведены касательныя плоскости къ тремъ поверхностямъ втораго порядка, изъ коихъ одна касается всѣхъ общихъ касательныхъ плоскостей, къ другимъ двумъ, то шесть плоскостей составляютъ инволюціонную связку.

Предложеніе 3. Всѣ полярныя плоскости данной точки относительно системы поверхностей втораго порядка, проходящихъ черезъ восемь данныхъ точекъ въ пространствѣ, пересѣкаются по одной прямой.

Это предложеніе слѣдуетъ изъ § 506.

Предложеніе 3'. Всѣ полюсы данной плоскости, относительно системы поверхностей втораго порядка, касающихся восьми данныхъ плоскостей, лежатъ на одной прямой линіи.

Предложеніе 4. Всѣ полярныя плоскости данной точки, относительно системы поверхностей втораго порядка, проходящихъ черезъ семь данныхъ точекъ въ пространствѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Предложеніе 4'. Всѣ полюсы данной плоскости, относительно системы поверхностей втораго порядка, касающихся семи данныхъ плоскостей, лежатъ на одной плоскости.

ГЛАВА XXXIV.

Роды поверхностей втораго порядка и первоначальныя ихъ свойства.

§ 527. Уравненіе поверхности втораго порядка въ тетраэдрическихъ координатахъ, какъ видѣли выше, есть:

$$f(x_1x_2x_3x_4)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+$$
$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0 \quad (1)$$

а тоже уравненіе въ плоскостныхъ тетраэдрическихъ координатахъ будетъ (§ 516, 43):

$$F(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)=A_{11}\xi_1^2+A_{22}\xi_2^2+A_{33}\xi_3^2+A_{44}\xi_4^2+$$
$$+2A_{12}\xi_1\xi_2+2A_{13}\xi_1\xi_3+2A_{14}\xi_1\xi_4+2A_{23}\xi_2\xi_3+2A_{24}\xi_2\xi_4+2A_{34}\xi_3\xi_4=0 \quad (2)$$

гдѣ $A_{i,k}$ суть миноры опредѣлителя (§ 510, 31).

Если y_1, y_2, y_3, y_4 суть координаты полюса, то уравненіе полярной плоскости будетъ (§ 510):

$$x_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial y_4}=0 \quad (3)$$

Если полюсъ находится на поверхности, то y_1, y_2, y_3, y_4 должны удовлетворять уравненіе (1) поверхности.

Координаты полярной или касательной плоскости опредѣляются уравненіями:

$$\xi_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1}\quad,\quad \xi_2=\frac{1}{1}\frac{\partial f}{\partial y_2}\quad,\quad \xi_3=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_3}\quad,\quad \xi_4=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_4} \quad (4)$$

Если $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ суть координаты полярной плоскости, то уравненіе полюса (§ 522) будетъ:

$$\xi_1\frac{\partial F}{\partial \eta_1}+\xi_2\frac{\partial F}{\partial \eta_2}+\xi_3\frac{\partial F}{\partial \eta_3}+\xi_4\frac{\partial F}{\partial \eta_4}=0 \quad (5)$$

Если плоскость $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ будетъ касательная къ поверхности, т. е. η будетъ удовлетворять уравненіе (2), то (5) будетъ уравненіе точки на поверхности, а ея координаты опредѣляются выраженіями:

$$y_1=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \eta_1}\quad,\quad y_2=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \eta_2}\quad,\quad y_3=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \eta_3}\quad,\quad y_4=\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \eta_4} \quad (6)$$

§ 528. Плоскость, лежащая на безконечности (§ 502), можетъ пересѣкать, коснуться и непересѣкать поверхность втораго порядка. Въ пер-

вомъ и во второмъ случаяхъ поверхность будетъ *незамкнутая*, полы ея будутъ простираться въ безконечность, гдѣ онѣ встрѣчаются съ безконечно удаленною плоскостью. Таковы:

1. Гиперболоиды: однополый и двуполый.

2. Параболоиды: эллиптическій и гиперболическій.

Въ третьемъ случаѣ безконечно удаленная плоскость не встрѣчаетъ поверхность; всѣ ея точки находятся въ конечномъ разстояніи—поверхность будетъ *замкнутая*. Таковы:

3. Эллипсоидъ.

Во всемъ сказанномъ мы полагаемъ, что опредѣлитель, который называется *опредѣлителемъ поверхности втораго порядка*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \gtrless 0 \tag{7}$$

§ 529. Та же безконечно-удаленная плоскость, разсматриваемая, какъ полярная поверхность втораго порядка, имѣетъ своимъ полюсомъ весьма замѣчательную точку.

Въ самомъ дѣлѣ, черезъ полюсъ безконечно-удаленной плоскости проведемъ, какую-нибудь, сѣкущую; эта сѣкущая встрѣчаетъ поверхность въ двухъ точкахъ сопряженно-гармоническихъ съ полюсомъ и точкой встрѣчи сѣкущей съ безконечно-удаленной полярной плоскостью (§ 510). Такъ какъ эта послѣдняя точка лежитъ на безконечности, то ея сопряженная, т. е. полюсъ, дѣлитъ разстояніе пополамъ между точками встрѣчи, проведенной прямой съ поверхностью. Прямая была проведена въ произвольномъ направленіи, слѣдовательно всѣ хорды, проходящія черезъ полюсъ, безконечно-удаленной плоскости, дѣлятся въ немъ пополамъ. Эту точку называютъ *центромъ* поверхности втораго порядка. Безконечно-удаленная плоскость, какъ мы выше предположили, можетъ касаться поверхности, въ этомъ случаѣ полюсъ лежитъ на полярной плоскости (§ 512); слѣдовательно центръ поверхности находится на безконечности. Поэтому поверхности втораго порядка дѣлятся на два рода: *центральныя* и *не имѣющія центра* или лучше сказать, коихъ центръ находится на безконечности.

1. Центральныя: эллипсоиды, гиперболоиды—однополые и двуполые.

2. Не имѣющія центра: параболоиды—эллиптическіе и гиперболическіе.

Ниже увидимъ, что есть еще два рода поверхностей втораго порядка, имѣющихъ безчисленное множество центровъ, которые въ однѣхъ поверх-

ностяхъ всѣ лежатъ на одной прямой линіи, а въ другихъ на плоскости. Въ этихъ поверхностяхъ опредѣлитель (7) $\Delta = 0$.

§ 530. Изъ этого опредѣленія центра поверхности втораго порядка имѣемъ слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Геометрическое мѣсто центровъ поверхностей втораго порядка, касающихся восьми данныхъ плоскостей, есть прямая линія.

Предложеніе 2. Геометрическое мѣсто центровъ поверхностей втораго порядка касающихся семи данныхъ плоскостей, есть плоскость

§ 531. Опредѣлить центръ поверхности втораго порядка аналитически можно или координатами или уравненіемъ.

Пусть:

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$$

будетъ уравненіе поверхности втораго порядка. Мы видѣли выше (§ 515), что если координаты полярной плоскости будутъ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, координаты полюса x_1, x_2, x_3, x_4, то:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \xi_1 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \xi_2 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_3} = \xi_3 \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_4} = \xi_4 \qquad (8)$$

или:

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ \sigma\xi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{23}x_4 \\ \sigma\xi_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ \sigma\xi_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{aligned} \qquad (9)$$

откуда:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= A_{11}\xi_1 + A_{21}\xi_2 + A_{31}\xi_3 + A_{41}\xi_4 \\ \rho x_2 &= A_{12}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{32}\xi_3 + A_{42}\xi_4 \\ \rho x_3 &= A_{13}\xi_1 + A_{23}\xi_2 + A_{33}\xi_3 + A_{43}\xi_4 \\ \rho x_4 &= A_{14}\xi_1 + A_{24}\xi_2 + A_{34}\xi_3 + A_{44}\xi_4 \end{aligned} \qquad (10)$$

Полагая одну изъ координатныхъ плоскостей на безконечности, т. е. переходя къ декартовымъ координатамъ, мы должны положить (§ 501):

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = z \quad , \quad \rho x_4 = 1$$

$$\sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = \zeta \quad , \quad \sigma\xi_4 = 1$$

въ силу чего уравненія (9) и (10) сдѣлаются:

$$\begin{aligned} \sigma\xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ \sigma\eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ \sigma\zeta &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ \sigma &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \end{aligned} \tag{11}$$

и:

$$\begin{aligned} \rho x &= A_{11}\xi + A_{21}\eta + A_{31}\zeta + A_{41} \\ \rho y &= A_{12}\xi + A_{22}\eta + A_{32}\zeta + A_{42} \\ \rho z &= A_{13}\xi + A_{23}\eta + A_{33}\zeta + A_{43} \\ \rho &= A_{14}\xi + A_{24}\eta + A_{34}\zeta + A_{44} \end{aligned} \tag{12}$$

Если полярная плоскость находится на безконечности, то:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = 0$$

откуда:

$$\sigma x = A_{41} \quad , \quad \sigma y = A_{42} \quad , \quad \sigma z = A_{43} \quad , \quad \sigma = A_{44}$$

изъ этихъ послѣднихъ уравненій, найдемъ координаты центра:

$$x = \frac{A_{41}}{A_{44}} \quad , \quad y = \frac{A_{42}}{A_{44}} \quad , \quad z = \frac{A_{43}}{A_{44}} \tag{13}$$

Чтобы поверхность имѣла центръ, необходимо имѣть $A_{44} \gtrless 0$, въ противномъ случаѣ центръ будетъ находиться на безконечности и поверхность не будетъ имѣть центра.

Во второмъ случаѣ, когда центръ поверхностей опредѣляется уравненіемъ, пусть поверхность втораго порядка въ плоскостныхъ координатахъ будетъ:

$$F(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = 0 \tag{14}$$

Если координаты полярной плоскости будутъ η_1, η_2, η_3, η_4, то уравненіе полюса будетъ:

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial \eta_2} + \xi_3 \frac{\partial F}{\partial \eta_3} + \xi_4 \frac{\partial F}{\partial \eta_4} = 0 \tag{15}$$

Если одна изъ координатныхъ плоскостей будетъ на безконечности, то мы должны положить:

$$\begin{aligned} \sigma\xi_1 = \xi \quad , \quad \sigma\xi_2 = \eta \quad , \quad \sigma\xi_3 = \zeta \quad , \quad \sigma\xi_4 = 1 \\ \sigma\eta_1 = \xi_1 \quad , \quad \sigma\eta_2 = \eta_1 \quad , \quad \sigma\eta_3 = \zeta_1 \quad , \quad \sigma\eta_4 = 1 \end{aligned}$$

Въ силу этого уравненіе полюса:

$$\eta_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} + \eta_3 \frac{\partial F}{\partial \xi_3} + \eta_4 \frac{\partial F}{\partial \xi_4} = 0 \qquad (16)$$

сдѣлается:

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} + \zeta_1 \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \frac{\partial F}{\partial \eta_{4}-1} = 0 \qquad (17)$$

гдѣ выраженіе $\frac{\partial F}{\partial \eta_4}\ _1$ означаетъ, что послѣ дифференцированія нужно сдѣлать $\eta_4 = 1$. Если полярная плоскость на безконечности, то ея полюсъ есть центръ; при этомъ: $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$; откуда уравненіе центра будетъ:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_4 - 1} = 0 \qquad (18)$$

или:

$$A_{14}\xi + A_{24}\eta + A_{34}\zeta + A_{44} = 0 \qquad (19)$$

Это уравненіе можно было написать, зная, что координаты центра суть выраженія (13). Если въ уравненіи (19) $A_{44} = 0$, то точка, выраженная этимъ уравненіемъ, находится на безконечности, такъ какъ это уравненіе въ этомъ случаѣ, удовлетворяется координатами:

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = 0$$

§ 532. Если центръ поверхности втораго порядка находится въ началѣ координатъ, то изъ уравненій (11) и (13) видимъ, что:

$$a_{14} = 0 \quad , \quad a_{24} = 0 \quad , \quad a_{34} = 0$$

$$A_{14} = 0 \quad , \quad A_{24} = 0 \quad , \quad A_{34} = 0$$

что показываетъ, что въ уравненіяхъ поверхностей:

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad F(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

недостаетъ членовъ первой степени относительно перемѣнныхъ: x, y, z и ζ, η, ξ.

Слѣдовательно форма уравненій поверхностей втораго порядка, въ обѣихъ системахъ координатъ, коихъ начало помѣщено въ центрѣ, есть:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{44} = 0 \\ A_{11}\xi^2 + A_{22}\eta^2 + A_{33}\zeta^2 + 2A_{12}\xi\eta + 2A_{13}\xi\zeta + 2A_{23}\eta\zeta + A_{44} = 0 \end{aligned} \qquad (20)$$

Конусъ.

§ 533. Особеннаго вниманія заслуживаетъ поверхность втораго порядка, въ которой центръ находится на самой поверхности.

Уравненіе поверхности въ координатахъ Декарта:

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$
$$+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{21}$$

можно написать въ формѣ:

$$2f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{22}$$

Но мы видѣли (11) и (13), что координаты центра удовлетворяютъ уравненія:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{23}$$

слѣдовательно уравненіе (22) для координатъ центра, сдѣлается:

$$a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{24}$$

Откуда видимъ, что координаты центра должны удовлетворять и уравненіе (24), т. е. уравненія (23) и (24) должны удовлетворятся координатами центра.

Но эти уравненія суть:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} &= 0 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Откуда видимъ, что коэфиціенты въ уравненіи поверхности втораго порядка, которой центръ находится на самой поверхности, должны удовлетворять уравненіе:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

Изъ сказаннаго видимъ, что если поверхность, коей центръ находится на ней самой, выражена въ тетраэдрическихъ координатахъ, то есть система перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, x_4, которыя удовлетворяютъ совокупно четыре уравненія:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_4}=0 \tag{27}$$

изъ коихъ вытекаетъ характеристическое свойство такой поверхности, выраженное уравненіемъ (26).

Первое характеристическое свойство такой поверхности есть то, что полярная плоскость относительно ея, какой нибудь, точки въ пространствѣ, проходитъ всегда черезъ центръ и что всѣ точки, находящіяся на прямой, проходящей черезъ центръ и данную точку, имѣютъ всѣ одну и туже полярную плоскость.

Пусть $y_1 . y_2, y_3, y_4$ будутъ координаты данной точки, то полярная ея плоскость будетъ:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}+x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}+x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4}=0 \tag{28}$$

или:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}+y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}+y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}=0 \tag{29}$$

но мы видѣли выше, что всегда есть система координатъ, которая удовлетворяетъ уравненія (27); слѣдовательно эта система удовлетворяетъ и уравненіе (28) полярной плоскости, произвольно взятой въ пространствѣ, точки y.

Если означимъ черезъ z_1, z_2, z_3, z_4 координаты центра, то координаты, какой-нибудь, точки на прямой, соединяющей точки z и y будутъ:

$$z_1+\lambda y_1 \quad , \quad z_2+\lambda y_2 \quad , \quad z_3+\lambda y_3 \quad , \quad z_4+\lambda y_4 \tag{30}$$

полярная плоскость этой точки будетъ:

$$(z_1+\lambda y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(z_2+\lambda y_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}+(z_3+\lambda y_3)\frac{\partial f}{\partial x_3}+(z_4+\lambda y_4)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0$$

или:

$$z_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+z_4\frac{\partial f}{\partial x_4}+\lambda\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+y_4\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)=0$$

Но первый членъ этого уравненія, написанный въ формѣ:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial z_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial z_4}=0$$

потому что z_1, z_2, z_3, z_4, будучи координатами центра, удовлетворяютъ уравненія:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_2}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_3}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_4}=0 \tag{31}$$

Слѣдовательно полярная плоскость точки (30) будетъ (29), т. е. тоже что и точки $(y_1 y_2 y_3 y_4)$.

Очевидно, что полярная плоскость центра неопредѣленная, такъ какъ въ силу (31) каждый ея членъ обращается въ нуль.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что только тѣ плоскости имѣютъ полюсъ, относительно этой поверхности, которыя проходятъ черезъ центръ.

§ 534. Второе замѣчательно свойство разсматриваемой поверхности есть еще то, что прямая, соединяющая центръ съ какою-нибудь точкою поверхности, вся лежитъ на поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_1, x_2, x_3, x_4 будутъ координаты центра, а y_1, y_2, y_3, y_4 координаты, какой-нибудь, точки на поверхности. Координаты, какой-нибудь, точки на прямой, соединяющей точки x и y, будутъ:

$$x_1+\lambda x_1 \quad , \quad x_2+\lambda y_2 \quad , \quad x_3+\lambda y_3 \quad , \quad x_4+\lambda y_4$$

λ есть произвольный коэфиціентъ. Подставляя эти выраженія въ уравненіе поверхности, найдемъ (§ 510, 18):

$$R\lambda^2+2Q\lambda+P=0$$

гдѣ:

$$P=f(x_1\,x_2\,x_3\,x_4) \quad , \quad R=(y_1\,y_2\,y_3\,y_4)$$

$$2Q=y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+y_4\frac{\partial f}{\partial x_4}$$

Но такъ какъ точки x и y находятся на поверхности, то $R=0$ и $P=0$, а $Q=0$, потому что x суть координаты центра, а слѣдовательно удовлетворяютъ уравненіямъ (27).

Изъ этого видимъ, что уравненіе поверхности удовлетворяется независимо отъ λ.

Поверхность эта есть *конусъ*, коего вершина есть и его центръ, а характеристическое свойство его выражается уравненіемъ (26).

Слѣдовательно уравненіе конуса отличается отъ уравненія поверхности втораго порядка:

$$f=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+$$

$$+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{32}$$

только тѣмъ, что коэфиціентъ a_{44} въ уравненіи конуса опредѣляется уравненіемъ (26).

§ 535. Мы видѣли, что если начало координатъ находится въ центрѣ поверхности, то ея уравненіе есть:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{44} = 0 \qquad (33)$$

Но если эта поверхность будетъ конусъ, то центръ, т. е. начало координатъ, находится на поверхности, слѣдовательно ея уравненіе должно удовлетворятся координатами начала:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 0$$

а для этого необходимо имѣть въ уравненіи (33) $a_{44} = 0$.

Слѣдовательно уравненіе конуса, коего вершина находится въ началѣ координатъ, будетъ:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \qquad (34)$$

Изъ формы этого уравненія видимъ, что если ему удовлетворяютъ координаты x_1, y_1, z_1, то ему удовлетворяютъ и координаты $\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1$, гдѣ λ есть произвольный коэфиціентъ. Изъ этого заключаемъ, что всѣ точки прямой, проходящей черезъ начало и точку $(x_1\ y_1\ z_1)$ удовлетворяютъ уравненіе поверхности, т. е. эта прямая вся находится на поверхности.

Мы выше видѣли, что полярная плоскость конуса, какой-нибудь, точки въ пространствѣ, проходитъ всегда черезъ его вершину, но касательная плоскость есть полярная, точки на поверхности, слѣдовательно касательная плоскость, какой-нибудь, точки на конусѣ, проходитъ черезъ его вершину и касается поверхности по всей прямой, проходящей черезъ его вершину и черезъ точку касанія.

§ 536. Мы видѣли въ § 534, что уравненіе поверхности втораго порядка:

$$f = a_{11}x^2{}_2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$
$$+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (35)$$

отличается отъ конуса только тѣмъ, что въ конусѣ коэфиціентъ a_{44} связанъ съ другими коэфиціентами уравненія уравненіемъ (26), слѣдовательно координаты центра поверхности (35) и конуса той же формы опредѣляются одними и тѣми же уравненіями.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Слѣдовательно ихъ центры совпадаютъ, т. е. вершина конуса, коего уравненіе есть (35) совпадаетъ съ центромъ поверхности, коей уравненіе есть также (35). Въ уравненіи конуса a_{44} обусловлено уравненіемъ (26).

Наконецъ система величинъ для координатъ x, y, z не можетъ совокупно удовлетворять оба уравненія, т. е. поверхности и конуса; единственная система, которая удовлетворяетъ оба уравненія, это $x=\infty$, $y=\infty$, $z=\infty$; изъ этого заключаемъ, что поверхность (35) и конусъ (35) встрѣчаются на безконечности, а поэтому этотъ конусъ называется *ассимптотическимъ*. Слѣдовательно ассимптотическій конусъ центральной поверхности втораго порядка, коей уравненіе есть (35), получится, если въ этомъ уравненіи вмѣсто a_{44} поставимъ его величину, полученную изъ уравненія (26).

Ассимптотическій конусъ касается поверхности втораго порядка по кривой пересѣченія поверхности съ безконечно-удаленною плоскостью.

Если начало координатъ находится въ центрѣ поверхности втораго порядка, то ея уравненіе есть (33), а уравненіе ассимптотическаго конуса будетъ (34).

§ 537. Уравненіе конуса въ формѣ (34) содержитъ шесть коэфиціентовъ, а по раздѣленіи уравненія на одинъ изъ нихъ, оно будетъ содержать только пять, слѣдовательно поверхность конуса вполнѣ опредѣляется пятью данными точками или, что тоже, пятью данными прямыми, исходящими изъ его вершины, или изъ начала координатъ.

Такъ какъ начало координатъ можно всегда перенести въ вершину конуса, то общему уравненію (33) этой поверхности можно всегда дать форму (34), а слѣдовательно поверхность всякаго конуса вполнѣ опредѣляется пятью прямыми, проходящими черезъ его вершину.

§ 538. Такъ какъ въ уравненіи конуса коэфиціенты связаны уравненіемъ (26), то координаты точки на поверхности не могутъ быть выражены въ координатахъ касательной плоскости изъ уравненій (§ 531, 9, 10), а слѣдовательно и коническая поверхность не можетъ быть выражена уравненіемъ въ плоскостныхъ координатахъ, а выражается двумя уравненіями: уравненіемъ поверхности втораго порядка и уравненіемъ точки— его вершины:

$$F(\xi\ \eta\ \zeta)=0 \quad ; \quad x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta+1=0$$

§ 539. Если:

$$f=0 \quad \text{и} \quad \varphi=0$$

суть уравненія двухъ поверхностей втораго порядка, то:

$$f+\lambda\varphi=0$$

будетъ уравненіе всѣхъ поверхностей втораго порядка, проходящихъ черезъ пересѣченіе двухъ данныхъ поверхностей:

$$f=0 \quad \text{и} \quad \varphi=0$$

Если поверхность:

$$\varphi=0$$

будетъ произведеніе двухъ линейныхъ выраженій A и B, т. е. φ есть пара плоскостей:

$$A=0 \quad \text{и} \quad B=0$$

то:

$$f+\lambda A.B=0 \tag{36}$$

будетъ уравненіе всѣхъ поверхностей, проходящихъ черезъ пересѣченія поверхности $f=0$ съ плоскостями:

$$A=0 \quad \text{и} \quad B=0$$

Положимъ, что A и B суть полярныя плоскости точекъ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$, $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ относительно поверхности f, то имѣемъ:

$$A=x_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial y_4}=0 \tag{37}$$

$$B=x_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial z_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial z_4}=0 \tag{38}$$

Слѣдовательно уравненіе (36), въ этомъ случаѣ, будетъ представлять всѣ поверхности, проходящія черезъ пересѣченіе поверхности:

$$f=0$$

съ двумя полярными плоскостями точекъ y и z.

Чтобы поверхность (36) вполнѣ опредѣлилась надобно дать точку, съ помощью которой можно бы было опредѣлить λ. Выберемъ для этого полюсъ $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ и подставимъ эти координаты въ уравненіе (36); опредѣлимъ изъ этого уравненія λ и вставимъ въ уравненіе (36), то будемъ имѣть:

$$2f(x_1x_2x_3x_4)\left\{y_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial z_3}+y_4\frac{\partial f}{\partial z_4}\right\}-$$

$$-\left\{x_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right\}\left\{x_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial z_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial z_4}\right\}=0 \tag{39}$$

уравненіе поверхности втораго порядка, которая, проходя черезъ кривыя пересѣченія поверхности:

$$f=0$$

съ полярными плоскостями (37) и (38), проходитъ и черезъ полюсъ плоскости (37).

Такъ какъ уравненіе неизмѣняется, измѣняя y на z, то изъ этого слѣдуетъ, что поверхность (39) проходитъ и черезъ полюсъ $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ второй плоскости (38).

Если обѣ полярныя плоскости (37) и (38) совпадаютъ, то совпадутъ и ихъ полюсы и мы получимъ поверхность втораго порядка, которая, проходя черезъ пересѣченіе поверхности $f=0$ съ плоскостью (37), проходитъ и черезъ полюсъ этой плоскости:

$$4f(x_1x_2x_3x_4).f(y_1y_2y_3y_4)-\left\{x_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right\}^2=0 \quad (40)$$

Легко видѣть, что эта поверхность есть конусъ, такъ какъ ея четыре производныя, по x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяются координаты полюса $(y_1y_2y_3y_4)$, который слѣдовательно есть вершина конуса.

Слѣдовательно уравненіе (40) представляетъ касательный конусъ, исходящій изъ произвольно взятой точки $(y_1y_2y_3y_4)$ къ поверхности втораго порядка $f=0$. Его основаніе есть пересѣченіе поверхности f съ произвольно взятой плоскостью (37). Изъ этого слѣдуетъ, что пересѣченіе поверхности втораго порядка съ, какою-нибудь, плоскостью есть *коническое сѣченіе.*

Если полюсъ $(y_1y_2y_3y_4)$ будетъ на поверхности f, то первый членъ уравненія (40) равенъ нулю и коническая поверхность превращается въ касательную плоскость.

Если уравненіе (40) представимъ въ формѣ:

$$2f(x_1x_2x_3x_4)\left(y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+y_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)-$$

$$-\left(x_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+x_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+x_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^2=0 \quad (41)$$

и перенесемъ полюсъ $(y_1\,y_2\,y_3\,y_4)$ въ центръ поверхности втораго порядка и затѣмъ перейдемъ къ координатамъ Декарта, полагая:

$$\rho x_1=x \quad , \quad \rho x_2=y \quad , \quad \rho x_3=z \quad , \quad \rho x_4=1$$

$$\rho y_1=x_1 \quad , \quad \rho y_2=y_1 \quad , \quad \rho y_3=z_1 \quad , \quad \rho y_4=1$$

то найдемъ:

$$2f(x\,y\,z)\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+\frac{\partial f}{\partial y_4=1}\right)-$$

$$-\left(x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}+\frac{\partial f}{\partial y_4=1}\right)^2=0$$

Но для координатъ центра имѣемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y_1}=0\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial z_1}=0$$

Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$2f(x\,y\,z)\frac{\partial f}{\partial y_4=1}-\left(\frac{\partial f}{\partial y_4=1}\right)^2=0$$

или:

$$2f(x\,y\,z)-\frac{\partial f}{\partial y_4=1}=0 \tag{42}$$

Легко видѣть, что это ассимптотическій конусъ. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_4=1}=a_{14}x_1+a_{24}y_1+a_{34}z_1+a_{44}$$

Слѣдовательно уравненіе (42) сдѣлается:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+$$

$$+2a_{24}y+2a_{34}z-(a_{14}x_1+a_{24}y_1+a_{34}z_1)=0 \tag{43}$$

Но координаты центра суть:

$$x_1=\frac{A_{14}}{A_{44}}\quad,\quad y_1=\frac{A_{24}}{A_{44}}\quad,\quad z_1=\frac{A_{34}}{A_{44}}$$

Слѣдовательно послѣдній членъ уравненія (43) будетъ:

$$\frac{a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}}{A_{44}}$$

Но это есть ничто иное, какъ a_{44}, опредѣленное изъ опредѣлителя (26), а это есть признакъ, что уравненіе (43) представляетъ ассимптотическій конусъ къ поверхности:

$$f(x,y,z)=0$$

ГЛАВА XXXV.

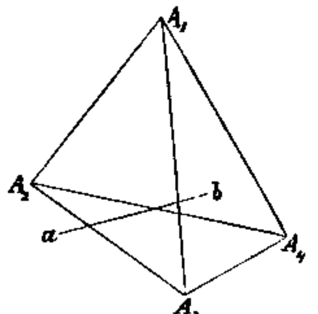
Приведенiе поверхностей втораго порядка къ канонической формѣ.

§ 540. Пусть данная поверхность втораго порядка будетъ:

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 +$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0 \quad (1)$$

Возьмемъ, какую нибудь, точку A_1 внѣ этой поверхности (фиг. 161), построимъ ея полярную плоскость, на этой плоскости возьмемъ, какую мибудь, точку A_2, построимъ ея полярную плоскость, которая пройдетъ черезъ точку A_1; ма пересѣченiи двухъ построенныхъ полярныхъ плоскостей возьмемъ опять, какую нибудь, точку A_3 и построимъ ея полярную плоскость, которая пройдетъ черезъ точки A_1 и A_2; три построенныя полярныя плоскости пересѣкутся въ точкѣ A_4.

Фиг. 161.



Такимъ построенiемъ образовался тетраэдръ, коего вершины суть A_1, A_2, A_3, A_4; этотъ тетраэдръ называется *полярнымъ*, такъ какъ каждая изъ его вершинъ есть полюсъ противуположной грани.

Такихъ тетраэдровъ, относительно поверхности втораго порядка, есть, очевидно, безконечное множество—шесть разъ безконечное число.

Свойства полярнаго тетраэдра.

§ 541. 1. Каждая изъ вершинъ A_1, A_2, A_3, A_4 (фиг. 161) есть полюсъ иротивуположной грани.

2. Каждая пара противуположныхъ реберъ A_1A_4 и A_2A_3; A_1A_2 и A_3A_4; A_1A_3 и A_2A_4 суть взаимныя поляры относительно поверхности втораго порядка (§ 540).

3. Пара смежныхъ граней и пара касательныхъ плоскостей, проведенныхъ черезъ пересѣченiе граней къ поверхности, составляютъ гармоническую связку.

4. Двѣ касательныя плоскости, проведенныя къ поверхности черезъ какую-нибудь прямую ab, лежащую въ грани $(A_2 A_3 A_4)$, плоскость проведенная черезъ туже мрямую ab и противуположный полюсъ A_1 и грань $(A_2 A_3 A_4)$, составляютъ гарпоническую связку.

5. *Опредѣленіе.* Двѣ плоскости, у которыхъ полюсъ одной находится на другой, называются *сопряженными плоскостями,* и ихъ полюсы *сопряженными полюсами.*

§ 542. Положимъ теперь, что грань $(A_2 A_3 A_4)$ полярнаго тетраэдра отодвинута на безконечность, т. е. вершина A_1 есть полюсъ плоскости, лежащей на безконечности.

Мы выше видѣли (§ 528), что полюсъ A_1 будетъ центръ поверхности. Слѣдовательно одна изъ вершинъ полярнаго тетраэдра находится въ центрѣ, а три остальныя на безконечно-удаленной плоскости. Изъ этого положенія полярнаго тетраэдра слѣдуетъ:

1. Что всѣ хорды, проходящія черезъ вершину A_1, дѣлятся въ ней поверхностью пополамъ, такъ какъ A_1 есть центръ поверхности (§ 528).

2. Такъ какъ каждая изъ остальныхъ трехъ граней $(A_1 A_2 A_3)$, $(A_1 A_2 A_3)$ и $(A_1 A_2 A_4)$ суть полярныя плоскости точекъ, лежащихъ на безконечно-удаленной плоскости, то изъ этого слѣдуетъ, что каждая изъ этихъ граней дѣлитъ пополамъ всѣ хорды поверхности, проведенной параллельно пересѣченію двухъ остальныхъ граней.

3. *Опредѣленіе.* Плоскость, дѣлящая пополамъ хорды поверхности втораго порядка, проведенныя параллельно извѣстному направленію, называется *діаметральною плоскостью,* а направленіе хордъ называется *сопряженнымъ* направленіемъ діаметральной плоскости.

4. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что каждая изъ трехъ граней, пересѣкающихся въ центрѣ поверхности, суть *діаметральныя* плоскости, коихъ *сопряженное* направленіе есть пересѣченіе двухъ другихъ граней.

5. Такъ какъ каждой точкѣ, лежащей на безконечно-удаленной плоскости, соотвѣтствуетъ полярная плоскость, т. е. діаметральная, то изъ этого заключаемъ, что каждому направленію есть сопряженная діаметральная плоскость. Слѣдовательно каждая плоскость, проходящая черезъ центръ, есть діаметральная.

§ 543. Отнесемъ теперь уравненіе поверхности втораго порядка къ произвольно построенному полярному тетраэдру.

Пусть этотъ тетраэдръ будетъ $(A_1 A_2 A_3 A_4)$, а уравненіе поверхности, отнесенной къ нему, пусть будетъ:

$$a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + a_{44}x^2_4 +$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0 \quad (2)$$

Уравненія граней полярнаго тетраэдра будутъ:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_4 = 0$$

Если въ уравненіи (2) сдѣлаемъ:

$$x_4 = 0$$

то найдемъ уравненіе:

$$a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \qquad (3)$$

кривой пересѣченія плоскости $x_4 = 0$ съ поверхностью.

Такъ какъ грань $(A_1 A_2 A_3)$ или $x_4 = 0$ есть, очевидно, полярный треугольникъ относительно коническаго сѣченія (3), къ которому оно отнесено, то его уравненіе должно имѣть форму:

$$ax^2_1 + bx^2_2 + ax^2_3 = 0$$

какъ видѣли въ § 241; слѣдовательно должны имѣть:

$$a_{12} = 0 \quad , \quad a_{13} = 0 \quad , \quad a_{23} = 0$$

Разсуждая подобнымъ образомъ относительно каждой изъ граней, найдемъ, что въ уравненіи (2), если оно отнесено къ полярному тетраэдру:

$$a_{12} = 0 \quad , \quad a_{13} = 0 \quad , \quad a_{14} = 0 \quad , \quad a_{23} = 0 \quad , \quad a_{24} = 0 \quad , \quad a_{34} = 0$$

откуда уравненіе поверхности, отнесенной къ полярному тетраэдру, будетъ:

$$a_{11}x^2_1 + a_{22}x^2_2 + a_{33}x^2_3 + a_{44}x^2_4 = 0 \qquad (4)$$

Такъ какъ переходъ отъ тетраэдра, къ которому отнесено уравненіе поверхности, къ полярному тетраэдру дѣлается линейнымъ преобразованіемъ тетраэдрическихъ координатъ, какъ показано въ § 502, то изъ этого видимъ, что четверичной однородной формѣ (2), линейнымъ преобразованіемъ, можно дать форму (4) и притомъ безчисленнымъ множествомъ способовъ, такъ какъ поверхность, отнесенная къ каждому изъ полярныхъ тетраэдровъ, имѣетъ форму (4).

Это самая простая форма уравненія поверхности втораго порядка, которая называется *канонической*.

Центральныя поверхности.

§ 544. Если поверхность будетъ центральная, то полагая въ уравненіи (4):

$$\rho x_1 = x \quad , \quad \rho x_2 = y \quad , \quad \rho x_3 = z \quad , \quad \rho x_4 = 1$$

найдемъ:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0 \qquad (5)$$

самую простую форму центральной поверхности, которая отнесена къ тремъ діаметральнымъ сопряженнымъ плоскостямъ. Неудобство только состоитъ въ томъ, что эти три діаметральныя сопряженныя плоскости, къ которымъ теперь отнесено уравненіе (5), какъ координатнымъ, неперпендикулярны.

Въ уравненіи (5) коэфиціентъ a_{44} можно всегда сдѣлать отрицательнымъ; въ этомъ предположеніи коэфиціенты a_{11}, a_{22}, a_{33} могутъ быть:

1. Всѣ три положительны:
Поверхность будетъ замкнутая—*эллипсоидъ.*

2. Два положительныхъ и одинъ отрицательный:
Поверхность будетъ *однополый гиперболоидъ.*

3. Одинъ положительный и два отрицательныхъ:
Поверхность будетъ *двуполый гиперболоидъ.*

4. Всѣ три отрицательные:
Поверхность будетъ *мнимая.*

§ 545. Остается рѣшить вопросъ: Есть-ли такое направленіе параллельныхъ хордъ, въ центральной поверхности втораго порядка, къ которому ему сопряженная діаметральная плоскость перпендикулярна?

Уравненіе полярной плоскости точки $(x_1 y_1 z_1)$ есть:

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1} + y\frac{\partial f}{\partial y_1} + z\frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial y_{4-1}} = 0 \qquad (6)$$

или:

$$\begin{aligned} &x(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a_{14}) + \\ &+ y(a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 + a_{24}) + \\ &+ z(a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 + a_{34}) + \\ &+ (a_{41}x_1 + a_{42}y_1 + a_{43}z_1 + a_{44}) = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

Чтобы полярная плоскость точки $(x_1 y_1 z_1)$ была діаметральная, необходимо, чтобы ея полюсъ лежалъ на безконечно-удаленной плоскости.

Положимъ:

$$x_1 = r_1 \cos\alpha \quad ; \quad y_1 = r_1 \cos\beta \quad ; \quad z_1 = r_1 \cos\gamma \qquad (8)$$

Если полюсъ $(x_1 y_1 z_1)$, коего направленіе дается углами α, β, γ, находится на безконечности, то $r_1 = \infty$. Слѣдовательно, чтобы найти уравненіе діаметральной плоскости, сопряженной направленію α, β, γ, надобно въ уравненіи (7) вставить вмѣсто x_1, y_1, z_1, выраженія (8) и сдѣлать $r_1 = \infty$. Такая

операція даетъ слѣдующее уравненіе діаметральной плоскости сопряженной направленію α, β, γ:

$$\begin{aligned} & x(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma) + \\ & + y(a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma) + \\ & + z(a_{21}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma) + \\ & + (a_{41}\cos\alpha + a_{42}\cos\beta + a_{43}\cos\gamma) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

или:

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что уравненія:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

суть діаметральныя плоскости, сопряженныя направленіямъ координатныхъ осей x, y, z.

§ 546. Если діаметральная плоскость (9) будетъ перпендикулярна своему сопряженному направленію, то мы должны имѣть:

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma &= \lambda\cos\alpha \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\cos\beta + a_{23}\cos\gamma &= \lambda\cos\beta \\ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + a_{33}\cos\gamma &= \lambda\cos\gamma \end{aligned} \tag{12}$$

или:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma &= 0 \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22}-\lambda)\cos\beta + a_{23}\cos\gamma &= 0 \\ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + (a_{33}-\lambda)\cos\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

откуда имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

развертывая опредѣлитель, найдемъ:

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) - a^2_{32}(a_{11}-\lambda) - a^2_{13}(a_{22}-\lambda) - a^2_{12}(a_{33}-\lambda) + \\ + 2a_{12}a_{13}a_{23} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

или:

$$\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a^2_{12}-a^2_{13}-a^2_{23})\lambda+$$
$$+a_{11}a^2_{23}+a_{22}a^2_{13}+a_{33}a^2_{12}-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{12}a_{13}a_{23}=0 \qquad (16)$$

Это уравненіе третьей степени, слѣдовательно имѣетъ всегда хоть одинъ дѣйствительный корень, но мы ниже покажемъ, что оно всегда имѣетъ три дѣйствительные корня, какіе бы коэфиціенты въ уравненіи поверхности ни были. Слѣдовательно всегда существуетъ по крайней мѣрѣ три направленія, которыя перпендикулярны къ своимъ сопряженнымъ діаметральнымъ плоскостямъ.

§ 547. Покажемъ теперь, что всѣ три корня уравненія (16) дѣйствительны. Мы приведемъ здѣсь два доказательства. Первое принадлежитъ *Коши* (Cauchy), а второе послужитъ къ выводу нѣкоторыхъ слѣдствій, которыя намъ будутъ необходимы въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи свойствъ поверхностей втораго порядка.

Напишемъ уравненіе (16) въ формѣ:

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33})-a^2_{23}(\lambda-a_{11})-a^2_{13}(\lambda-a_{22})-a^2_{12}(\lambda-a_{33})-$$
$$-2a_{12}a_{13}a_{23}=0 \qquad (17)$$

а это полѣднее можно написать такъ:

$$(\lambda-a_{11})\{(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33})-a^2_{23}\}-a^2_{13}(\lambda-a_{22})-a^2_{12}(\lambda-a_{33})-$$
$$-2a_{12}a_{13}a_{23}=0 \qquad (18)$$

Означимъ черезъ λ' и λ'' корни уравненія:

$$(\lambda-a_{22})(\lambda-a_{33})-a^2_{23}=0 \qquad (19)$$

Очевидно, одинъ изъ корней, напримѣръ λ', больше a_{22} и a_{33}, а другой λ'' меньше этихъ количествъ.

Если подставимъ въ уравненіе (18) вмѣсто λ корень λ', то найдемъ:

$$-\{(\lambda'-a_{22})a^2_{13}+2a_{12}a_{13}a_{23}+(\lambda'-a_{33})a^2_{12}\} \qquad (20)$$

Но такъ какъ мы имѣемъ (19):

$$(\lambda'-a_{22})(\lambda'-a_{33})=a^2_{23}$$

то выраженіе (20), въ скобкахъ, есть полный квадратъ, слѣдовательно величина отрицательная.

Если въ уравненіе (18) вставимъ другой корень λ'' уравненія (19), то будемъ имѣть:

$$(a_{22}-\lambda'')a^2_{13}-2a_{12}a_{13}a_{23}+(a_{33}-\lambda'')a^2_{12}$$

полный квадратъ и притомъ величина положительная.

Если теперь въ уравненіе (18) вставимъ, послѣдовательно, вмѣсто λ величины: $+\infty$, λ', λ'', $-\infty$, то найдемъ розультаты:

$$+\ -\ +\ -$$

а это показываетъ, что между:

$$\infty \text{ и } \lambda' \ ,\ \lambda' \text{ и } \lambda'' \ ,\ \lambda'' \text{ и } -\infty$$

находится по одному корню дѣйствительному.

Итакъ видимъ, что всѣ три корня уравненія (17) суть величины дѣйствительныя.

§ 548. Приведемъ второе доказательство, что три корня уравненія (15) всегда дѣйствительны, изъ котораго намъ будутъ необходимы нѣкоторыя слѣдствія.

Возьмемъ первое изъ уравненія (13) § 546 и напишемъ его въ формѣ:

$$\frac{\cos\beta}{a_{13}}+\frac{\cos\gamma}{a_{12}}=\frac{\cos\alpha}{a_{12}a_{13}}(\lambda-a_{11})$$

прибавимъ къ обѣимъ частямъ этого уравненія по $\frac{\cos\alpha}{a_{23}}$ и сдѣлаемъ съ остальными двумя уравненіями (13) § 546, подобное же преобразованіе, то найдемъ:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha}{a_{23}}+\frac{\cos\beta}{a_{13}}+\frac{\cos\gamma}{a_{12}}&=\frac{\cos\alpha}{a_{12}a_{13}}\left(\lambda-a_{11}+\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}\right)\\
\frac{\cos\alpha}{a_{23}}+\frac{\cos\beta}{a_{13}}+\frac{\cos\gamma}{a_{12}}&=\frac{\cos\beta}{a_{12}a_{23}}\left(\lambda-a_{22}+\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\right)\qquad(21)\\
\frac{\cos\alpha}{a_{23}}+\frac{\cos\beta}{a_{13}}+\frac{\cos\gamma}{a_{12}}&=\frac{\cos\gamma}{a_{13}a_{23}}\left(\lambda-a_{33}+\frac{a_{13}a_{33}}{a_{12}}\right)
\end{aligned}$$

положимъ:

$$\frac{\cos\alpha}{a_{33}}+\frac{\cos\beta}{a_{13}}+\frac{\cos\gamma}{a_{12}}=k$$

$$a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{24}}=a_1 \quad ; \quad a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=a_2 \quad ; \quad a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}=a_3 \qquad (22)$$

вслѣдствіе чего уравненія (21) дадутъ:

$$\cos\alpha = \frac{ka_{12}a_{13}}{\lambda - a_1}\quad,\quad \cos\beta = \frac{ka_{12}a_{23}}{\lambda - a_2}\quad,\quad \cos\gamma = \frac{ka_{13}a_{23}}{\lambda - a_3} \tag{23}$$

Раздѣлимъ эти уравненія на a_{23}, a_{13}, a_{12}, сложимъ и сократимъ на k, то найдемъ:

$$\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}(\lambda - a_1)} + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}(\lambda - a_2)} + \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}(\lambda - a_3)} = 1 \tag{24}$$

или:

$$\frac{1}{a^2_{23}(\lambda - a_1)} + \frac{1}{a^2_{13}(\lambda - a_2)} + \frac{1}{a^2_{12}(\lambda - a_3)} - \frac{1}{a_{12}\,a_{13}\,a_{23}} = 0 \tag{25}$$

Откуда видимъ, что уравненію (25) можно дать слѣдующую форму:

$$\frac{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)}{a_{12}\,a_{13}\,a_{23}} - \frac{(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)}{a^2_{23}} -$$
$$- \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - a_3)}{a^2_{13}} - \frac{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)}{a^2_{12}} = 0 \tag{26}$$

Положимъ, что $a_1 < a_2 < a_3$. Кромѣ этого произведеніе $a_{12}\,a_{13}\,a_{23}$ можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ. Положимъ $a_{12}\,a_{13}\,a_{23} < 0$ и подставимъ въ уравненіе (26) вмѣсто λ значенія: $-\infty$, a_1, a_3, a_3. Результаты подстановленій будутъ:

$$+\infty\,,\, -\frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}{a^2_{23}}\,,\, -\frac{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}{a^2_{13}}\,,\, -\frac{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}{a^2_{12}} \tag{27}$$

Знаки этихъ величинъ будутъ:

$$+\;-\;+\;-$$

Слѣдовательно уравненіе (26) или (17) будетъ имѣть три дѣйствительные корня, заключенные между числами:

$$-\infty \text{ и } a_1\quad,\quad a_1 \text{ и } a_2\quad,\quad a_2 \text{ и } a_3$$

Если произведеніе $a_{12}\,a_{13}\,a_{23} > 0$, то мы подставимъ въ уравненіе (26) количества a_1, a_2, a_3, $+\infty$. Результаты подстановлемія дадутъ знаки:

$$-\;+\;-\;+$$

Слѣдовательно опять три корня дѣйствительные.

Давая уравненію (17) § 547 форму (26), мы неявно предположили, что коэфиціенты a_{12}, a_{13}, a_{23} не равны нулю. Положимъ теперь, что одинъ изъ нихъ, напримѣръ $a_{12}=0$.

Тогда уравненіе (17) сдѣлается:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)-a^2_{23}(a_{11}-\lambda)-a^2_{13}(a_{22}-\lambda)=0 \quad (28)$$

полагая $a_{22}>a_{11}$ и подставляя послѣдовательно $-\infty$, a_{11}, a_{22}, $+\infty$, знаки результатовъ подстановленій будутъ:

$$+\ -\ +\ -$$

Слѣдовательно корни дѣйствительные и будутъ заключаться между $-\infty$ и a_{11}, a_{11} и a_{22}, a_{22} и $+\infty$.

Наконецъ, можетъ случится, что $a_{12}=0$, и $a_{13}=0$, въ этомъ случаѣ уравненіе сдѣлается:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)-a^2_{23}(a_{11}-\lambda)=0$$

или:

$$(a_{11}-\lambda)\{(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)-a^2_{23}\}=0 \quad (29)$$

Одинъ изъ корней очевидно есть a_{11}, а другіе два дѣйствительные. Слѣдовательно во всѣхъ случаяхъ уравненіе (17) имѣетъ всегда всѣ три корня дѣйствительные.

§ 549. Мы предположили, что всѣ три корня уравненія (26) или (17) различны; положимъ теперь, что это уравненіе имѣетъ два равные корня. Мы видѣли выше, что корни заключены между предѣлами $-\infty$, a_1, a_2, a_3 или между $a_1, a_2, a_3, +\infty$, смотря по тому будетъ-ли произведеніе $a_{12}a_{13}a_{23}$ отрицательнымъ или положительнымъ. Но если два корня сдѣлаются равными, то необходимо, двойной корень совпадетъ съ однимъ изъ предѣловъ a_1, a_2, a_3.

Если положимъ, что двойной корень есть a_1, то уравненіе (26) должно имѣть множителемъ $(\lambda-a_1)^2$, что влечетъ за собой равенство $a_1=a_2=a_3$.

Обратно, если $a_1=a_2=a_3$, то уравненіе (26) будетъ имѣть множитель $(\lambda-a_1)^2$ и a_1 будетъ двойной корень. Слѣдовательно условіе, необходимое и достаточное, чтобы уравненія (26) или (16) имѣли два равные корня, есть:

$$a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=a_{33}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{12}} \quad (30)$$

Легко видѣть, что если два корня уравненія равны нулю, то:

$$a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}=0 \quad , \quad a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=0 \quad , \quad a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}=0$$

и, обратно, если эти уравненія имѣютъ мѣсто, то два корня уравненія (17) равны нулю, ибо послѣдній членъ и коэфиціентъ при λ обращаются въ нуль при этихъ значеніяхъ.

Если наконецъ уравненіе будетъ имѣть тройной корень, то очевидно, необходимо, чтобы:

$$a_{12}=a_{13}=a_{23}=0 \quad , \quad a_{11}=a_{22}=a_{33} \tag{31}$$

§ 550. Легко показать теперь, что три направленія, соотвѣтствующія дѣйствительнымъ корнямъ уравненія (17), перпендикулярны между собою.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будутъ эти корни уравненія (16). Если эти корни подставимъ послѣдовательно въ уравненія (13), то для каждаго найдемъ соотвѣтственное направленіе: для λ_1 направленіе $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, для λ_2 направленіе $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, для λ_3 направленіе $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Эти направленія называются *главными*. Подставимъ въ уравненія (12) λ_1 и углы соотвѣтственные этому корню $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, затѣмъ подставимъ корень λ_2 и соотвѣтственные углы $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, то найдемъ:

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha_1+a_{12}\cos\beta_1+a_{13}\cos\gamma_1&=\lambda_1\cos\alpha_1\\ a_{21}\cos\alpha_1+a_{22}\cos\beta_1+a_{23}\cos\gamma_1&=\lambda_1\cos\beta_1\\ a_{31}\cos\alpha_1+a_{32}\cos\beta_1+a_{33}\cos\gamma_1&=\lambda_1\cos\gamma_1 \end{aligned} \tag{32}$$

и:

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha_2+a_{12}\cos\beta_2+a_{13}\cos\gamma_2&=\lambda_2\cos\alpha_2\\ a_{21}\cos\alpha_2+a_{22}\cos\beta_2+a_{23}\cos\gamma_2&=\lambda_2\cos\beta_2\\ a_{31}\cos\alpha_2+a_{32}\cos\beta_2+a_{33}\cos\gamma_2&=\lambda_2\cos\gamma_2 \end{aligned} \tag{33}$$

Умножимъ теперь уравненія (32) на $\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2$, а уравненія (33) на $\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1$, и сложивъ, первыя между собою, вторыя между собою, вычтемъ эти суммы, найдемъ:

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)=0$$

полагая корни λ_1 и λ_2 неравными, найдемъ:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0$$

а это показываетъ, что направленія $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ перпендикулярны.

Точно также можно показать, что и направленія $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ перпендикулярны.

Если въ уравненія діаметральной плоскости (9) подставимъ вмѣсто α, β, γ послѣдовательно углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, соотвѣтствующіе корнямъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и замѣстимъ коэфиціенты при x, y, z ихъ величинами изъ (32), то найдемъ уравненія діаметральныхъ плоскостей перпендикулярныхъ къ направленіямъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 (x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1) + a_{14} \cos \alpha_1 + a_{24} \cos \beta_1 + a_{34} \cos \gamma_1 = 0 \\
&\lambda_2 (x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2) + a_{14} \cos \alpha_2 + a_{24} \cos \beta_2 + a_{34} \cos \gamma_2 = 0 \quad (34) \\
&\lambda_3 (x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3) + a_{14} \cos \alpha_3 + a_{24} \cos \beta_3 + a_{34} \cos \gamma_3 = 0
\end{aligned}$$

Ни одинъ изъ корней уравненія (16) не можетъ быть равенъ нулю, такъ какъ его послѣдній членъ есть A_{44}, а въ центральной поверхности A_{44} не можетъ быть равно нулю.

§ 551. Итакъ видимъ, что въ центральныхъ поверхностяхъ есть три направленія, перпендикулярныя между собою, коихъ сопряженныя діаметральныя плоскости къ нимъ перпендикулярны. Перенесемъ начало координатъ въ центръ то уравненіе поверхности сдѣлается:

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0 \qquad (35)$$

такое перенесеніе дѣлается, замѣщая x, y, z черезъ $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$ и опредѣляя x_1, y_1, z_1 изъ уравненій:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \qquad (36)$$

Полагая $-\frac{\Delta}{A_{44}} = H$, величина H опредѣлится уравненіемъ:

$$H = -\frac{a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}}{A_{44}} = -\frac{\Delta}{A_{44}}$$

Возьмемъ за новыя координатныя оси три перпендикулярныя между собою направленія, коихъ сопряженныя діаметральныя плоскости къ нимъ перпендикулярны, то уравненіе (35) сдѣлается:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H$$

такъ какъ координатнымъ тетраэдромъ будетъ полярный тетраэдръ, коего одна грань находится на безконечности. Остается только сдѣлать это преобразованіе на самомъ дѣлѣ.

Для этого, означая новыя координаты черезъ x', y', z' мы должны положить:

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3$$
$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \qquad (37)$$
$$z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3$$

Если эти выраженія подставимъ въ (35), то первый членъ этого уравненія преобразуется въ:

$$b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z'$$

а $\dfrac{\Delta}{A_{44}}$ неизмѣняется, слѣдовательно будемъ имѣть:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{23}yz =$$
$$= b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + b_{23}y'z'$$

гдѣ b_{ik} суть функціи отъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Такъ какъ всегда существуетъ зависимость:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

то предъидущее уравненіе можно написать въ формѣ:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$= b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + b_{33}z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z' + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

или:

$$(a_{11} - \lambda)x^2 + (a_{22} - \lambda)y^2 + (a_{33} - \lambda)z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz =$$
$$= (b_{11} - \lambda)x'^2 + (b_{22} - \lambda)y'^2 + (b_{33} - \lambda)z'^2 + 2b_{12}x'y' + 2b_{13}x'z' + 2b_{23}y'z'$$

гдѣ λ есть количество произвольное.

Если возьмемъ инваріантъ этой формы, который называется *призначною* или *дискриминантомъ* и замѣтимъ, что модуль преобразованія:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = 1$$

то найдемъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}-\lambda, & b_{23} \\ b_{31}, & b_{32}, & b_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

или:

$$\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a^2_{12}-a^2_{13}-a^2_{23})\lambda+a_{11}a^2_{23}+ a_{22}a^2_{13}+a_{33}a^2_{12}-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{12}a_{13}a_{23}=$$
$$=\lambda^3-(b_{11}+b_{22}+b_{33})\lambda^2+(b_{11}b_{22}+b_{11}b_{33}+b_{22}b_{33}-b^2_{12}-b^2_{13}-b^2_{23})\lambda+b_{11}b^2_{23} b_{22}b^2_{13}+b_{33}b^2_{12}-b_{11}b_{22}b_{33}-2b_{12}b_{13}b_{23}$$

Такъ какъ это уравненіе должно существовать для произвольнаго значенія λ, то будемъ имѣть:

$$b_{11}+b_{22}+b_{33}=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$b_{11}b_{22}+b_{11}b_{33}+b_{22}b_{33}-b^2_{12}-b^2_{13}-b^2_{23}=$$
$$=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a^2_{12}-a^2_{13}-a^2_{23}$$

$$b_{11}b^2_{23}+b_{22}b^2_{13}+b_{33}b^2_{12}-b_{11}b_{22}b_{33}-2b_{12}b_{13}b_{23}=$$
$$=a_{11}a^2_{23}+a_{22}a^2_{13}+a_{33}a^2_{12}-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{12}a_{13}a_{23}$$

Но если за новыя оси взяты три направленія, коихъ сопряженныя діаметральныя плоскости къ нимъ перпендикулярны, то:

$$b_{12}=0 \quad , \quad b_{13}=0 \quad , \quad b_{23}=0$$

откуда:

$$b_{11}+b_{22}+b_{33}=a_{11}+a_{22}+a_{33}$$

$$b_{11}b_{22}+b_{11}b_{33}+b_{22}b_{33}=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a^2_{12}-a^2_{13}-a^2_{23}$$

$$b_{11}b_{22}b_{33}=a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}a^2_{23}-a_{22}a^2_{13}-a_{33}a^2_{12}$$

Вторыя части этихъ уравненій извѣстны, а первыя суть сумма количествъ $b_{11}, b_{22}\ b_{33}$, сумма ихъ различныхъ соединеній по два, и ихъ произведеніе, слѣдовательно онѣ суть корни кубическаго уравненія:

$$\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a^2_{12}-a^2_{13}-a^2_{23})\lambda-$$
$$-(a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{12}a_{13}a_{23}-a_{11}a^2_{23}-a_{22}a^2_{13}-a_{33}a^2_{12})=0 \qquad (38)$$

Рѣшивъ это уравненіе, котораго всѣ корни дѣйствительные (§ 547), будемъ имѣть корни b_{11}, b_{22}, b_{33} и наше уравненіе сдѣлается:

$$b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+\frac{\Delta}{A_{44}}=0 \qquad (39)$$

или:

$$b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2=H \qquad (40)$$

§ 552. Легко показать непосредственно, что если $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ суть тѣ направленія, которыя опредѣляются изъ (12) или (13), соотвѣтственно каждому изъ трехъ корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравненія (16), то коэфиціенты при xy, xz и yz будутъ равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ послѣ подстановленія выраженій (37) въ уравненіе (35) коэфиціентъ, напримѣръ, при yz будетъ:

$$a_{11}\cos\alpha_2\cos\alpha_3+a_{22}\cos\beta_2\cos\beta_3+a_{33}\cos\gamma_2\cos\gamma_3+2a_{23}(\cos\beta_2\cos\gamma_3+\cos\beta_3\cos\gamma_2)+$$
$$+2a_{13}(\cos\alpha_2\cos\gamma_3+\cos\alpha_3\cos\gamma_2)+2a_{12}(\cos\alpha_2\cos\beta_3+\cos\alpha_3\cos\beta_2)$$

Но мы имѣемъ (33):

$$a_{11}\cos\alpha_3+a_{12}\cos\beta_2+a_{13}\cos\gamma_2=\lambda_2\cos\alpha_2$$
$$a_{21}\cos\alpha_2+a_{22}\cos\beta_2+a_{23}\cos\gamma_2=\lambda_2\cos\beta_2$$
$$a_{31}\cos\alpha_2+a_{32}\cos\beta_2+a_{33}\cos\gamma_2=\lambda_2\cos\gamma_2$$

Если эти уравненія умножимъ, послѣдовательно, на $\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3$ и сложимъ, то найдемъ:

$$a_{11}\cos\alpha_2\cos\alpha_3+a_{22}\cos\beta_2\cos\beta_3+a_{33}\cos\gamma_2\cos\gamma_3+2a_{23}(\cos\beta_2\cos\gamma_3+\cos\beta_3\cos\gamma_2)+$$
$$+2a_{13}(\cos\alpha_2\cos\gamma_3+\cos\alpha_3\cos\gamma_2)+2a_{12}(\cos\alpha_2\cos\beta_3+\cos\alpha_3\cos\beta_2)=$$
$$=\lambda_2(\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3)$$

Но такъ какъ направленія $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ перпендикулярны между собою, то вторая часть предъидущаго уравненія равна нулю.

Слѣдовательно коэфиціентъ при yz такимъ преобразованіемъ уничтожается, точно также можно показать, что уничтожатся коэфиціенты при: xy и xz.

§ 553. Три корня уравненія (38) суть коэфиціенты при x, y и z въ преобразованномъ уравненіи:

$$b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2=H \tag{41}$$

Случай 1. Всѣ три корня положительные. Полагая:

$$\frac{H}{b_{11}}=a^2 \quad , \quad \frac{H}{b_{22}}=b^2 \quad , \quad \frac{H}{b_{33}}=c^2$$

уравненіе (41) сдѣлается:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{42}$$

Полагая, послѣдовательно, въ этомъ уравненіе:

$$y=0 \quad , \quad z=0 \quad ; \quad x=0 \quad , \quad z=0 \quad ; \quad x=0 \quad , \quad y=0$$

найдемъ:

$$x=\pm a \quad , \quad y=\pm b \quad , \quad z=\pm c$$

Слѣдовательно a, b, c суть разстоянія начала координатъ или центра поверхности отъ точекъ встрѣчи поверхности съ координатными осями. Эти разстоянія называются *главными осями* поверхности.

Если $a > b > c$, то a называется *большою*, b—*среднею*, а c—*малою* осью.

Легко видѣть изъ формы уравненія, что это поверхность замкнутая, такъ какъ ни одна изъ координатъ въ уравненіи не можетъ быть равна ∞. Она называется *эллипсоидомъ*.

Случай 2. Два корня положительные, одинъ отрицательный. Уравненіе (41) будетъ:

$$b_{11}x^2+b_{22}y^2-b_{33}z^2=H \tag{43}$$

Полагая:

$$\frac{H}{b_{11}}=a^2 \quad , \quad \frac{H}{b_{22}}=b^2 \quad , \quad \frac{H}{b_{33}}=c^2$$

уравненіе (41) приметъ форму:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Полагая, послѣдовательно:

$$y=0 \quad , \quad z=0 \quad ; \quad x=0 \quad , \quad z=0 \quad ; \quad x=0 \quad , \quad y=0$$

найдемъ:

$$x=\pm a \quad , \quad y=\pm b \quad , \quad z=\pm ci$$

т. е. оси x и y встрѣчаютъ поверхность, а ось z ее не встрѣчаетъ, поэтому a и b называется дѣйствительными осями поверхности, а c мнимою осью.

Если сдѣлаемъ $x=0$, то будемъ имѣть:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{44}$$

т. е. пересѣченіе плоскости YZ съ поверхностью есть гипербола, поэтому поверхность имѣетъ точки на безконечности, а слѣдовательно незамкнута. Это *однополый гиперболоидъ*.

Случай 3. Одинъ корень положительный, а два отрицательные.

Уравненіе будетъ:

$$b_{11}x^2 - b_{22}y^2 - b_{33}z^2 = H$$

дѣлая:

$$\frac{H}{b_{11}} = a^2 \quad , \quad \frac{H}{b_{22}} = b^2 \quad , \quad \frac{H}{b_{33}} = c^2$$

оно сдѣлается:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{45}$$

Полагая, послѣдовательно:

$$y = 0 \quad , \quad z = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad , \quad z = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad , \quad y = 0$$

найдемъ:

$$x = \pm a \quad , \quad y = \pm bi \quad , \quad z = \pm ci$$

откуда видимъ, что ось X встрѣчаетъ поверхность, а оси Y и Z ее невстрѣчаютъ, поэтому a называется дѣйствительною осью поверхности, а b и c мнимыми осями.

Если сдѣлаемъ $y = 0$ или $z = 0$, то получимъ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

двѣ гиперболы, какъ пересѣченіе плоскостей (XZ) и (XY) съ поверхностью. Откуда заключаемъ, что это поверхность незамкнутая. Легко видѣть, что она двуполая.

Въ самомъ дѣлѣ, если сдѣлать $x = 0$, то найдемъ мнимую кривую:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Слѣдовательно плоскость (YZ) не встрѣчаетъ поверхность, т. е. одна ея пола лежитъ по одну сторону плоскости $x = 0$, а другая по другую. Это *двуполый гиперболоидъ.*

Поверхности не имѣющія центра.

§ 554. Если поверхность втораго порядка не имѣетъ центра, т. е. какъ мы видѣли, центръ находится на безконечности, то координаты центра (§ 531):

$$x = \frac{A_{14}}{A_{44}} \quad , \quad y = \frac{A_{24}}{A_{44}} \quad , \quad z = \frac{A_{34}}{A_{44}}$$

равны безконечности, т. е. $A_{44}=0$. Но въ уравненіи (16) послѣдній членъ есть, очевидно, A_{44}, слѣдовательно одинъ изъ корней этого уравненія равенъ нулю.

Если поворотимъ координатныя оси параллельно главнымъ направленіямъ, т. е. преобразуемъ уравненіе линейнымъ подстановленіямъ (37), то уравненіе:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

сдѣлается:

$$\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2+2x(a_{14}\cos\alpha_1+a_{24}\cos\beta_1+a_{34}\cos\gamma_1)+2y(a_{14}\cos\alpha_2+a_{24}\cos\beta_2+$$
$$+a_{34}\cos\gamma_4)+2z(a_{14}\cos\alpha_2+a_{24}\cos\beta_3+a_{34}\cos\gamma_3)+H=0 \qquad (46)$$

Если теперь перенесемъ начало координатъ въ точку $(x_1\, y_1\, z_1)$, т. е. сдѣлаемъ подстановленіе $x+x_1$, $y+y_1$, $z+z_1$, то вообще можно такъ опредѣлить x_1, y_1, z_1, что коэфиціенты при z, y и величина H исчезнутъ, и уравненіе (46) сдѣлается:

$$\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2+2x(a_{14}\cos\alpha_1+a_{24}\cos\beta_1+a_{34}\cos\gamma_1)=0 \qquad (47)$$

Если коэфиціентъ при x неравенъ нулю, то означая его черезъ $-Q$, предъидущее уравненіе будетъ:

$$\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2=2Qx \qquad (48)$$

Корни λ_2 и λ_3 могутъ имѣть одинаковые знаки и могутъ имѣть разные.

Случай 1. Корни λ_2 и λ_3 оба положительные или оба отрицательные; въ обоихъ случаяхъ, полагая:

$$\frac{Q}{\lambda_2}=\frac{a}{b}\quad,\quad\frac{Q}{\lambda_3}=\frac{a}{c}$$

найдемъ:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm\frac{2x}{a} \qquad (49)$$

смотря потому будутъ-ли корни оба положительные или оба отрицательные. Поверхность эта есть *параболоидъ эллиптическій.*

Случай 2. Если корни имѣютъ разные знаки, то будемъ имѣть:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a}$$

Поверхность эта есть *параболоидъ гиперболическій.*

Это и всѣ поверхности не имѣющія центра.

Діаметральныя плоскости въ этомъ случаѣ будутъ:

$$a_{14}\cos\alpha_1+a_{24}\cos\beta_1+a_{34}\cos\gamma_1=0$$

$$\begin{aligned}\lambda_2(x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2)+a_{14}\cos\alpha_2+a_{24}\cos\beta_2+a_{34}\cos\gamma_2=0\\ \lambda_3(x\cos\alpha_3+y\cos\beta_3+z\cos\gamma_3)+a_{14}\cos\alpha_3+a_{24}\cos\beta_3+a_{34}\cos\gamma_3=0\end{aligned}\quad(50)$$

изъ коихъ первая находится на безконечности.

Поверхности имѣющія безконечное число центровъ.

§ 555. Выше мы предположили, что коэфиціентъ при x въ уравненіи (46) не равенъ нулю. Положимъ теперь, что:

$$a_{14}\cos_1+a_{24}\cos\beta_1+a_{34}\cos\gamma_1=0$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (46) не содержитъ x. Начало координатъ можемъ перенести въ точку $(y_1\,z_1)$ на плоскости (YZ) и выбрать y_1 и z_1 такъ, чтобы коэфиціенты при y и z исчезли и уравненіе (46) сдѣлается:

$$\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2=H \quad (51)$$

Это будетъ, очевидно цилиндрическая поверхность, коей ось есть ось X. Цилиндръ будетъ эллиптическій или гиперболическій, смотря потому будутъ-ли корни λ_2 и λ_3 съ одинаковыми знаками или съ разными. Если H будетъ величина положительная, а корни отрицательные, то поверхность будетъ мнимая. Центры такой поверхности всѣ лежатъ на ея оси X.

Въ этомъ случаѣ, первая изъ діаметральныхъ плоскостей (50) $0=0$ неопредѣленная, а пересѣченіе двухъ послѣднихъ дадутъ ось цилиндра или геометрическое мѣсто центровъ.

§ 556. Положимъ теперь, что одинъ изъ корней λ_2, λ_3 равенъ нулю, напримѣръ λ_2. Въ этомъ случаѣ уравненіе (46) сдѣлается:

$$\begin{aligned}\lambda_3 z^2+2x(a_{14}\cos\alpha_1+a_{24}\cos\beta_1+a_{34}\cos\gamma_1)+2y(a_{14}\cos\alpha_2+a_{24}\cos\beta_2+a_{34}\cos\gamma_2)+\\ +2z(a_{14}\cos\alpha_3+a_{24}\cos\beta_3+a_{34}\cos\gamma_3)+H=0\end{aligned}\quad(52)$$

Можно направленіе $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ такъ выбрать, чтобы:

$$a_{14}\cos\alpha_2+a_{24}\cos\beta_2+a_{34}\cos\gamma_2=0$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе (52) сдѣлается:

$$\begin{aligned}\lambda_3 z^2 + 2x(a_{14}\cos\alpha_1 + a_{24}\cos\beta_1 + a_{34}\cos\gamma_1) + \\ + 2z(a_{14}\cos\alpha_2 + a_{24}\cos\beta_3 + a_{34}\cos\gamma_3) + H = 0\end{aligned} \tag{53}$$

Можетъ случиться, что коэфиціентъ при x равенъ также нулю, въ этомъ случаѣ уравненіе (53) будетъ:

$$\lambda_3 z^2 + 2z(a_{14}\cos\alpha_3 + a_{24}\cos\beta_3 + a_{34}\cos\gamma_3) + H = 0$$

Перенося координаты параллельно самимъ себѣ, уравненіямъ (52) и (53), можно дать форму:

$$\lambda_3 z^2 + 2x(a_{14}\cos\alpha_1 + a_{24}\cos\beta_1 + a_{34}\cos\gamma_1) = 0 \tag{54}$$

$$\lambda_3 z^2 + K = 0 \tag{55}$$

Первое есть параболическія цилиндръ, а второе двѣ параллельныя плоскости. K есть постоянная величина.

Въ первомъ случаѣ одна изъ діаметральныхъ плоскостей, сопряженная направленію $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ находится на безконечности, а сопряженная направленію $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ неопредѣленная. Во второмъ случаѣ первыя двѣ діаметральныя плоскости неопредѣленны, а послѣдняя есть геометрическое мѣсто центровъ поверхности.

Но когда два корня уравненія (17) равны нулю, то имѣемъ:

$$a_{11} = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}\quad,\quad a_{22} = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\quad,\quad a_{33} = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

Подставляя эти выраженія въ уравненія (12) найдемъ, что онѣ сливаются въ одно:

$$a_{12}a_{13}\cos\alpha + a_{12}a_{22}\cos\beta + a_{13}a_{23}\cos\gamma = 0$$

Слѣдовательно есть безчисленное множество главныхъ направленій, соотвѣтствующихъ корнямъ равнымъ нулю въ сопряженной направленію $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ діаметральной плоскости.

Это и всѣ поверхности, которыя представляетъ уравненіе второй степени между тремя координатами.

Если бы мы имѣли въ одно время:

$$a_{11} + a_{32} + a_{23} = 0$$

$$a_{11}a_{32} + a_{11}a_{33} + a_{32}a_{33} - a^2_{12} - a^2_{13} - a^2_{23} = 0$$

$$a_{11}a^2_{23} + a_{22}a^2_{13} + a_{33}a^2_{12} - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23} = 0$$

то три корня уравненія (17) равны нулю. Возвысимъ первое изъ этихъ уравненій въ квадратъ и складывая со вторымъ, умноживъ его сначала на 2, найдемъ:

$$a^2_{11}+a^2_{22}+a^2_{33}+2a^2_{12}+2a^2_{13}+2a^2_{23}=0$$

что можетъ быть только тогда, когда:

$$a_{11}=0\quad,\quad a_{22}=0\quad,\quad a_{33}=0\quad,\quad a_{12}=0\quad,\quad a_{13}=0\quad,\quad a_{23}=0$$

но въ этомъ случаѣ уравненіе поверхности не будетъ второй степени. Слѣдовательно невозможно, чтобы три корня λ_1, λ_2, λ_3 были въ одно время равны нулю. Изъ этого заключаемъ, что въ поверхности втораго порядка, существуетъ, покрайней мѣрѣ, хоть одна діаметральная плоскость въ конечномъ разстояніи.

Поверхности вращенія.

§ 557. *Поверхность вращенія*, около извѣстной прямой называемой *осью вращенія*, есть такая поверхность, которой пересѣченіе съ плоскостью перпендикулярной къ оси вращенія есть всегда кругъ, коего центръ находится на оси.

Если уравненіе второй степени, выраженное въ пряноугольныхъ координатахъ, можетъ быть преобразовано въ форму:

$$\alpha_{11}x^2+\alpha_{22}y^2+\alpha_{33}z^2+2\alpha_{14}x+2\alpha_{24}y+2\alpha_{24}z+\alpha_{44}=0 \qquad (56)$$

въ которой два коэфиціента при перенѣнныхъ въ квадратѣ равны, то это есть поверхность вращенія. Пусть напримѣръ: $\alpha_{11}=\alpha_{22}$. Полагая $z=k$ пересѣкаемъ поверхность плоскостью перпендикулярною къ оси Z и проэкція этого пересѣченія на плоскости (XY) будетъ:

$$\alpha_{11}(y^2+z^2)+2\alpha_{14}x+2\alpha_{24}y+\alpha_{33}k^2+2\alpha_{24}k+\alpha_{24}=0 \qquad (57)$$

Очевидно, что это есть кругъ, коего координаты центра

$$\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}}\quad,\quad -\frac{\alpha_{24}}{\alpha_{11}}$$

независятъ отъ k; слѣдовательно пересѣченія поверхности съ плоскостью, которая перемѣщается параллельно плоскости (XY), суть круги, коихъ центры находятся на прямой параллельной оси Z и коей координаты точки пересѣченія съ плоскостью (XY), суть: $-\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}}$, $-\frac{\alpha_{24}}{\alpha_{11}}$. Слѣдовательно ось вращенія поверхности есть эта прямая.

Обратно, если общее уравненіе второй степени представляетъ поверхность вращенія, то ему можно дать форму (56). Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ за ось Z прямую параллельную оси вращенія, а за другія двѣ оси перпендикулярныя прямыя. Пусть въ этомъ предположеніи уравненіе поверхности будетъ:

$$\alpha_{11}x^2+\alpha_{22}y^2+\alpha_{33}z^2+2\alpha_{12}xy+2\alpha_{13}xz+2\alpha_{23}yz+2\alpha_{14}x+2\alpha_{24}y+2\alpha_{34}z+\alpha_{44}=0$$

Проэкція кривой пересѣченія этой поверхности съ плоскостью $z=k$ на плоскости (XY) будетъ:

$$\alpha_{11}x^2+\alpha_{22}y^2+2\alpha_{12}xy+2\alpha_{13}kx+2\alpha_{23}ky+2\alpha_{14}x+2\alpha_{24}y+2\alpha_{34}k+\alpha_{33}k^2+\alpha_{44}=0$$

чтобы это уравненіе представляло кругъ необходимо:

$$\alpha_{11}=\alpha_{22} \quad , \quad \alpha_{12}=0$$

Если k будетъ перемѣнное, то предъидущее уравненіе должно представлять круги, коихъ центры находятся на одной и той-же прямой; но координаты центра суть:

$$-\frac{\alpha_{13}k+\alpha_{14}}{\alpha_{11}} \quad , \quad -\frac{\alpha_{23}k+\alpha_{24}}{\alpha_{11}}$$

Слѣдовательно мы должны имѣть $\alpha_{13}=0$, $\alpha_{23}=0$. Такимъ образомъ въ уравненіи нѣтъ членовъ xy, yz, xz, а коэфиціенты при x^2 и y^2 равны, слѣдовательно оно имѣетъ форму (57).

§ 558. Мы видѣли, что уравненіе поверхности втораго порядка, отнесенное къ прямоугольной системѣ координатъ:

$$\begin{aligned}&a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+\\&+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\end{aligned} \tag{58}$$

подстановленіями вмѣсто x, y, z выраженій:

$$\begin{aligned}&x\cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_2\\&x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_2\\&x\cos\gamma_1+y\cos\gamma_2+z\cos\gamma_3\end{aligned} \tag{59}$$

гдѣ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_2, \gamma_3$ суть направленія *главныхъ осей*, преобразуется въ:

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+2\alpha_{14}x+2\alpha_{34}y+2\alpha_{24}z+\alpha_{44}=0 \tag{60}$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ суть корни уравненія (16).

Если теперь корни λ_1 и λ_2 будутъ равны, то уравненіе (60) будетъ представлять поверхность вращенія, какъ мы показали въ § 557.

Но если уравненіе (16) имѣетъ двойной корень, то имѣемъ (30):

$$a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} \tag{61}$$

слѣдовательно это есть условіе, необходимое и достаточное, чтобы уравненіе (58) представляло поверхность вращенія. Мы видѣли (§ 557), что одинъ изъ двухъ равныхъ корней, напримѣръ, λ_1, равенъ выраженіямъ (61), слѣдовательно имѣемъ:

$$a_{11} - \lambda_1 = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} \quad , \quad a_{22} - \lambda_1 = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \quad , \quad a_{33} - \lambda_1 = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} \tag{62}$$

подставляя эти выраженія въ уравненія (13), найдемъ, что эти три уравненія тождественны:

$$a_{12}a_{13}\cos\alpha_1 + a_{12}a_{13}\cos\beta_1 + a_{13}a_{23}\cos\gamma_1 = 0 \tag{63}$$

Откуда видимъ, что главныхъ направленій, соотвѣтствующихъ двойному корню, есть безчисленное множество и всѣ онѣ, очевидно находятся въ плоскости:

$$a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z = 0 \tag{64}$$

или:

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{13}} + \frac{z}{a_{12}} = 0 \tag{65}$$

Всѣ эти направленія перпендикулярны къ направленію $\alpha_2, \beta_3, \gamma_3$ опредѣленному третьимъ корнемъ λ_3.

Сопряженная направленію $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ діаметральная плоскость, какъ мы видѣли есть (34):

$$\lambda_3(x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3) + a_{14}\cos\alpha_3 + a_{24}\cos\beta_3 + a_{34}\cos\gamma_3 = 0 \tag{66}$$

которая сдѣлается, если вмѣсто $\cos\alpha_2, \cos\beta_3, \cos\gamma_3$ подставимъ выраженія (23):

$$\lambda_3(a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z) + a_{12}a_{13}a_{14} + a_{12}a_{23}a_{24} + a_{13}a_{23}a_{34} = 0 \tag{67}$$

или:

$$\frac{x}{a_{23}} + \frac{y}{a_{13}} + \frac{z}{a_{12}} + \frac{1}{\lambda_3}\left(\frac{a_{14}}{a_{23}} + \frac{a_{24}}{a_{13}} + \frac{a_{34}}{a_{12}}\right) = 0 \tag{68}$$

слѣдовательно ось вращенія будетъ перпендикулярна къ этой плоскости. Если поверхность будетъ центральная, то координаты центра удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0$$

подставляя вмѣсто a_{11}, a_{22}, a_{33} ихъ выраженія (62), найдемъ:

$$\begin{aligned} a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z + a_{23}(\lambda_1 x + a_{14}) &= 0 \\ a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z + a_{13}(\lambda_1 y + a_{24}) &= 0 \\ a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z + a_{12}(\lambda_1 z + a_{34}) &= 0 \end{aligned} \tag{69}$$

Слѣдовательно координаты центра удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$a_{23}(\lambda_1 x + a_{14}) = a_{13}(\lambda_1 y + a_{24}) = a_{12}(\lambda_1 z + a_{34}) \tag{70}$$

которыя представляютъ прямую, проходящую черезъ центръ и перпендикулярную къ діаметральной плоскости, сопряженной направленія $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Условія (61) невозможны, если какой-нибудь изъ коэфиціентовъ a_{12}, a_{13}, a_{23} равенъ нулю, но если два изъ этихъ коэфиціентовъ равны нулю, напримѣръ $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$, то уравненіе (15) сдѣлается:

$$(a_{11} - \lambda)\left\{(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a^2_{23}\right\} = 0 \tag{71}$$

Одинъ изъ корней этаго уравненія есть a_{11} и если онъ удовлетворитъ и уравненіе:

$$(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a^2_{23} = 0 \tag{72}$$

то онъ будетъ двойной корень; поверхность будетъ поверхностью вращенія, если при условіяхъ $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$ имѣемъ:

$$a^2_{23} = (a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{23})$$

Второй корень квадратнаго уравненія (72) будетъ:

$$a_{22} + a_{33} - a_{11}$$

подставляя его въ уравненія (12), найдемъ уравненія для опредѣленія направленія оси вращенія:

$$\cos\alpha = 0 \quad , \quad \frac{\cos\beta}{a_{11} - a_{22}} + \frac{\cos\gamma}{a_{23}} = 0$$

§ 559. Если поверхность будетъ поверхностью вращенія, то всякая плоскость перпендикулярная къ оси вращенія, пересѣкаетъ ее по кругу. Если въ кругѣ проведемъ, какую-нибудь хорду, то плоскость, проходящая черезъ ось вращенія и середину хорды, перпендикулярна къ хордѣ, слѣдовательно каждую плоскость, проходящую черезъ ось вращенія, можно разсматривать, какъ *главную*. Это замѣчаніе сейчасъ даетъ условіе (61). Въ самомъ дѣлѣ, выражая, что уравненія (13) § 546 тождественны, такъ какъ есть безконечное число *главныхъ направленій*, будемъ имѣть:

$$\frac{a_{11}-\lambda}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}-\lambda}=\frac{a_{13}}{a_{23}}\quad,\quad\frac{a_{11}-\lambda}{a_{13}}=\frac{a_{12}}{a_{23}}=\frac{a_{13}}{a_{33}-\lambda}$$

откуда:

$$a_{11}-\lambda=\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}\quad,\quad a_{22}-\lambda=\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\quad,\quad a_{33}-\lambda=\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

исключая λ, найдемъ условія (61):

$$a_{11}-\frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

§ 560. Такъ какъ кубическое уравненіе (16) § 546 имѣетъ всегда три корня дѣйствительные, то можно судить о родѣ поверхности по знакамъ его членовъ.

1. Если всѣ члены въ уравненія положительны, то всѣ его корни будутъ отрицательны, если же знаки идутъ по перемѣнно, то всѣ его корни будутъ положительные (теорема Декарта). Въ обоихъ случаяхъ поверхность будетъ или дѣйствительный или мнимый *эллипсоидъ*.

2. Если знаки расположены не въ вышесказанномъ порядкѣ, то каждой перемѣнѣ соотвѣтствуетъ положительный корень, а каждому повторенію знаковъ—отрицательный. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ поверхность будетъ одинъ изъ *гиперболоидовъ*.

3. Если въ квадратномъ уравненіи, въ которое обращается кубическое, въ неимѣющихъ центра поверхностяхъ, знаки членовъ одинаковы или идутъ поперемѣнно, то поверхность будетъ, въ первомъ случаѣ *параболоидъ эллиптическій*, а ко второмъ *параболоидъ гиперболическій*.

4. Для *цилиндрическаго параболоида* кубическое уравненіе обращается въ уравненіе первой степени, такъ какъ два его корня равны нулю.

Пр. 1. Какая поверхность представляется уравненіемъ:

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6=0$$

Соотвѣтствующее кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$$

Знаки идутъ попеременно, слѣдовательно это одинъ изъ эллипсоидовъ. Корни этого уравненія суть:

$$\lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = 6 \quad , \quad \lambda_3 = 9$$

Преобразованное уравненіе будетъ:

$$3x^2 + 6y^2 + 9z^2 = 6$$

или:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2$$

эллипсоидъ, коего оси суть:

$$a = \sqrt{2} \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Пр. 2. Какую поверхность представляетъ уравненіе:

$$11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy + 4xz - 8yz - 12 = 0$$

Соотвѣтствующее кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 27\lambda^2 + 180\lambda - 324 = 0$$

По знакамъ это одинъ изъ эллипсоидовъ. Корни этого уравненія суть:

$$\lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = 6 \quad , \quad \lambda_3 = 18$$

Преобразованное уравненіе:

$$x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 4$$

эллипсоидъ.

Пр. 3. Какую поверхность представляетъ уравненіе:

$$7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy - 12xz + 12yz + 84 = 0$$

Кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 343\lambda - 2058 = 0$$

Корни этого уравненія суть:

$$\lambda_1 = -7 \quad , \quad \lambda_2 = -14 \quad , \quad \lambda_3 = +21$$

Преобразованное уравненіе:

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = \pm 12$$

Это будетъ однополый или двуполый гиперболоидъ, смотря по знаку второй части.

Пр. 4. Какую поверхность представляетъ уравненіе:

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 8xz + 4yz - 8 = 0$$

Кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

Въ этомъ уравненіи два корня положительные и одинъ отрицательный, слѣдовательно это одинъ изъ гиперболоидовъ.

Пр. 5. Какую поверхность представляетъ уравненіе:

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

Кубическое уравненіе будетъ:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0$$

или:

$$\lambda(\lambda^2 - 5\lambda - 14) = 0$$

Одинъ изъ корней равенъ нулю, слѣдовательно это одинъ изъ параболоидовъ. По знакамъ квадратнаго уравненія — это параболоидъ гиперболическій. Корни кубическаго уравненія суть:

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 7 \quad , \quad \lambda_3 = -2$$

Преобразованное уравненіе поверхности есть:

$$7x^2 - 2y^2 = \frac{8z}{\sqrt{14}}$$

§ 561. Вотъ еще одно доказательство дѣйствительности корней кубическаго уравненія (16) § 546. Пусть два его корня будутъ:

$$\lambda_2 = a_2 + b_2 i \quad , \quad \lambda_3 = a_2 - b_2 i$$

третій всегда дѣйствительный.

Уравненія (12) § 546 дадутъ, очевидно, для косинусовъ угловъ главныхъ направленій, выраженія формы:

$$\cos\alpha_2 = \mu_2 + \nu_2 i \quad , \quad \cos\beta_2 = \delta_2 + \omega_2 i \quad , \quad \cos\gamma_2 = \rho_2 + \sigma_2 i$$

$$\cos\alpha_3 = \mu_2 - \nu_2 i \quad , \quad \cos\beta_3 = \delta_2 - \omega_2 i \quad , \quad \cos\gamma_3 = \rho_2 - \sigma_2 i$$

Но въ этомъ случаѣ условіе:

$$\cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\beta_2 \cos\beta_3 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 = 0$$

обращается въ:

$$\mu^2_2 + \nu^2_2 + \delta^2_2 + \omega^2_2 + \rho^2_2 + \sigma^2_2 = 0$$

и это возможно только при условіи:

$$\mu_2 = 0 \quad , \quad \nu_2 = 0 \quad , \quad \delta_2 = 0 \quad , \quad \omega_2 = 0 \quad , \quad \rho_2 = 0 \quad , \quad \sigma_2 = 0$$

Но при этомъ значеніи нельзя удовлетворить уравненіе:

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$

Слѣдовательно невозможно, чтобы кубическое уравненіе имѣло мнимые корни.

ГЛАВА XXXVI.

Свойства центральныхъ поверхностей.

§ 562. Теперь остается изслѣдовать отдѣльно свойства каждой изъ центральныхъ поверхностей и поверхностей неимѣющихъ центра. Мы видѣли, что уравненія всѣхъ центральныхъ поверхностей приводятся къ формѣ:

$$b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 = H$$

Если H есть величина постоянная, а коэфиціенты b_{11}, b_{22}, b_{33} будутъ всѣ три положительные или отрицательные, то поверхность будетъ, въ этомъ случаѣ, *эллипсоидъ дѣйствительный*, а во второмъ *эллипсоидъ мнимый*.

Если два изъ коэфиціентовъ b_{11}, b_{22}, b_{33}, какіе бы то нибыло, будутъ положительные, а одинъ отрицательный, то поверхность будетъ *однополый гиперболоидъ*.

Если одинъ изъ коэфиціентовъ b_{11}, b_{22}, b_{33}, какой-бы то нибыло, будетъ положительный, а два отрицательные, то это будетъ *двуполый гиперболоидъ*.

Эллипсоидъ.

§ 563. Въ § 553 мы дали уравненію эллипсоида слѣдующую форму:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

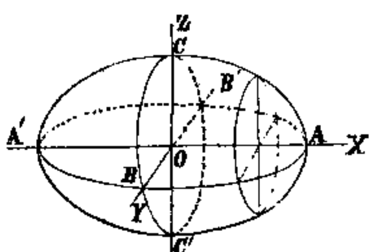
или:

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \tag{2}$$

Полагая въ уравненіи (1):

$$y = 0 \quad , \quad z = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad , \quad z = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad , \quad y = 0$$

Фиг. 162.



найдемъ:

$$x = \pm a \quad , \quad y = \pm b \quad , \quad z = \pm c$$

Это суть точки A и A', B и B', C и C', въ которыхъ координатныя оси X, Y, Z (фиг. 162) встрѣчаютъ поверхность.

Эти точки называются *вершинами* эллипсоида, при чемъ $2a = AA'$ называется *большею* осью, $2b = BB'$ — *среднею*, а $2c = CC'$ — *малою*, если $a > b > c$.

§ 564. Если вмѣсто координатъ x, y, z подставимъ въ уравненіе (1):

$$x = \rho\cos\alpha \quad , \quad y = \rho\cos\beta \quad , \quad z = \rho\cos\gamma$$

то найдемъ, замѣчая, что:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

слѣдующее:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\beta + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\gamma \tag{3}$$

Такъ какъ, по условію, $a > b > c$, то $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, $\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$, слѣдовательно два послѣдніе члена второй части уравненія (3) суть всегда положительные, а вторая его часть будетъ *наименьшая*, когда:

$$\cos\beta = 0 \quad \text{и} \quad \cos\gamma = 0$$

т. е. когда направленіе радіуса вектора ρ совпадаетъ съ осью X. Но, когда вторая часть будетъ наименьшая, то $\rho = a$ будетъ *наибольшее*, слѣдовательно вершины A и A' эллипсоида суть самыя отдаленныя точки отъ начала координатъ или отъ центра. Легко показать, что C и C' будутъ самыя ближайшія точки отъ центра поверхности.

§ 565. Если въ уравненіи (1) сдѣлаемъ, послѣдовательно, $z=0$, $y=0$, $x = 0$, то найдемъ пересѣченія поверхности съ координатными плоскостями XY, XZ, YZ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{4}$$

это суть эллипсы, проходящіе черезъ вершины эллипсоида. Полагая въ уравненіи (1) $z = \alpha$, найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2}\right)} = 1 \tag{5}$$

Слѣдовательно пересѣченіе эллипсоида съ плоскостью $z = \alpha$ есть эллипсъ, коего оси суть:

$$a\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2}} \quad , \quad b\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{c^2}} \tag{6}$$

Пока $\alpha < c$ эллипсъ будетъ дѣйствительный, его оси будутъ уменьшаться, по мѣрѣ возрастанія α отъ нуля до c. Въ вершинѣ эллипсъ обращается въ нуль, а затѣмъ для всѣхъ значеній $\alpha > c$ будетъ мнимый. Поверхность не распространяется дальше вершины C. Точно такіе-же результаты получимъ, пересѣкая эллипсоидъ плоскостями параллельными плоскостямъ XZ и YZ.

Найдемъ теперь пересѣченіе, какой-нибудь, плоскости:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \tag{7}$$

съ поверхностью. Подставимъ вмѣсто z въ уравненіе (1) его выраженіе (7), то найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)^2}{c^2} = 1 \tag{8}$$

Составляя выраженіе $a^2_{12} - a_{11}a_{22}$ (§ 236), найдемъ:

$$-\left(\frac{\alpha^2}{b^2c^2} + \frac{\beta^2}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right) \tag{9}$$

величина всегда отрицательная, слѣдовательно уравненіе (8) представляетъ эллипсъ на плоскости XY, какіе бы нибыли коэфиціенты α, β, γ. Но этотъ эллипсъ есть проэкція кривой пересѣченія плоскости (7) съ поверхностью (1), которая, очевидно, будетъ также эллипсъ. Слѣдовательно пересѣченіе всякой плоскости съ эллипсоидомъ есть эллипсъ. Откуда заключаемъ, что эллипсоидъ есть *замкнутая* поверхность.

Замѣтимъ, что эллипсы, полученные отъ пересѣченія поверхности параллельными плоскостями, подобны, такъ какъ члены второй степени въ уравненіи (8) не зависятъ отъ γ, съ измѣненіемъ котораго плоскость (7) переносится параллельно самой себѣ. Это свойство принадлежитъ всѣмъ поверхностямъ втораго порядка.

§ 566. *Круговыя сѣченія.* Пересѣчемъ эллипсоидъ плоскостью, проходящей по средней оси b. Если эта плоскость совпадетъ съ плоскостью XY, то оси эллипса будутъ a и b, а если плоскость совпадаетъ съ плоскостью YZ, то оси эллипса будутъ b и c. Ось b остается постоянною, а другая будетъ измѣняться съ наклоненіемъ плоскости сѣченія отъ c до a, слѣдовательно есть такое положеніе сѣкущей плоскости, при которомъ другая ось эллипса будетъ равна b, а если обѣ оси въ эллипсѣ равны, то онъ будетъ кругомъ.

Итакъ видимъ, что есть такое положеніе сѣкущей плоскости, при которомъ пересѣченіе ея съ эллипсоидомъ есть кругъ. Если есть хоть од-

но положеніе сѣкущей плоскости, которое даетъ кругъ, то пересѣченія всѣхъ плоскостей, параллельныхъ этому направленію плоскости, съ поверхностью, будутъ круги, такъ какъ выше замѣтили, что всѣ сѣченія параллельными плоскостями подобны.

Убѣдившись въ этомъ, пересѣчемъ эллипсоидъ плоскостью, проходящей черезъ его центръ и положимъ, что это сѣченіе есть кругъ, коего радіусъ назовемъ r. Этотъ кругъ будетъ находиться на шарѣ, коего центръ находится въ началѣ координатъ, а уравненіе есть:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

или:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$

Если это уравненіе вычтемъ изъ уравненія (1), то найдемъ:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0 \qquad (10)$$

Это есть уравненіе поверхности, проходящей черезъ пересѣченіе эллипсоида съ шаромъ, а какъ оно однородное и втораго порядка, то это конусъ, коего вершина находится въ центрѣ. Чтобы эллипсоидъ и шаръ имѣли пересѣченіемъ кругъ, необходимо, чтобы конусъ (10) преобразовался въ двѣ плоскости, проходящія черезъ начало, а это требуетъ, чтобы одинъ изъ членовъ уравненія конуса (10) исчезъ. Одинъ изъ членовъ исчезнетъ если положимъ $r=a$, $r=b$, $r=c$; при этихъ положеніяхъ уравненія конусовъ сдѣлаются:

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0 \qquad (11)$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)=0$$

полагая $a>b>c$ первое и третее уравненія представляютъ мнимыя плоскости, а второе преобразуется въ форму:

$$\frac{x}{a}=\pm\frac{z}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}} \qquad (12)$$

которая представляетъ двѣ плоскости, проходящія по средней оси поверхности.

Если означимъ черезъ φ наклоненіе этихъ плоскостей къ плоскости XY, то будемъ имѣть:

$$\cos\varphi = \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \quad , \quad \sin\varphi = \pm \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \tag{13}$$

а слѣдовательно:

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}} \tag{14}$$

Изъ этого видимъ, что въ эллипсоидѣ есть два ряда сѣченій, дающихъ кругъ. Плоскости сѣченій параллельны средней оси b и наклонены къ плоскости XY подъ углами (14).

Когда плоскости круговыхъ сѣченій, будутъ переноситься, отдаляясь отъ центра, параллельно самимъ себѣ, то круги будутъ дѣлаться все меньше и меньше, наконецъ, когда плоскости сѣченій коснутся поверхности, то круги обращаются въ точки, которыя называются *круглячками эллипсоида* или *омбиликами* (ombilic, point ombilical); такихъ кругляччковъ на поверхности эллипсоида четыре. Координаты этихъ точекъ легко найти.

Легко видѣть, что кругляченкъ будетъ находиться на эллипсѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{15}$$

въ концѣ діаметра, сопряженнаго діаметру равному b въ эллипсѣ (15). Но мы знаемъ, что:

$$b^2 = a^2 - c^2x'^2 = a^2 - \frac{a^2-c^2}{a^2}x'^2$$

откуда:

$$x' = \pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z' = \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \tag{16}$$

суть координаты четырехъ кругляччковъ.

§ 567. Если въ уравненіе (1) эллипсоида $a = b$, то оно сдѣлается:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

изъ котораго видимъ, что всѣ плоскости перпендикулярныя къ оси Z пересѣкаютъ поверхность по кругамъ, слѣдовательно поверхность есть эллипсоидъ вращенія около оси Z.

Если:

$$a = b = c$$

то эллипсоидъ будетъ шаръ:

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

Если $c=\infty$ или корень уравненія (16) § 546, $\lambda_3=0$, то эллипсоидъ обращается въ эллиптическій цилиндръ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Наконецъ, если и другой корень $\lambda_2=0$, то будемъ имѣть двѣ плоскости:

$$x=\pm a$$

§ 568. Координаты точекъ поверхности эллипсоида заключены въ предѣлахъ $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$.

Поэтому можно положить:

$$x=a.\cos\alpha \quad , \quad y=b.\cos\beta \quad , \quad z=c.\cos\gamma$$

подставляя въ уравненіе (1) найдемъ, что:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

откуда видимъ, что α, β, γ суть углы, которые составляетъ съ координатными осями прямая, проходящая черезъ начало, къ нѣкоторой точкѣ поверхности. Каждой точкѣ поверхности соотвѣтствуетъ прямая (α, β, γ) и обратно. Въ вершинѣ A, гдѣ $x=a$, $y=0$, $z=0$ имѣемъ:

$$\cos\alpha=1 \quad , \quad \cos\beta=0 \quad , \quad \cos\gamma=0$$

слѣдовательно прямая направляется по оси X. Но это исключительный случай, въ которомъ прямая проходитъ черезъ соотвѣтственную точку на поверхности.

Если черезъ центръ проведемъ двѣ перпендикулярныя прямыя $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, то:

$$\cos\alpha'\cos\alpha''+\cos\beta'\cos\beta''+\cos\gamma'\cos\gamma''=0 \tag{17}$$

а соотвѣтствующія точки $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ удовлетворяютъ уравненіе:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2}+\frac{y_1 y_2}{b^2}+\frac{z_1 z_2}{c^2}=0 \tag{18}$$

Обратно, если координаты двухъ точекъ на поверхности удовлетворяютъ

уравненіе (18), то соотвѣтствующіе углы будутъ удовлетворять уравненіе (17). Длина діаметра, проходящаго черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$, будетъ:

$$r^2 = x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 = a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma'$$

α, β и γ называются *угловыми координатами*.

§ 569. *Касательная плоскость*. Въ § 514, (36) мы нашли уравненіе касательной плоскости къ поверхности втораго порядка $f=0$ въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$:

$$(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (y-y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + (z-z_1)\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \tag{19}$$

откуда для эллипсоида имѣемъ:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1 \tag{20}$$

гдѣ:

$$\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} + \frac{z^2_1}{c^2} = 1 \tag{21}$$

Если точка $(x_1 y_1 z_1)$ не удовлетворяетъ уравненіе (21), т. е. если она находится внѣ или внутри поверхности, то (20) будетъ уравненіе *полярной* плоскости, коей полюсъ есть точка $(x_1 y_1 z_1)$.

Въ угловыхъ координатахъ уравненіе (20) сдѣлается:

$$\frac{x}{a}\cos\alpha' + \frac{y}{b}\cos\beta' + \frac{z}{c}\cos\gamma' = 1 \tag{22}$$

Означимъ черезъ p перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на касательную плоскость (20). Пусть α, β, γ будутъ углы, которые p составляетъ съ осями X, Y, Z, то уравненіе касательной плоскости можно написать такъ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \tag{23}$$

Сравнивая съ (20) и (22), найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{\cos\alpha}{p} \quad , \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{\cos\beta}{p} \quad , \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{\cos\gamma}{p} \tag{24}$$

$$\frac{\cos\alpha'}{a} = \frac{\cos\alpha}{p} \quad , \quad \frac{\cos\beta'}{b} = \frac{\cos\beta}{p} \quad , \quad \frac{\cos\gamma'}{c} = \frac{\cos\gamma}{p} \tag{25}$$

откуда найдемъ:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2_1}{a^4} + \frac{y^2_1}{b^4} + \frac{z^2_1}{c^4} \quad , \quad \frac{1}{p^2} = \frac{\cos^2\alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{c^2} \tag{26}$$

Предложеніе. Если изъ центра эллипсоида опустимъ перпендикуляры на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости къ поверхности, то сумма квадратовъ этихъ перпендикуляровъ будетъ величина постоянная.

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ будутъ направленія трехъ перпендикуляровъ p_1, p_2, p_3, то будемъ имѣть (24):

$$p^2_1 = a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\cos^2\beta_1 + c^2\cos^2\gamma_1$$
$$p^2_2 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\cos^2\beta_2 + c^2\cos^2\gamma_2$$
$$p^2_3 = a^2\cos^2\alpha_3 + b^2\cos^2\beta_3 + c^2\cos^2\gamma_3$$

складывая и замѣчая, что:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_3 = 1$$

найдемъ:

$$p^2_1 + p^2_2 + p^2_3 = a^2 + b^2 + c^2 \tag{27}$$

Слѣдствіе. Отсюда слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто вершинъ прямоугольнаго трегранняго угла, описаннаго около эллипсоида, есть шаръ, коего радіусъ есть $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

§ 570. *Нормальная линія.* Перпендикуляръ къ касательной плоскости въ точкѣ касанія называется *нормалью* къ поверхности. Его уравненія суть (§ 515):

$$\frac{x-x_1}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y-y_1}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z-z_1}{\frac{z}{c^2}} \tag{28}$$

или:

$$(x-x_1)\frac{a^2}{x_1} = (y-y_1)\frac{b^2}{y_1} = (z-z_1)\frac{c^2}{z_1} \tag{29}$$

Задача. Сколько можно провесть нормальныхъ линій къ эллипсоиду черезъ данную точку внѣ его?

Рѣшеніе. Пусть координаты данной точки будутъ x', y', z'. Черезъ точку $(x'y'z')$ проведемъ нормаль къ поверхности, пусть ея точка встрѣчи съ поверхностью будетъ $(x_1y_1z_1)$.

Координаты x_1, y_1, z_1 будутъ удовлетворять уравненія:

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}} \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{30}$$

Пусть:

$$\frac{x'-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y'-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z'-z_1}{\frac{z_1}{c^2}}=k$$

откуда, найдемъ:

$$x_1=\frac{a^2x'}{a^2+k}\quad,\quad y_1=\frac{b^2y'}{b^2+k}\quad,\quad z_1=\frac{c^2z'}{a^2+k} \tag{31}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе эллипсоида, найдемъ:

$$\frac{a^2x'^2}{(a^2+k)^2}+\frac{b^2y'^2}{(b^2+k)^2}+\frac{c^2z'^2}{(c^2+k)^2}=1$$

или:

$$(a^2+k)^2(b^2+k)^2(c^2+k)^2-a^2(b^2+k)^2(c^2+k)^2x'^2-$$

$$-b^2(a^2+k)^2(c^2+k)^2y'^2-c^2(a^2+k)^2(b^2+k)^2z'^2=0 \tag{32}$$

Это уравненіе шестой степени относительно k, оно всегда имѣетъ два дѣйствительные корня, такъ какъ, полагая послѣдовательно $k=-\infty, -a^2, +\infty$, получимъ результаты:

$$+\;-\;+$$

Перенося начало координатъ въ точку $(x'y'z')$, назовемъ новыя координаты точки $(x_1y_1z_1)$ черезъ u, v, w, то уравненія нормали сдѣлаются (28):

$$\frac{u}{\frac{u+x'}{a^2}}=\frac{v}{\frac{v+y'}{b^2}}=\frac{w}{\frac{w+z'}{c^2}}$$

откуда получимъ:

$$\frac{u(v+y')}{b^2}=\frac{v(u+x')}{a^2}\quad,\quad\frac{u(w+z')}{c^2}=\frac{w(u+x')}{a^2}\quad,\quad\frac{v(w+z')}{c^2}=\frac{w(v+y')}{b^2}$$

или:

$$(a^2-b^2)uv=b^2x'v-a^2y'u$$

$$(c^2-a^2)uw=a^2z'u-c^2x'w$$

$$(b^2-c^2)vw=c^2y'w-b^2z'v$$

Умножая эти уравненія на z', y', x' и складывая, найдемъ:

$$x'(b^2-c^2)vw+y'(c^2-a^2)uw+z'(a^2-b^2)uv=0$$

или:

$$x'(b^2-c^2)yz+y'(c^2-a^2)xz+z'(a^2-b^2)xy=0 \tag{33}$$

а это есть конусъ (34) § 535. Слѣдовательно черезъ данную точку внѣ эллипсоида можно провесть шесть нормальныхъ линій къ поверхности, изъ коихъ двѣ всегда дѣйствительны; всѣ шесть нормальныя линіи лежатъ на поверхности конуса, коего вершина находится въ данной точкѣ x', y', z'.

§ 571. *Діаметральная плоскость.* Если черезъ α, β, γ означимъ направленіе прямой, проходящей черезъ центръ эллипсоида, то уравненіе діаметральной, сопряженной этому направленію, плоскости будетъ:

$$\frac{x}{a^2}\cos\alpha + \frac{y}{b^2}\cos\beta + \frac{z}{c^2}\cos\gamma = 0 \tag{34}$$

Пусть x_1, y_1, z_1 будутъ координаты точки встрѣчи прямой $(\alpha\beta\gamma)$ съ поверхностью, то:

$$\frac{x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_1}{\cos\beta} = \frac{z_1}{\cos\gamma} \tag{35}$$

откуда уравненіе (34) сдѣлается:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 0 \tag{36}$$

Это уравненіе плоскости параллельной касательной плоскости въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$. Слѣдовательно діаметральная плоскость, сопряженная направленію, соединяющему центръ съ точкою касанія, параллельна касательной плоскости.

Если черезъ ρ_1 означимъ полудіаметръ, проходящій черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$, то будемъ имѣть:

$$x_1 = \rho_1 \cos\alpha_1 \quad , \quad y_1 = \rho_1 \cos\beta_1 \quad , \quad z_1 = \rho_1 \cos\gamma_1$$

гдѣ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ есть направленіе ρ_1. Подставляя эти выраженія въ уравненіе эллипсоида будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\cos^2\alpha_1}{a^2} + \frac{\cos^2\beta_1}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma_1}{c^2} \tag{37}$$

Возьмемъ еще два полудіаметра ρ_2 и ρ_3 и положимъ, что ρ_1, ρ_2, ρ_3, перпендикулярны между собою. Пусть направленія ρ_2 и ρ_3 будутъ: $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, то будемъ имѣть также слѣдующее:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho_2^2} &= \frac{\cos^2\alpha_2}{a^2} + \frac{\cos^2\beta_2}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma_2}{c^2} \\ \frac{1}{\rho_3^2} &= \frac{\cos^2\alpha_3}{a^2} + \frac{\cos^2\beta_3}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma_3}{c^2} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Складывая (37) и (38), найдемъ:

$$\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \tag{39}$$

Слѣдовательно сумма квадратовъ обратныхъ величинъ трехъ перпендикулярныхъ діаметровъ есть величина постоянная.

§ 572. Пусть $2a_1$, $2b_1$, $2c_1$ будутъ длины трехъ сопряженныхъ діаметровъ эллипсоида, т. е. такихъ діаметровъ, каждый изъ которыхъ есть сопряженное направленіе діаметральной плоскости, проходящей черезъ два другіе.

Пусть $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ будутъ точки встрѣчи этихъ діаметровъ съ поверхностью. Если выразимъ, что діаметральная плоскость:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=0$$

сопряженная первому діаметру, заключаетъ два другіе, то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}\frac{x_2x_1}{a^2}+\frac{y_2y_1}{b^2}+\frac{z_2z_1}{c^2}&=0\\ \frac{x_3x_1}{a^2}+\frac{y_3y_1}{b^2}+\frac{z_3z_1}{c^2}&=0\end{aligned} \tag{40}$$

Точно также, если діаметральная плоскость сопряженная второму діаметру:

$$\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}=0$$

проходитъ черезъ третій, то:

$$\frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2}+\frac{z_2z_3}{c^2}=0 \tag{41}$$

Въ угловыхъ координатахъ уравненія (40) и (41) сдѣлаются:

$$\begin{aligned}\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2&=0\\ \cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3&=0\\ \cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3&=0\end{aligned} \tag{42}$$

такъ что направленія (α,β,γ), соотвѣтствующія $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ и $(x_3y_3z_3)$,

трехъ сопряженныхъ діаметровъ, перпендикулярны между собою и мы будемъ имѣть:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$
$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

а также и:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$$
$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1$$
$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

§ 573. Въ § 543 мы видѣли, что всякая центральная поверхность будучи отнесена къ какому-нибудь полярному тетраэдру, коего одна изъ граней находится на безконечности, имѣетъ форму:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H$$

или

$$\frac{x^2}{a^2_1} + \frac{y^2}{b^2_1} + \frac{z^2}{c^2_1} = 1$$

Слѣдовательно уравненіе поверхности имѣетъ такую-же форму, только координатныя оси не перпендикулярны между собою. Величины $2a_1, 2b_1, 2c_1$, суть длины сопряженныхъ діаметровъ.

Если a_1, b_1, c_1 суть длины сопряженныхъ полудіаметровъ, то имѣемъ:

$$a^2_1 = a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\cos^2\beta_1 + c^2\cos^2\gamma_1$$
$$b^2_1 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\cos^2\beta_2 + c^2\cos^2\gamma_2$$
$$c^2_1 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\cos^2\beta_3 + c^2\cos^2\gamma_3$$

складывая, найдемъ:

$$a^2_1 + b^2_1 + c^2_1 = a^2 + b^2 + c^2$$

такъ какъ направленія $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_3, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ перпендикулярны между собою (§ 550). Слѣдовательно сумма квадратовъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ равна суммѣ квадратовъ осей поверхности.

§ 574. *Предложеніе.* Объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ, равенъ объему параллелепипеда, построеннаго на осяхъ.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, параллелепипедъ, построенный на діаметрахъ a_1, b_1, c_1 равенъ шесть разъ взятой треугольной пирамидѣ, построенный на тѣхъ-же діаметрахъ.

Слѣдовательно объемъ V параллелепипеда будетъ:

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = abc$$

такъ какъ опредѣлитель, составленный изъ косинусовъ угловъ равенъ единицѣ.

§ 575. Если три сопряженные діаметра равны, то должны имѣть:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0 \quad , \quad \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 + \cos\beta_1 \cos\beta_3 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 = 0 \quad , \quad \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1$$

$$\cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\beta_2 \cos\beta_3 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 = 0 \quad , \quad \cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

и:

$$a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\cos^2\beta_1 + c^2\cos^2\gamma_1 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\cos^2\beta_2 + c^2\cos^2\gamma_2 =$$
$$= a^2\cos^2\alpha_3 + b^2\cos^2\beta_3 + c^2\cos^2\gamma_3$$

Восемь уравненій между девятью неизвѣстными, слѣдовательно есть безчисленное множество равныхъ сопряженныхъ діаметровъ. Пусть длина одного изъ нихъ есть a_1, то будемъ имѣть:

$$a^2_1 = a^2\cos^2\alpha_1 + b^2\cos^2\beta_1 + c^2\cos^2\gamma_1$$
$$a^2_1 = a^2\cos^2\alpha_2 + b^2\cos^2\beta_2 + c^2\cos^2\gamma_2$$
$$a^2_1 = a^2\cos^2\alpha_3 + b^2\cos^2\beta_3 + c^2\cos^2\gamma_3$$

складывая, найдемъ:

$$3a^2_1 = a^2 + b^2 + c^2$$

Слѣдовательно, концы сопряженныхъ равныхъ діаметровъ находятся на пересѣченіи эллипсоида съ шаромъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

§ 576. *Задача.* Найти оси эллипса, происшедшаго отъ пересѣченія эллипсоида плоскостью, проходящей черезъ центръ?

Рѣшеніе. Пусть α, β, γ будутъ углы, которые перпендикуляръ, возставленный изъ начала координатъ къ данной плоскости, составляетъ съ координатными осями. Пусть ρ будетъ длина этого перпендикуляра до пересѣченія съ поверхностью. Если черезъ a_1 и b_1 означимъ оси искомаго

эллипса, то будемъ имѣть (39) § 571:

$$\frac{1}{a^2_1}+\frac{1}{b^2_1}+\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

но:

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

слѣдовательно:

$$\frac{1}{a^2_1}+\frac{1}{b^2_1}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{\cos^2\beta}{b^2}-\frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

или:

$$\frac{1}{a^2_1}+\frac{1}{b^2_1}=\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}$$

Но (§ 569):

$$\frac{1}{a^2_1b^2_1}=\frac{p^2}{a^2b^2c^2}=\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}$$

Слѣдовательно $\frac{1}{a^2_1}$ и $\frac{1}{b^2_1}$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)+\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}=0$$

или

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-x^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-x^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-x^2}=0$$

§ 577. Мы нашли уравненіе касательной плоскости въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ къ эллипсоиду:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0$$

Координаты этой плоскости будутъ:

$$\xi=\frac{x_1}{a^2}\quad,\quad\eta=\frac{y_1}{b^2}\quad,\quad\zeta=\frac{z_1}{c^2}$$

откуда:

$$x_1=a^2\xi\quad,\quad y_1=b^2\eta\quad,\quad z_1=c^2\zeta$$

Такъ какъ точка $(x_1y_1z_1)$ находится на поверхности эллипсоида, то координаты x_1, y_1, z_1 должны удовлетворять уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

подставляя выраженія для x_1, y_1, z_1, найдемъ:

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1 \qquad (43)$$

Это уравненіе эллипсоида въ плоскостныхъ координатахъ.

Если ξ_1, η_1, ζ_1 суть координаты касательной плоскости къ эллипсоиду, то уравненіе точки касанія будетъ:

$$a^2\xi_1\xi + b^2\eta_1\eta + c^2\zeta_1\zeta = 1 \qquad (44)$$

Если плоскость данная координатами ξ_1, η_1, ζ_1 не касается поверхности, то уравненіе (44) будетъ, полюсъ этой плоскости.

Однополый гиперболоидъ.

§ 578. Когда два корня въ уравненіи (16) § 546 положительные, то уравненіе поверхности имѣетъ форму:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (45)$$

или:

$$b^2c^2a^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2 \qquad (46)$$

Если въ уравненіи (45) сдѣлаемъ, послѣдовательно, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, то найдемъ пересѣченіе гиперболоида съ плоскостями XY, XZ, YZ:

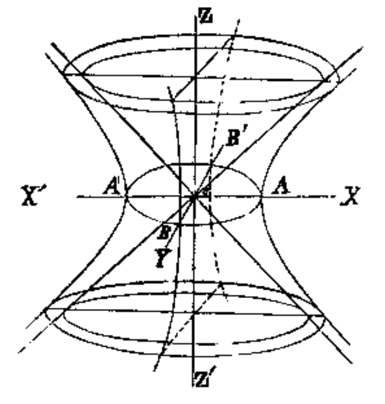
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

изъ коихъ первое есть эллипсъ, а два послѣднія—гиперболы.

Дѣлая, послѣдовательно, въ уравненіи (45) $y = 0$, $z = 0$; $x = 0$, $z = 0$; $x = 0$, $y = 0$, найдемъ координаты точекъ пересѣченія осей съ поверхностью:

$$x = \pm a \quad , \quad y = \pm b \quad , \quad z = \pm ci$$

Фиг. 163.



Откуда видимъ, что ось X и ось Y встрѣчаютъ поверхность, а ось Z ее не встрѣчаетъ; мы будемъ предполагать, что $a > b > c$. Точки встрѣчи осей X и Y съ поверхностью обозначенныя черезъ A, A'; B, B' (фиг. 163) называютъ *вершинами гиперболоида*. Онѣ лежатъ въ вершинахъ эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

который называется *горловымъ эллипсомъ*.

Чтобы составить ясное представленіе о формѣ этой повоерхности, пересѣчемъ ее плоскостями параллельными плоскости XY. Для этого положимъ $z=\gamma$, то найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{\gamma^2}{c^2}$$

или:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)}=1 \qquad (47)$$

Слѣдовательно проэкція сѣченія есть эллипсъ, коего оси суть:

$$a\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{c^2}} \quad , \quad b\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{c^2}}$$

По мѣрѣ удаленія плоскости $z=\gamma$, какъ съ положительной стороны плоскости XY, такъ и съ отрицательной, оси эллипса (47) возрастаютъ неопредѣленно, начиная съ горловаго эллипса, который соотвѣтствуетъ значенію $\gamma=0$.

Пересѣчемъ поверхность плоскостями параллельными плоскости XZ, полагая $y=\beta$. Кривая пересѣченія будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\beta^2}{b^2} \qquad (48)$$

или:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{\beta^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{\beta^2}{b^2}\right)}=1 \qquad (49)$$

Это гипербола, коей оси суть:

$$a\sqrt{1-\frac{\beta^2}{b^2}} \quad , \quad c\sqrt{1-\frac{\beta^2}{b^2}} \qquad (50)$$

Начиная съ $\beta=0$ до $\beta=b$ оси гиперболы уменьшаются и при $\beta=b$ уравненіе (48) дѣлается:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0$$

или:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \quad , \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0$$

двѣ прямыя. Слѣдовательно пересѣченіе плоскости $y = \pm b$ съ гиперболоидомъ есть двѣ прямыя линіи. Изъ этого видимъ, что однополый гиперболоидъ есть такая поверхность, на которой помѣщается и безконечная прямая.

Когда β сдѣлается больше b, то квадраты осей (50) гиперболы перемѣняютъ знаки. Гиперболы поворачиваются, т. е. сдѣлаются сопряженными гиперболамъ (49), и ихъ оси возрастаютъ неопредѣленно.

Тоже самое можно сказать и относительно пересѣченія гиперболоида съ плоскостями $x = \alpha$. Плоскость $\alpha = 0$ даетъ гиперболу:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Затѣмъ, по мѣрѣ возрастанія α, оси гиперболъ уменьшаются; при $x = \pm a$ гиперболы обращаются въ двѣ прямыя, а когда α дѣлается больше a, то гиперболы поворачиваются и ихъ оси возрастаютъ неопредѣленно.

Разсмотримъ теперь пересѣченіе, какой-нибудь, плоскости:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \tag{51}$$

съ поверхностью. Подставляя въ уравненіе (45) выраженіе для z, найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)^2}{c^2} = 1$$

развертывая и составляя выраженіе $a^2_{12} - a_{11}a_{22}$, найдемъ его въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{c^2} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{\alpha^2}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{\beta^2}{c^2}\right) = \frac{1}{a^2b^2c^2}\,(\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - c^2)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что пересѣченіе плоскости съ однополымъ гиперболоидомъ будетъ эллипсъ, если.

$$\alpha^2a^2 + \beta^2b^2 - c^2 < 0$$

это пересѣченіе будетъ гипербола, если:

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^2 > 0$$

и будетъ парабола, если:

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^2 = 0$$

Этому послѣднему условію мы удовлетворимъ, если положимъ:

$$\alpha = \frac{c}{a}\cos\varphi \quad , \quad \beta = \frac{c}{b}\sin\varphi$$

гдѣ φ есть неопредѣленный уголъ. Подставляя въ (51) выраженія для α и β и дѣлая $\gamma = 0$, будемъ имѣть:

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi \tag{52}$$

Откуда заключаемъ, что пересѣченіе гиперболоида съ плоскостями параллельными плоскости (52) будетъ парабола.

§ 579. *Круговыя сѣченія.* Дѣлая разсужденія относительно плоскости, проходящей по оси a, подобныя тѣмъ, которыя намъ показали существованіе круговаго сѣченія въ эллипсоидѣ, мы увидимъ, что и въ гиперболоидѣ есть такое-же и именно то, котораго плоскость, проходящая по оси a будетъ такъ наклонена къ плоскости XY, что малая ось эллипса пересѣченія будетъ равна a.

Аналитическое выраженіе для круговыхъ сѣченій получится, выражая, что конусъ:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{r^2}\right)z^2 = 0$$

преобразуется въ двѣ плоскости. Полагая, послѣдовательно, $r^2 = a^2$, $r^2 = b^2$, $r^2 = -c^2$, найдемъ плоскости круговыхъ сѣченій:

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)z^2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x^2 - \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right)z^2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)y^2 = 0$$

такъ какъ мы полагаемъ, что $a > b > c$, то два послѣднія уравненія представляютъ мнимыя плоскости, а первому можно дать форму:

$$y = \pm z \frac{b}{c} \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 - b^2}}$$

плоскость параллельная оси X. Изъ этого видимъ, что въ однополомъ гиперболоидѣ есть двѣ системы плоскостей, дающихъ круговыя сѣченія.

§ 580. *Ассимптотическій конусъ.* Поверхность:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

есть ассимптотическій конусъ; разстояніе между нимъ и гиперболоидомъ уменьшается по мѣрѣ удаленія отъ начала координатъ по поверхности. Это легко показать; вычтемъ изъ уравненія гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

уравненіе конуса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

это даетъ:

$$\frac{\zeta^2}{c^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$$

откуда:

$$\zeta-z=\frac{c^2}{z+\zeta}$$

когда z будетъ возрастать неопредѣленно, то вторая часть будетъ убывать неопредѣленно и на безконечности она слѣлается равна нулю; слѣдовательно $\zeta=z$, т. е. точки на конусѣ и гиперболоидѣ совпадутъ. Очевидно, что весь конусъ находится внутри поверхности.

Такъ какъ коэфиціенты въ обѣихъ поверхностяхъ равны, то ихъ пересѣченія плоскостью, будутъ подобныя и концентрическія кривыя. Слѣдовательно плоскость, пересѣкающая конусъ по эллипсу, пересѣчетъ по эллипсу и гиперболоидъ; пересѣкающая по гиперболѣ, пересѣчетъ по гиперболѣ и гиперболоидъ. Касательная къ конусу плоскость пересѣкаетъ гиперболоидъ по гиперболѣ.

§ 581. Замѣтимъ еще, что поверхности выраженныя уравненіями:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

представляютъ туже поверхность, только мнимая ось въ первой направлена по оси Y, а во второй по оси X. Если въ уравненім гиперболоида $a=b$, то уравненіе:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

представляетъ гиперболоидъ вращенія около оси Z. Если a или b или c равны безконечности, то мы будемъ имѣть цилиндрическія поверхности:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

первыя двѣ суть гиперболическіе цилиндры, а третяя эллиптическій,

§ 582. Мы выше видѣли, что на однополомъ гиперболоидѣ помѣщаются четыре пары прямыхъ линій, именно: пересѣченія гиперболоида съ плоскостями:

$$x = \pm a \quad , \quad y = \pm b$$

Посмотримъ есть-ли еще на гиперболоидѣ прямыя, кромѣ этихъ послѣднихъ Для этого попробуемъ помѣстить на немъ прямую:

$$x = \alpha z + \beta \quad , \quad y = \gamma z + \delta$$

Подставляя въ уравненіе гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

эти выраженія, найдемъ:

$$\frac{(\alpha z + \beta)^2}{a^2} + \frac{(\gamma z + \delta)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Чтобы это уравненіе удовлетворялось независимо отъ z, необходимо имѣть:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \quad , \quad \frac{\alpha\beta}{a^2} + \frac{\gamma\delta}{b^2} = 0 \quad , \quad \frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\delta^2}{b^2} - 1 = 0$$

Изъ послѣдняго видимъ, что точка пересѣченія прямой съ плоскостью XY находится на горловомъ эллипсѣ.

Второе уравненіе даетъ:

$$\frac{\frac{\alpha}{a}}{\frac{a}{\beta}} = -\frac{\frac{\gamma}{b}}{\frac{b}{\delta}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a^2}{\beta^2} + \frac{b^2}{\delta^2}}} = \pm\frac{\beta\delta}{abc}$$

откуда:

$$\alpha = \pm\frac{a\delta}{bc} \quad , \quad \gamma = \mp\frac{b\beta}{ac}$$

Эти выраженія показываютъ, что существуетъ двѣ системы прямыхъ линій и только двѣ, которыя расположены по поверхности, ихъ уравненія суть:

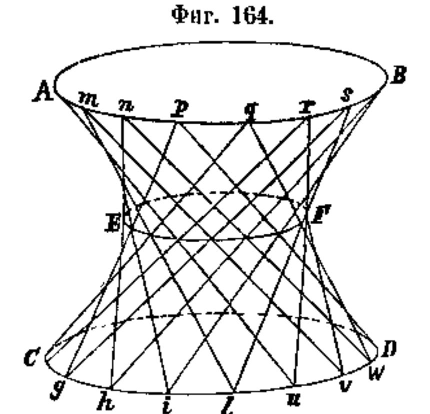
$$(1) \qquad x = \frac{a\delta}{bc}z + \beta \quad , \quad y = -\frac{b\beta}{ac}z + \delta$$

(53)

$$(2) \qquad x = -\frac{a\delta}{bc}z + \beta \quad , \quad y = \frac{b\beta}{ac}z + \delta$$

β и δ удовлетворяютъ горловому эллипсу. Изъ этого видимъ, что на однополомъ гиперболоидѣ существуетъ безчисленное множество прямыхъ линій (фиг. 164).

Фиг. 164.



Если возьмемъ вспомогательный уголъ φ и положимъ:

$$\beta = a\cos\varphi \quad , \quad \delta = b\sin\varphi$$

то уравненія (53) можно написать въ формѣ:

$$(1') \qquad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi$$

$$(2') \qquad \frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi$$

Съ помощью этихъ уравнéній легко провѣрить, что эти прямыя находятся на поверхности гиперболоида: для этаго возвысимъ въ квадратъ (1') и (2') и сложимъ, то получимъ уравненіе поверхности.

Для краткости, прямыя на гиперболоидѣ, мы будемъ называть *женератрисами*; причину такого названія увидимъ ниже.

Женератрисамъ гиперболоида можно дать еще слѣдующую форму. Напишемъ уравненіе гиперболоида въ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

откуда:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

возьмемъ двѣ системы уравненій:

$$(1'') \qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad , \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$(2'') \qquad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad , \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

гдѣ λ и μ суть произвольные параметры, которые опредѣляютъ двѣ системы прямыхъ линій. Будучи перемножены, почленно, или уравненія (1''), или уравненія (2''), дадутъ уравненіе поверхности.

Если положимъ:

$$A_1 = \frac{x}{a} + \frac{z}{c} \quad , \quad A_2 = 1 + \frac{y}{b} \quad , \quad B_2 = \frac{x}{a} - \frac{z}{c} \quad , \quad B_1 = 1 - \frac{y}{b}$$

то уравненія $(1'')$ и $(2')$ сдѣлаются:

$$(1''') \qquad A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\lambda} B_1 = 0$$

$$(2''') \qquad A_1 - \mu A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\mu} A_2 = 0$$

а уравненіе поверхности будетъ:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

§ 583. Черезъ каждую точку на гиперболоидѣ проходятъ двѣ женератрисы, но различныхъ системъ.

Пусть $(x_1 y_1 z_1)$ будетъ точка на поверхности; A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 соотвѣтствующія значенія A_1, A_2, B_1, B_2. Для опредѣленія λ и μ мы будемъ имѣть уравненія:

$$A'_1 - \lambda A'_2 = 0 \quad , \quad B'_2 - \frac{1}{\lambda} B'_1 = 0 \quad , \quad A'_1 - \mu B'_1 = 0 \quad , \quad B'_2 - \frac{1}{\mu} A'_2 = 0$$

съ условіями:

$$A'_1 B'_2 = A'_2 B'_1 \quad \text{или} \quad \frac{A'_1}{A'_2} = \frac{B'_1}{B'_2} \tag{54}$$

откуда:

$$\lambda = \frac{A'_1}{A'_2} \quad , \quad \lambda = \frac{B'_1}{B'_2} \quad , \quad \mu = \frac{A'_1}{B'_1} \quad , \quad \mu = \frac{A'_2}{B'_2}$$

но вслѣдствіи (54) оба λ и оба μ совпадаютъ. Слѣдовательно черезъ каждую точку на поверхности гиперболоида проходитъ по одной прямой изъ каждой системы.

§ 584. Женератрисы, принадлежащія одной и той-же системѣ, не встрѣчаются.

Пусть:

$$A_1 - \lambda_1 A_1 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\lambda_1} B_1 = 0$$

$$A_1 - \lambda_2 A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\lambda_2} B_1 = 0$$

уравненія двухъ женератрисъ, принадлежащихъ одной системѣ. Если вычтемъ почленно эти уравненія, то найдемъ:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) A_2 = 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) B_1 = 0$$

а эти уравненія могутъ существовать одновременно только при условіи $A_2 = B_1 = 0$, что невозможно.

§ 585. Двѣ женератрисы, принадлежащія различнымъ системамъ, встрѣчаются.

Уравненіе плоскости, проходящей по женератрисѣ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_2 - \frac{1}{\lambda} B_1 = 0$$

очевидно есть:

$$A_1 - \lambda A_2 + k\left(B_2 - \frac{1}{\lambda} B_1\right) = 0 \tag{55}$$

гдѣ k есть неопредѣленный коэфиціентъ. Если эта плоскость проходитъ черезъ женератрису второй системы:

$$A_1 - \mu B_1 = 0 \quad ; \quad B_2 - \frac{1}{\mu} A_2 = 0$$

то мы должны имѣть:

$$A_1 - \mu B_1 + t\left(B_2 - \frac{1}{\mu} A_2\right) = 0$$

Это уравненіе должно быть тождественно съ (53), а для этого необходимо имѣть: $t = k = \lambda\mu$.

Слѣдовательно обѣ женератрисы находятся въ плоскости:

$$A_1 - \lambda A_2 + \lambda\mu\left(B_2 - \frac{1}{\lambda} B_2\right) = 0$$

Это уравненіе можно написать въ формѣ:

$$(1 + \lambda\mu)\frac{x}{a} + (\mu - \lambda)\frac{y}{b} + (1 - \lambda\mu)\frac{z}{c} - (\lambda + \mu) = 0$$

если подставимъ въ него значенія A_1, A_2, B_1, B_2.

Если женератрисы даны въ формѣ:

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi$$

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1$$

то условіе, чтобы плоскость:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\sin\varphi-\cos\varphi\right)+k\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\cos\varphi-\sin\varphi\right)=0$$

проходила черезъ вторую женератрису будетъ:

$$k=\frac{\sin\varphi+\sin\varphi_1}{\cos\varphi+\cos\varphi_1}=\frac{\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}$$

Слѣдовательно уравненіе плоскости, въ которой находятся обѣ женератрисы будетъ:

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}+\frac{z}{c}\sin\frac{\varphi_1-\varphi}{2}=\cos\frac{\varphi_1-\varphi}{2} \qquad (56)$$

§ 586. *Женератрисы параллельныя.* Очевидно, что параллельными женератрисами могутъ быть женератрисы, принадлежащія различнымъ системамъ.

Пусть уравненія такихъ женератрисъ будутъ:

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\sin\varphi+\cos\varphi \quad , \quad \frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\cos\varphi+\sin\varphi$$

$$\frac{x}{a}=-\frac{z}{c}\sin\varphi_1+\cos\varphi_1 \quad , \quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\cos\varphi_1+\sin\varphi_1$$

Если онѣ параллельны, то необходимо:

$$\sin\varphi=-\sin\varphi_1 \quad , \quad \cos\varphi=-\cos\varphi_1$$

откуда:

$$\varphi_1=\varphi+180^0 \quad \text{или} \quad \varphi_1-\varphi=180^0$$

Слѣдовательно уравненіе плоскости (56) двухъ параллельныхъ женератрисъ будетъ:

$$\frac{x}{a}\sin\varphi-\frac{y}{b}\cos\varphi-\frac{z}{c}=0$$

Откуда видимъ, что параллельныя женератрисы находятся въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ центръ поверхности.

§ 587. *Женератрисы перпендикулярныя.* Если женератрисы:

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi \quad , \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi$$

$$\frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\sin\varphi_1 + \cos\varphi_1 \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1$$

перпендикулярны, то мы должны имѣть:

$$a^2\sin\varphi . \sin\varphi_1 + b^2\cos\varphi\cos\varphi_1 - c^2 = 0 \tag{57}$$

Но изъ уравненій женератрисъ имѣемъ:

$$\left(\frac{x}{a} - \cos\varphi\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}\sin^2\varphi \quad , \quad \left(\frac{x}{a} - \cos\varphi_1\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}\sin^2\varphi_1$$

такъ, что $\cos\varphi$ и $\cos\varphi_1$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$\left(\frac{x}{a} - \cos\varphi\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}(1 - \cos^2\varphi)$$

Произведеніе корней $\cos\varphi$ и $\cos\varphi_1$ этого уравненія, очевидно, есть:

$$\cos\varphi\cos\varphi_1 = \frac{\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}{1 + \frac{z^2}{c^2}} \tag{58}$$

Точно также $\sin\varphi$ и $\sin\varphi_1$ суть корни квадратнаго уравненія:

$$\left(\frac{y}{b} - \sin\varphi\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}(1 - \sin^2\varphi)$$

откуда имѣемъ:

$$\sin\varphi\sin\varphi_1 = \frac{\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}{1 + \frac{z^2}{c^2}} \tag{59}$$

подставляя выраженія (58) и (59) въ (57), найдемъ:

$$a^2\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) + b^2\left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) = c^2\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

или

$$\frac{b^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} - (a^2 + b^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = z^2 + c^2$$

откуда:

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$$

Слѣдовательно точки, въ которыхъ женератрисы пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, находятся на пересѣченіи двухъ поверхностей:

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

шара и гиперболоида.

§ 588. Всѣ женератрисы однополаго гиперболоида проэктируются на плоскости XY, касательными къ горловому эллипсу. Въ самомъ дѣлѣ, исключая z изъ уравненій женератрисы:

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\sin\varphi+\cos\varphi \quad , \quad \frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\cos\varphi+\sin\varphi$$

найдемъ:

$$\left(\frac{x}{a}-\cos\varphi\right)\cos\varphi+\left(\frac{y}{b}-\sin\varphi\right)\sin\varphi=0$$

или:

$$\frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1$$

а это касательная къ эллипсу:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

§ 589. Геометрическое мѣсто прямыхъ, проходящихъ черезъ центръ, параллельно женератрисамъ гиперболоида, есть ассимптотическій конусъ.

Уравненія, какой нибудь, женератрисы суть:

$$x=\frac{a\delta}{bc}z+\beta \quad , \quad y=-\frac{b\beta}{ac}z+\delta$$

уравненія прямой, проходящей черезъ центръ, параллельно этой женератрисѣ, суть:

$$x=\frac{a\delta}{bc}z \quad , \quad y=-\frac{b\beta}{ac}z$$

откуда:

$$\beta=-\frac{ac}{b}\cdot\frac{y}{z} \quad , \quad \delta=\frac{bc}{a}\cdot\frac{x}{z}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе § 582:

$$\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\delta^2}{b^2}=1$$

найдемъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

а это есть ассимптотическій конусъ.

Слѣдствіе. Три женератрисы одной системы не могутъ быть параллельны одной плоскости, такъ какъ въ противномъ случаѣ три женератрисы ассимптотическаго конуса, параллельныя женератрисамъ гиперболоида, были бы въ одной плоскости, что невозможно.

§ 590. *Предложеніе.* Произведеніе синусовъ угловъ, которые, какая нибудь, изъ женератрисъ гиперболоида, составляетъ съ плоскостями круговыхъ сѣченій, есть величина постоянная.

Доказательство. Если $a>b$, то уравненія плоскостей круговыхъ сѣченій суть:

$$y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)=0 \tag{60}$$

Возьмемъ, какую нибудь точку M на ассимптотическомъ конусѣ и проведемъ женератрису конуса OM. Эта женератриса будетъ параллельна одной изъ женератрисъ гиперболоида (§ 589). Изъ точки M опустимъ перпендикуляры MP и MP' на плоскости (60). Координаты точки M удовлетворяютъ уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)z^2=-\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2} \tag{61}$$

Первая часть есть произведеніе плоскостей круговыхъ сѣченій. Если первую часть раздѣлимъ на:

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2c^2}$$

то она будетъ, очевидно, $MP.MP'$. Слѣдовательно уравненіе (61) можно написать такъ:

$$MP.MP'=-\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\,\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}=-\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\,\frac{OM^2}{a^2} \tag{62}$$

OM есть разстояніе точки M отъ центра поверхности O.

Пусть теперь φ_1 и φ_2 будутъ углы, которые OM составляетъ съ плоскостями круговыхъ сѣченій, то:

$$MP = OM.\sin\varphi_1 \quad , \quad MP' = OM.\sin\varphi_2$$

откуда, подставляя въ (62), найдемъ:

$$\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = -\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)}$$

Однополый гиперболоидъ, какъ геометрическое мѣсто прямыхъ линій.

§ 591. Изъ всего выше сказаннаго относительно однополаго гиперболоида мы видимъ, что это самая замѣчательная и самая интересная изъ поверхностей втораго порядка, по своимъ свойствамъ. На этой поверхности помѣщаются всѣ кривыя втораго порядка, не исключая и прямой.

Всѣ прямыя, находящіяся на гиперболоидѣ дѣлятся на двѣ системы. Системы эти отличаются между собою тѣмъ, что прямыя, принадлежащія одной системѣ, непересѣкаются, а каждая изъ прямыхъ одной системы пересѣкаетъ всѣ прямыя другой системы.

Изъ такого свойства женератрисъ гиперболоида можно видѣть, что эта поверхность можетъ быть образована перемѣщеніемъ прямой въ пространствѣ подъ извѣстными условіями.

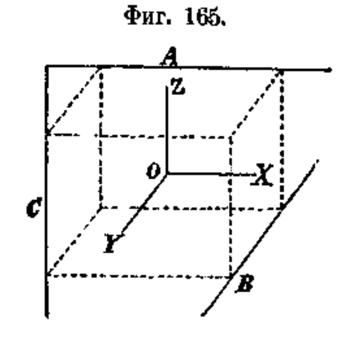
Движеніе прямой въ пространствѣ вполнѣ опредѣленно, если она должна скользить, упираясь на три данныя прямыя, не лежащія попарно въ одной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ точку M на первой прямой и черезъ нее проведемъ двѣ плоскости, изъ коихъ одна проходила-бы по другой прямой, а другая по третьей. Эти плоскости вполнѣ опредѣленны и ихъ перясѣченіе—прямая проходитъ черезъ точку M и встрѣчаетъ другія двѣ данныя прямыя. Такую прямую можно построить для каждой точки первой данной прямой, такъ что геометрическое мѣсто такихъ прямыхъ будетъ единственная и опредѣленная поверхность.

Такъ какъ въ гиперболоидѣ каждая женератриса одной системы пересѣкаетъ всѣ другой, то можно образовать гиперболоидъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ три женератрисы въ первой системѣ и заставимъ по нимъ скользить прямую линію, то эта прямая опишетъ гиперболоидъ такъ какъ нѣтъ двухъ различныхъ прямыхъ, которыя бы встрѣтили женератрисы въ однѣхъ и тѣхъ же трехъ точкахъ. Скользящая прямая во всѣхъ своихъ положеніяхъ воспроизведетъ всѣ женератрисы второй системы.

Можно прямо сказать, что прямая, скользящая по тремъ прямымъ, не параллельнымъ одной плоскости и попарно не лежащимъ въ одной плоскости, образуетъ однополый гиперболоидъ. Для этого черезъ каждую изъ данныхъ прямыхъ проведемъ плоскость параллельную двумъ другимъ даннымъ прямымъ. Эти плоскости образують параллелепипедъ, въ центрѣ котораго помѣстимъ начало координатъ O и возьмемъ за координатныя оси (фиг. 165) прямыя параллельныя ребрамъ параллелепипеда. Пусть длина реберъ параллелепипеда будетъ $2a$, $2b$, $2c$. Легко видѣть, что уравненія трехъ данныхъ прямыхъ, которыя назовемъ черезъ A, B, C будутъ:

Фиг. 165.



$$(A)\ \begin{matrix} y=-b \\ z=c \end{matrix}\ ,\quad (B)\ \begin{matrix} x=a \\ z=-c \end{matrix}\ ,\quad (C)\ \begin{matrix} x=-a \\ y=b \end{matrix}$$

Скользящую прямую можно разсматривать, какъ пересѣченіе плоскостей, изъ коихъ одна проходитъ по прямой A, а другая по прямой B. Уравненія этихъ плоскостей можно написать въ формѣ:

$$\begin{aligned} z-c-\lambda(y+b)=0 \\ z+c-\mu(x-a)=0 \end{aligned} \qquad (63)$$

надобно теперь показать, что эта прямая встрѣчаетъ прямую C. Вычитая уравненія (63), найдемъ:

$$2c-\mu(x-a)+\lambda(y+b)=0$$

этому уравненію должны удовлетворять x и y изъ уравненій (C), что даетъ условіе пересѣченія:

$$c+\lambda b+\mu a=0$$

подставляя вмѣсто λ и μ ихъ величины:

$$\lambda=\frac{z-c}{y+b}\quad ,\quad \mu=\frac{z+c}{x-a}$$

найдемъ:

$$ayz+bxz+cxy+abc=0$$

или:

$$\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}+1=0$$

Это уравненіе искомой поверхности.

Составляя для этой поверхности кубическое уравненіе (16) § 546, найдемъ:

$$4\lambda^3 - (a^2 + b^2 + c^2)\lambda - abc = 0$$

которое имѣетъ два положительные корня и одинъ отрицательный; слѣдовательно это однополый гиперболоидъ.

§ 592. Въ § 582 мы видѣли, что если:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_1 - \lambda B_2 = 0 \tag{64}$$

суть уравненія женератрисы первой системы, то уравненіе поверхности будетъ:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \tag{65}$$

Уравненія (64) представляютъ двѣ проэктивныя связки плоскостей. Одна связка проходитъ черезъ прямую:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0$$

а другая черезъ прямую:

$$B_1 = 0 \quad , \quad B_2 = 0$$

Откуда имѣемъ слѣдующее свойство: если черезъ двѣ, какія-нибудь, данныя прямыя, проведемъ плоскости, проходящія по женератрисамъ одной и той-же системы гиперболоида, то будемъ имѣть двѣ проэктивныя связки.

Обратно, въ двухъ проэктивныхъ связкахъ, проходящихъ черезъ двѣ, какія-нибудь, прямыя, соотвѣтствующія плоскости пересѣкаются по женератрисамъ гиперболоида.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad ; \quad B_1 = 0 \quad , \quad B_2 = 0$$

будутъ двѣ данныя прямыя. Проэктивныя связки, проходящія по этимъ прямымъ, очевидно, будутъ:

$$A_1 - \lambda A_2 = 0 \quad , \quad B_1 - k\lambda B_2 = 0$$

гдѣ k величина постоянная, а λ произвольный параметръ. Исключая λ изъ этихъ уравненій, найдемъ:

$$kA_1 B_2 = A_2 B_1$$

Эта поверхность есть геометрическое мѣсто пересѣченія соотвѣтствующихъ проэктивныхъ плоскостей.

Очевидно это есть однополый гиперболоидъ.

§ 593. ***Касательная плоскость и нормаль.*** Если $(x_1\, y_1\, z_1)$ есть точка на поверхности гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

то касательная плоскость въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ есть:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=1$$

Если ее сравнимъ съ уравненіемъ:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$$

то найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2}=\frac{\cos\alpha}{p}\quad,\quad\frac{y_1}{b^2}=\frac{\cos\beta}{p}\quad,\quad\frac{z_1}{c^2}=\frac{\cos\gamma}{p}$$

откуда:

$$\frac{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta-c^2\cos^2\gamma}{p^2}=\frac{x^2_1}{a^2}+\frac{y^2_1}{b^2}-\frac{z^2_1}{c^2}=1$$

Слѣдовательно:

$$p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta-c^2\cos^2\gamma$$

Уравненія нормальной линіи въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$, очевидно, суть:

$$(x-x_1)\frac{a^2}{x_1}=(y-y_1)\frac{b^2}{y_1}=(z-z_1)\frac{c^2}{z_1}$$

Слѣдующія предложенія доказываются также, какъ и для эллипсоида.

Предложеніе 1. Сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, есть величина постоянная.

Предложеніе 2. Геометрическое мѣсто вершинъ трегранннаго прямаго угла, описаннаго около гиперболоида, есть шаръ, коего уравненіе есть:

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$$

Предложеніе 3. Черезъ данную точку внѣ поверхности можно къ ней провести, вообще, шесть нормальныхъ линій, которыя всѣ находятся на одномъ конусѣ.

§ 594. *Діаметральная плоскость.* Уравненіе діаметральной плоскости, сопряженной направленію α, β, γ въ гиперболоидѣ есть:

$$\cos\alpha \frac{x}{a^2} + \cos\beta \frac{y}{b^2} - \cos\gamma \frac{z}{c^2} = 0$$

или:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 0 \qquad (66)$$

если x_1, y_1, z_1 суть координаты конца діаметра.

Если прамая (α, β, γ) находится внутри ассимптотическаго конуса, то параллельныя хорды встрѣчаютъ обѣ полы этой поверхности, слѣдовательно діаметральная плоскость пересѣчетъ конусъ въ одной точкѣ, а гиперболоидъ по эллипсу, такъ какъ сѣченія суть подобныя кривыя.

Если прямая (α, β, γ) лежитъ на конусѣ, то діаметральная плоскость будетъ касательная къ конусу, что видно изъ уравненія (66) и пересѣкаетъ гиперболоидъ по параболѣ. Наконецъ, если прямая (α, β, γ) находится внѣ конуса, то хорды встрѣчаютъ въ двухъ точкахъ одну полу и діаметральная плоскость пересѣчетъ конусъ по двумъ прямымъ, а гиперболоидъ по гиперболѣ.

§ 595. *Сопряженные діаметры.* Гиперболоидъ отнесенный къ тремъ сопряженнымъ діаметрамъ, коихъ длина есть a_1, b_1, c_1, будетъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

Когда плоскость $(a_1 b_1)$ пересѣкаетъ гиперболоидъ по эллипсу, то діаметръ сопряженный этой плоскости будетъ внутри ассимптотическаго конуса, а когда плоскость $(a_1 b_1)$ пересѣкаетъ гиперболоидъ по гиперболѣ, то сопряженный діаметръ плоскости $(a_1 b_1)$ будетъ внѣ конуса. Слѣдовательно изъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ есть всегда одинъ, который не встрѣчаетъ поверхность.

Если черезъ конецъ дѣйствительнаго діаметра a_1 проведемъ плоскость параллельную плоскости двухъ другихъ діаметровъ, то это будетъ касательная плоскость къ поверхности; она пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямымъ, коихъ уравненія суть:

$$x = a_1 \quad , \quad \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 0$$

Слѣдовательно касательная плоскость къ гиперболоиду однополому, пересѣкаетъ поверхность по двумъ дѣйствительнымъ прямымъ,—это женера-

трисы, проходящія черезъ точку касанія. Касательныя плоскости, проведенныя въ различныхъ точкахъ одной и той-же женератрисы всѣ содержатъ эту женератрису, но эти плоскости различны, потому-что онѣ должны содержать, каждая, еще женератрису другой системы, проходящую черезъ точку касанія.

§ 596. Пусть a_1, b_1, c_1 будутъ три сопряженные діаметра.

Положимъ, что плоскость $(a_1 b_1)$ пересѣкаетъ гиперболоидъ по эллипсу. Она пересѣчетъ горловой эллипсъ по діаметру, который назовемъ черезъ α. Если β будетъ діаметръ сопряженный α въ эллипсѣ плоскости $(a_1 b_1)$, то будемъ имѣть:

$$a^2_1 + b^2_1 = \alpha^2 + \beta^2$$

слѣдовательно:

$$a^2_1 + b^2_1 - c^2_1 = \alpha^2 + \beta^2 - c^2_1$$

Означимъ черезъ γ діаметръ сопряженный діаметру α въ горловомъ эллипсѣ. Діаметральная плоскость, сопряженная діаметру α, который есть пересѣченіе плоскостей (ab) и $(a_1 b_1)$, пересѣчетъ гиперболоидъ по гиперболѣ и будетъ содержать діаметры γ, c_1, c, β; діаметры γ и c также какъ діаметры c_1 и β суть сопряженные въ гиперболѣ пересѣченія, слѣдовательно:

$$\gamma^2 - c^2 = \beta^2 - c^2_1$$

откуда:

$$\alpha^2 + \gamma^2 - c^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c^2_1$$

Замѣчая, что:

$$\alpha^2 + \gamma^2 = a^2 + b^2$$

найдемъ:

$$a^2_1 + b^2_1 - c^2_1 = a^2 + b^2 - c^2$$

Если вспомнимъ, что площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ коническаго сѣченія, есть величина постоянная, то будемъ имѣть:

$$\text{Об.}(a_1 b_1 c_1) = \text{Об.}(\alpha\beta c_1) = \text{Об.}(\alpha\gamma c) = \text{Об.}(abc)$$

т. е. объемъ параллелепипеда, построеннаго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ однополаго гиперболоида, есть величина постоянная.

§ 597. Уравненіе гиперболоида въ плоскостныхъ координатахъ есть:

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^2\zeta^2 = 1$$

а уравненіе точки касанія плоскости, данной координатами ξ_1, η_1, ζ_1, будетъ:

$$a^2\xi_1\xi + b^2\eta_1\eta - c^2\zeta_1\zeta = 1$$

Эти уравненія получаются точно также, какъ ихъ получали для эллипсоида.

Двуполый гиперболоидъ.

§ 598. Когда уравненіе (16) § 546 имѣетъ одинъ моложительный и два отрицательныхъ корня, то уравненіе поверхности приводится къ формѣ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{67}$$

полагая, послѣдовательно, $x=0$, $y=0$, $z=0$, найдемъ пересѣченія плоскостей YZ, XZ, XY, съ поверхностью:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

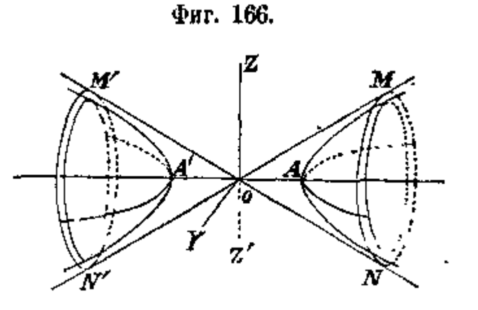
Первая кривая есть мнимый эллипсъ, а вторая и третяя гиперболы. Полагая:

$$x=0 \quad , \quad y=0 \quad ; \quad x=0 \quad , \quad z=0 \quad ; \quad y=0 \quad , \quad z=0$$

пересѣченія поверхности съ координатными осями будутъ:

$$z=\pm ci$$
$$y=\pm bi$$
$$x=\pm a$$

Фиг. 166.



Слѣдовательно оси Y и Z не встрѣчаютъ поверхность; встрѣчаетъ ее только ось X (фиг. 166) въ точкахъ A и A'. Величины a, b, c называются *осями* двуполаго гиперболоида; первая называется дѣйствительною осью, а b и c мнимыми. Мы всегда будемъ полагать, что $a > b > c$.

§ 599. Пересѣчемъ гиперболоидъ плоскосттю $x=\alpha$, то кривая пересѣченія будетъ:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\alpha^2}{a^2}-1$$

изъ этого уравненія видимъ, что пока $\alpha < a$ вторая часть будетъ отрицательная, слѣдовательно пересѣченіе будетъ мнимый эллипсъ, начиная отъ $\alpha=0$ до $\alpha=\pm a$. Когда α сдѣлается больше a, то эллипсы будутъ

дѣйствительные, ихъ оси:

$$b\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}-1} \quad , \quad c\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}-1}$$

будутъ возрастать неопредѣленно. Изъ этого видимъ, что плоскости перпендикулярныя къ оси X, начиная съ $-a$ до $+a$ не встрѣчаютъ поверхность, слѣдовательно она состоитъ изъ двухъ совершенно отдѣльныхъ частей, которыя называются *полами* поверхности; отсюда поверхность получила названіе *двуполаго гиперболоида*.

Пересѣченіе гиперболоида съ плоскостями перпендикулярными къ осямъ Y и Z получится, полагая:

$$y=\beta \quad , \quad z=\gamma$$

откуда:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{\beta^2}{b^2} \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{\gamma^2}{c^2}$$

это гиперболы, коихъ оси:

$$a\sqrt{1+\frac{\beta^2}{b^2}} \quad , \quad ci\sqrt{1+\frac{\beta^2}{b^2}} \quad ; \quad a\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{c^2}} \quad , \quad bi\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{c^2}}$$

неопредѣленно возрастаютъ съ возрастаніемъ β и γ, т. е. съ удаленіемъ сѣкущихъ плоскостей отъ начала.

Возьмемъ наконецъ, какую нибудь, плоскость:

$$x=\alpha y+\beta z+\gamma$$

и найдемъ пересѣченіе ея съ поверхностью.

Подставляя вмѣсто x это выраженіе въ уравненіе поверхности, найдемъ:

$$\frac{(\alpha y+\beta z+\gamma)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

развертывая и составляя $a^2_{12}-a_{11}a_{22}$ будемъ имѣть:

$$\frac{\alpha^2\beta^2}{a^4}-\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{\beta^2}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{a^2b^2c^2}(b^2\alpha^2+c^2\beta^2-a^2)$$

Изъ этого выраженія видимъ, что пересѣчеміе поверхности плоскостью можетъ дать всѣ три коническія сѣченія,

1. Если:

$$b^2\alpha^2 + c^2\beta^2 - a^2 < 0$$

сѣченіе будетъ эллипсъ.

2. Если:

$$b^2\alpha^2 + c^2\beta^2 - a^2 = 0$$

сѣченіе будетъ парабола.

3. Если:

$$b^2\alpha^2 + c^2\beta^2 \quad a^2 > 1$$

сѣченіе будетъ гипербола.

Второму изъ этихъ условій можно удовлетворить, полагая:

$$\alpha = \frac{a}{b}\cos\varphi \quad , \quad \beta = \frac{a}{c}\sin\varphi$$

а потому уравненіе плоскости сѣченія будетъ:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\cos\varphi - \frac{z}{c}\sin\varphi = \gamma$$

Слѣдовательно пересѣченія съ поверхностью плоскостей параллельныхъ плоскости:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\cos\varphi - \frac{z}{c}\sin\varphi = 0$$

дадутъ параболы.

§ 600. *Круговыя сѣченія.* Если вычтемъ изъ уравненія гиперболоида уравненіе шара:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

то получимъ уравненіе конуса:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) - y^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2}\right) - z^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{r^2}\right) = 0$$

проходящаго черезъ пересѣченіе гиперболоида съ шаромъ. Конусъ этотъ преобразуется въ двѣ плоскости, полагая:

$$r^2 = a^2 \quad , \quad r^2 = -b^2 \quad , \quad r^2 = -c^2$$

$$y^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) = 0$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) - y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) = 0$$

Полагая $b > c$ второе изъ предъидущихъ уравненій можно написать въ формѣ:

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2} = \pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}$$

Оно представляетъ двѣ дѣйствительныя плоскости, проходящія по оси Y. Остальмыя два уравненія суть мнимыя плоскости. Слѣдовательно двуполый гиперболоидъ пересѣкается по кругамъ двумя системами плоскостей параллельныхъ оси Y, т. е. параллельныхъ большей изъ мнимыхъ осей.

Легко найти, такимъ же образомъ, какъ въ эллипсоидѣ, координаты круглячковъ:

$$y=0 \quad , \quad x = \pm a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}} \quad , \quad y=0 \quad , \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

601. *Ассимптотическій конусъ.* Уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

представляетъ конусъ, который встрѣчаетъ поверхность гиперболоида на безконечностм.

Въ самомъ дѣлѣ, если (x, y, z) суть координаты точки на гиперболоидѣ, а (x, y, ζ) координаты, соотвѣтствующей точки на конусѣ, то будемъ имѣть:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}=0$$

вычитая, найдемъ;

$$\frac{\zeta^2-z^2}{c^2}=1 \quad , \quad \text{откуда} \quad \zeta - z = \frac{c^2}{\zeta+z}$$

по мѣрѣ возрастанія z, разность $\zeta - z$ стремится къ нулю, слѣдовательно обѣ поверхности коснутся на безконечности. Легко видѣть, что вся поверхность заключается въ конусѣ.

§ 602. Легко видѣть, что уравненія:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

представляютъ, каждое, двуполый гиперболоидъ, въ которыхъ b и c будутъ дѣйствительныя оси.

§ 603. Если въ гиперболоидѣ:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$b=c$. то уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

будетъ представлять гиперболоидъ вращенія около оси X.

§ 604. *Касательная плоскость и нормаль.* Касательная плоскость къ поверхности въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ есть:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}=1$$

отождествляя это уравненіе съ уравненіемъ:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$$

найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2}=\frac{\cos\alpha}{p}\quad,\quad\frac{y_1}{b^2}=-\frac{\cos\beta}{p}\quad,\quad\frac{z_1}{c^2}=-\frac{\cos\gamma}{p}$$

откуда:

$$p^2=a^2\cos^2\alpha-b^2\cos^2\beta-c^2\cos^2\gamma$$

Уравненія нормали будутъ:

$$(x-x_1)\,\frac{a^2}{x_1}=-(y-y_1)\,\frac{b^2}{y_1}=-(z-z_1)\,\frac{c^2}{z_1}$$

Легко доказать, какъ было сдѣлано для эллипсоида, слѣдующія предложенія:

Предложеніе 1. Сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра на три перпендикулярныя между собою плоскости, есть величина постоянная и равная:

$$a^2-b^2-c^2$$

Предложеніе 2. Геометрическое мѣсто вершины трегранного прямаго угла, описаннаго около гиперболоида, есть шаръ, коего уравненіе есть:

$$x^2+y^2+z^2=a^2-b^2-c^2$$

§ 605. *Діаметральная плоскость.* Уравненіе діаметральной, сопряженной направленію α, β, γ, плоскости есть:

$$\frac{x}{a^2}\cos\alpha - \frac{y}{b^2}\cos\beta - \frac{z}{c^2}\cos\gamma = 0$$

или:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 0$$

$(x_1 y_1 z_1)$ есть точка, въ которой сопряженное направленіе плоскости встрѣчаетъ поверхность. Діаметральная плоскость никогда не пересѣкаетъ поверхность по эллипсу. Въ самомъ дѣлѣ, если направленіе (α, β, γ), проходящее черезъ центръ находится внутри ассимптотическаго конуса, то хорды параллельныя этому направленію, пересѣкаютъ обѣ полы конуса, а слѣдовательно діаметральная плоскость, проходящая черезъ ихъ середины не встрѣчаетъ гиперболоидъ. Если направленіе (α, β, γ) внѣ конуса, то хорды параллельныя этому направленію пересѣкаютъ только одну полу конуса, слѣдовательно діаметральная плоскость, проходящая черезъ ихъ середины, пересѣкаетъ конусъ по двумъ прямымъ, а гиперболоидъ по гиперболѣ. Наконецъ если направленіе находится на конусѣ, то діаметральная плоскость будетъ касательная къ конусу, а слѣдовательно не пересѣкаетъ поверхность.

§ 606. *Діаметры.* Уравненіе гиперболоида, отнесеннаго къ тремъ сопряженнымъ діаметрамъ, коихъ длина есть a_1, b_1, c_1, будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2_1} - \frac{y^2}{b^2_1} - \frac{z^2}{c^2_1} = 1$$

Одинъ только изъ этихъ діаметровъ встрѣчаетъ поверхность. Сопряженные діаметры удовлетворяютъ уравненіе:

$$a^2_1 - b^2_1 - c_1^{\,2} = a^2 - b^2 - c^2$$

§ 607. Легко видѣть, что уравненіе двуполаго гиперболоида въ плоскостныхъ координатахъ есть:

$$a^2\xi^2 - b^2\eta^2 - c^2\zeta^2 = 1$$

а уравненіе точки касанія плоскости данной координатами будетъ:

$$a^2\xi_1\xi - b^2\eta_1\eta - c^2\zeta_1\zeta = 1$$

ГЛАВА XXXVII.

Поверхности не имѣющія центра.

Эллиптическій параболоидъ.

§ 608. Когда уравненіе втораго порядка представляетъ поверхность, неимѣющую центра, то ея уравненіе имѣетъ форму (48) § 554:

$$\lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - 2Qx = 0 \tag{1}$$

гдѣ λ_2 и λ_3 суть корни уравненія (16) § 546, а корень $\lambda_1 = 0$.

Если корни λ_2 и λ_3 имѣютъ одинаковые знаки, то уравненіе (1) можно написать въ формѣ:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} \tag{2}$$

поверхность эту назвали: *эллиптическимъ параболоидомъ.*

§ 609. Легко видѣть, что эллиптическій параболоидъ проходить черезъ начало координатъ.

Пересѣченіе поверхности съ плоскостями YZ, XZ, XY найдемъ, полагая, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$:

$$\begin{aligned} &x = 0 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ &y = 0 \quad , \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} \quad , \quad z^2 = 2\frac{c^2}{a}x \\ &z = 0 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} \quad , \quad y^2 = 2\frac{b^2}{a}x \end{aligned} \tag{3}$$

Первое изъ этихъ уравненій представляетъ точку—начало координатъ, такъ что въ этой точкѣ поверхность касается плоскости YZ. Второе и третее уравненія представляютъ, очевидно, параболы, одна на плоскости XZ, другая на плоскости XY. Если черезъ p и p_1 означимъ ихъ параметры $\frac{c^2}{a}$, $\frac{b^2}{a}$, то ихъ уравненія будутъ:

$$y^2 = 2p_1 x \qquad\qquad z^2 = 2px \tag{4}$$

Мы предположили, что a есть количество положительное.

Если въ уравненіи (2) будемъ давать x различныя числовыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, то найдемъ пересѣченія поверхности съ плоскостями перпендикулярными къ оси X,

Въ отрицательномъ направленіи оси X плоскости сѣченій не пересѣкаютъ поверхности и даютъ мнимые эллипсы:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-\frac{2\alpha}{a}$$

Вся поверхность, слѣдовательно, лежитъ съ положительной стороны плоскости YZ.

Въ положительномъ направленіи эллипсы будутъ дѣйствительные:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2\alpha}{a} \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2\frac{2\alpha}{a}}+\frac{z^2}{c^2\frac{2\alpha}{a}}=1$$

коихъ оси будутъ:

$$b\sqrt{\frac{2\alpha}{a}} \quad , \quad c\sqrt{\frac{2\alpha}{a}}$$

съ возрастаніемъ α, т. е. съ удаленіемъ плоскости сѣченія отъ начала координатъ, размѣры эллипсовъ возрастаютъ до безконечности.

Давая z числовыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ сѣченія поверхности съ перпендикулярными оси Z плоскостями. Эти сѣченія будутъ:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a}-\frac{\alpha^2}{c^2} \quad \text{или} \quad y^2=2px+k$$

гдѣ:

$$p=\frac{b^2}{a} \quad , \quad k=-\frac{\alpha^2 b^2}{c^2}$$

Очевидно это параболы, коихъ параметры будутъ равны параметру параболы въ плоскости XY, а проэкціи вершинъ будутъ находиться на оси X.

Тоже самое можно повторить и относительно пересѣченія поверхности плоскостями перпендикулярными къ оси Y.

Найдемъ теперь пересѣченіе поверхности съ какою нибудь плоскостью:

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma \tag{5}$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (2), найдемъ проэкцію пересѣченія плоскости (5) съ поверхностью:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{(\alpha x+\beta y+\gamma)^2}{c^2}=\frac{2x}{a}$$

Это уравненіе даетъ для выраженія:

$$a^2_{12}-a_{11}a_{22}$$

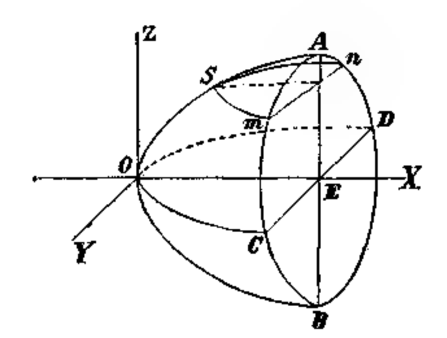
слѣдующее:

$$\frac{\alpha^2\beta^2a^2}{c^2}-\frac{\alpha^2a^2}{c^4}\left(\frac{1}{b}+\frac{\beta^2}{c^2}\right)=-\frac{\alpha^2a^2}{b^2c^2}$$

величина, очевидно отрицательная, слѣдовательно всѣ сѣченія будутъ эллипсы. Но если $\alpha=0$, то сѣченіе будетъ парабола а α только въ томъ случаѣ равно нулю, когда сѣкущая плоскость параллельна оси X или оси поверхности. Ось X называется *осью поверхности*, потому что центры всѣхъ эллипсовъ пересѣченія плоскостей перпендикулярныхъ къ оси X находятся на оси X.

Изъ этого видимъ, что эллиптическій параболоидъ есть поверхность незамкнутая, имѣющая одну только полу (фиг. 167), которая вся лежитъ съ положительной стороны плоскости YZ.

Фиг. 167.



Фиг. 168.

Если въ уравненіи (2) количество a было-бы величиной отрицательной, то вся поверхность эллиптическаго параболоида находилась бы съ отрицательной стороны плоскости YZ (фиг. 168).

§ 610. *Круговыя сѣченія.* Если въ уравненіе (2) положимъ $b>c$, то легко видѣть, что есть такое направленіе плоскости сѣченія параллельной оси Y, что эллипсъ сѣченія будетъ кругъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ можно убѣдится аналитически. Проведемъ черезъ начало координатъ плоскость и положимъ, что пересѣченіе ея съ поверхностью есть кругъ. Представимъ шаръ, проходящій черезъ этотъ кругъ и касающійся въ началѣ координатъ плоскости YZ. Центръ шара будетъ на оси X, а его уравненіе:

$$x^2+y^2+z^2=2rx$$

если r есть радіусъ, или:

$$\frac{x^2}{r}+\frac{y^2}{r}+\frac{z^2}{r}-2x=0$$

вычитая изъ этого уравненія раздѣленнаго на a, уравненіе (2), найдемъ:

$$\frac{x^2}{ar}+\left(\frac{1}{ar}-\frac{1}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{ar}-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0$$

поверхность эта есть конусъ, который долженъ преобразоваться въ двѣ плоскости, если параболоидъ и шаръ пересѣкаются по кругу. Положивъ, послѣдовательно, $ar=b^2$, $ar=c^2$, найдемъ:

$$\frac{x^2}{b^2}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0$$

$$\frac{x^2}{c^2}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)y^2=0$$

Первое изъ этихъ уравненій представляетъ пару дѣйствительныхъ плоскостей, если $b>c$, а второе пару мнимыхъ. Слѣдовательно эллиптическій параболоидъ имѣетъ двѣ системы круговыхъ сѣченій, плоскости которыхъ суть плоскости параллельныя плоскостямъ:

$$\frac{x}{b^2}+z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}=0 \quad , \quad \frac{x}{b^2}-z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}=0 \qquad (6)$$

§ 611. *Касательная плоскость.* Пусть $(x_1\, y_1\, z_1)$ будетъ точка на параболоидѣ, то уравненіе касательной плоскости въ этой точкѣ будетъ:

$$-\frac{(x-x_1)}{a}+(y-y_1)\frac{y_1}{b^2}+(z-z_1)\frac{z_1}{c^2}=0$$

откуда найдемъ:

$$\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-\frac{(x-x_1)}{a}=0 \qquad (7)$$

Если p есть длина перпендикуляра опущеннаго изъ начала координатъ на плоскость (7), α, β, γ суть углы этого перпендикуляра съ координатными осями, то уравненіе касательной плоскости будетъ:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$$

Сравнивая это уравненіе съ (7), найдемъ:

$$-\frac{1}{a\cos\alpha}=\frac{y_1}{b^2\cos\beta}=\frac{z_1}{c^2\cos\gamma}=\frac{x_1}{ap}$$

откуда:

$$x_1=-\frac{p}{\cos\alpha} \quad , \quad y_1=-\frac{b^2\cos\beta}{a\cos\alpha} \quad , \quad z_1=-\frac{c^2\cos\gamma}{a\cos\alpha}$$

подставляя эти величины въ уравненіе (2), найдемъ:

$$p = -\frac{b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}{2a\cos\alpha} \tag{8}$$

Слѣдовательно уравненіе касательной плоскости можетъ быть написано въ формѣ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + \frac{b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma}{2a\cos\alpha} = 0 \tag{9}$$

§ 612. *Предложеніе.* Сумма проэкцій, на оси параболоида, перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершины поверхности на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, есть величина постоянная.

Доказательство. Означимъ эти перпендикуляры черезъ p_1, p_2, p_3, углы, которые они составляютъ съ координатными осями, означимъ черезъ $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$, то уравненіе (8) даетъ:

$$p_1\cos\alpha_1 = -\frac{b^2}{2a}\cos^2\beta_1 - \frac{c^2}{2a}\cos^2\gamma_1$$

$$p_2\cos\alpha_2 = -\frac{b^2}{2a}\cos^2\beta_2 - \frac{c^2}{2a}\cos^2\gamma_2$$

$$p_3\cos\alpha_2 = -\frac{b^2}{2a}\cos^2\beta_2 - \frac{c^2}{2a}\cos^2\gamma_3$$

Слѣдовательно найдемъ, складывая:

$$p_1\cos\alpha_1 + p_2\cos\alpha_2 + p_3\cos\alpha_3 = -\frac{b^2 + c^2}{2a} \tag{10}$$

§ 613. *Предложеніе.* Геометрическое мѣсто вершинъ прямоугольнаго трегракнаго угла, описаннаго около эллиптическаго параболоида, есть плоскость перпендикулярная къ оси поверхности.

Доказательство. При тѣхъ же значеніяхъ p и α, β, γ уравненіе (9) даетъ:

$$x\cos^2\alpha_1 + y\cos\alpha_1\cos\beta_1 + z\cos\alpha_1\cos\gamma_1 + \frac{b^2}{2a}\cos^2\beta_1 + \frac{c^2}{2a}\cos^2\gamma_1 = 0$$

$$x\cos^2\alpha_2 + y\cos\alpha_2\cos\beta_2 + z\cos\alpha_2\cos\gamma_2 + \frac{b^2}{2a}\cos^2\beta_2 + \frac{c^2}{2a}\cos^2\gamma_2 = 0$$

$$x\cos^2\alpha_3 + y\cos\alpha_3\cos\beta_3 + z\cos\alpha_3\cos\gamma_3 + \frac{b^2}{2a}\cos^2\beta_3 + \frac{c^2}{2a}\cos^2\gamma_3 = 0$$

Складывая эти уравненія, найдемъ:

$$x + \frac{b^2 + c^2}{2a} = 0$$

§ 614. *Нормальная линія.* Уравненія нормальной линіи въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ суть:

$$\frac{x - x_1}{\frac{-1}{a}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}} \tag{11}$$

Чтобы опредѣлить число нормальныхъ линій, проведенныхъ изъ данной точки $(x' y' z')$ внѣ поверхности, мы будемъ имѣть уравненія:

$$\frac{x' - x}{\frac{-1}{a}} = \frac{y' - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z' - z}{\frac{z}{c^2}} \quad , \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} \tag{12}$$

$(x y z)$ есть точка встрѣчи нормали съ поверхностью. Если черезъ ρ означимъ общее значеніе первыхъ трехъ уравненій, то найдемъ:

$$x = x' + \frac{\rho}{a} \quad , \quad y = \frac{b^2 y'}{b^2 + \rho} \quad , \quad z = \frac{c^2 z'}{c^2 + \rho} \tag{13}$$

подставляя эти значенія въ уравненіе поверхности, найдемъ:

$$\frac{b^2 y'^2}{(b^2 + \rho)^2} + \frac{c^2 z'^2}{(c^2 + \rho)^2} - 2\,\frac{(ax' + \rho)}{a^2} = 0 \tag{14}$$

уравненіе пятой степени относительно ρ, слѣдовательно изъ данной точки внѣ поверхности можно провесть пять нормальныхъ линій къ поверхности.

Изъ уравненій (12) найдемъ:

$$-(x' - x)\frac{y}{b^2} = \frac{y' - y}{a} \quad , \quad (x' - x)\frac{z}{c^2} = \frac{z' - z}{a}$$

или:

$$\frac{xy}{b^2} - \frac{x'y}{b^2} + \frac{y - y'}{a} = 0 \quad , \quad \frac{xz}{c^2} - \frac{x'y}{c^2} + \frac{z - z'}{a} = 0$$

умножая первое на y, а второе на z и складывая, найдемъ:

$$x\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - x'\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + \frac{y^2 + z^2 - y'y - z'z}{a} = 0$$

или

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2x'x - y'y - z'z = 0 \tag{15}$$

Такъ какъ коэфиціенты при y^2 и z^2 равны, то уравненіе представляетъ поверхность вращенія около оси параллельной оси X. Изъ этого видимъ, что изъ данной точки внѣ поверхности можно провести пять нормальныхъ линій, коихъ точки пересѣченія съ поверхностью находятся на поверхности вращенія, проходящей черезъ начало, и коей ось вращенія параллельна оси параболоида.

§ 615. *Діаметральная плоскость.* Уравненіе діаметральной плоскости сопряженной направленію (α, β, γ) есть (10) § 545:

$$-\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma=0$$

откуда видимъ, что діаметральная плоскость, сопряженная направленію (α, β, γ), всегда параллельна оси поверхности, какое бы нибыло направленіе (α, β, γ). Изъ этого заключаемъ, что всѣ діаметры, которые суть пересѣченіе діаметральныхъ плоскостей, параллельны оси поверхности.

Есть безчисленное множество координатныхъ осей относительно которыхъ уравненіе эллиптическаго параболоида будетъ имѣть форму:

$$\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=\frac{2x}{a_1}$$

Легко видѣть, что такія оси, въ какой-нибудь точкѣ на поверхности, принятой за начало, суть: діаметръ проходящій черезъ эту точку—ось X, касательная къ параболѣ въ плоскости, проходящей черезъ діаметръ—ось Y, и ось Z—сопряженное направленіе къ діаметральной плоскости, въ которой лежитъ парабола.

§ 616. Уравненіе эллиптическаго параболоида въ линейныхъ координатахъ, очевидно, будетъ:

$$b^2\eta^2+c^2\zeta^2=2a\xi$$

а точка касанія касательной плоскости (ξ_1, η_1, ζ_1) есть:

$$b^2\eta_1\eta+c^2\zeta_1\zeta=a(\xi_1+\xi)$$

Гиперболическій параболоидъ.

§ 617. Если въ уравненіи (16) § 546 одинъ изъ трехъ корней равенъ нулю, напримѣръ $\lambda_1=0$, а другіе два λ_2 и λ_3 имѣютъ противные знаки, то уравненію поверхности можно дать форму:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a} \tag{16}$$

Изъ этого уравненія видимъ, что начало координатъ находится на поверхности, такъ какъ $x=0$, $y=0$, $z=0$ удовлетворяютъ уравненію (16). Пе-

ресѣченіе поверхности съ координатными плоскостями XY, XZ, YZ получимъ, дѣлая въ уравненіи (16), послѣдовательно, $z=0$, $y=0$, $x=0$. Эти положенія даютъ:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a} \quad , \quad \frac{z^2}{c^2}=-\frac{2x}{a} \quad , \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Откуда видимъ, что пересѣченіе поверхности съ плоскостями XY, ZX суть параболы, а съ плоскостью YZ двѣ прямыя. Слѣдовательно гиперболическій параболоидъ есть такая поверхность, на которой могутъ помѣщаться и прямыя линіи.

§ 618. Разсмотримъ теперь перересѣченіе поверхности съ плоскостями перпендикулярными къ осямъ X, Y, Z. Если сдѣлаемъ $x=\alpha$, то будемъ имѣть:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{2\alpha}{a}$$

уравненіе гиперболы. Давая, послѣдовательно, количеству α всѣ значенія отъ 0 до $+\infty$ будемъ имѣть постоянно гиперболы, начиная съ двухъ прямыхъ. Оси этихъ гиперболъ будутъ:

$$b\sqrt{\frac{2\alpha}{a}} \quad , \quad c\sqrt{\frac{2\alpha}{a}}$$

изъ коихъ первая будетъ дѣйствительная ось, а вторая мнимая. Оси эти возрастаютъ неопредѣленно съ возрастаніемъ α, т. е. съ удаленіемъ плоскости сѣченія отъ начала координатъ вершины гиперболъ расходятся все больше и больше. Давая α отрицательныя значенія отъ 0 до $-\infty$ будемъ имѣть гиперболы:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2\alpha}{a}$$

оси которыхъ будутъ:

$$c\sqrt{\frac{2\alpha}{a}} \quad , \quad b\sqrt{\frac{2\alpha}{a}}$$

изъ коихъ первая будетъ дѣйствительная ось, а вторая мнимая, т. е. гиперболы будутъ сопряженныя предъидущимъ. Положимъ теперь $z=\gamma$, то получимъ пересѣченіе поверхности съ плоскостью перпендикулярною къ оси Z:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{2x}{a}+\frac{\gamma^2}{c^2} \tag{17}$$

Это есть парабола, которой вершина при $\gamma=0$ находится въ началѣ координатъ, а по мѣрѣ возрастанія γ удаляется неопредѣленно отъ начала по отрицательной части оси X. Если сдѣлаемъ $y=\beta$, то найдемъ:

$$\frac{z^2}{c^2}=-\frac{2x}{a}+\frac{\beta^2}{b^2} \tag{18}$$

Это также парабола, которой вершина при $\beta=0$ находится въ началѣ координатъ, а затѣмъ по мѣрѣ возрастанія β удаляется неопредѣленно отъ начала по положительной части оси X. Пересѣчемъ наконецъ параболоидъ (16), какою-нибудь плоскостью:

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma$$

подставляя это выраженіе въ уравненіе (16), найдемъ:

$$\frac{y^2}{a^2}-\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{c}\right)^2=\frac{2x}{a}$$

Составляя для этого уравненія выраженіе:

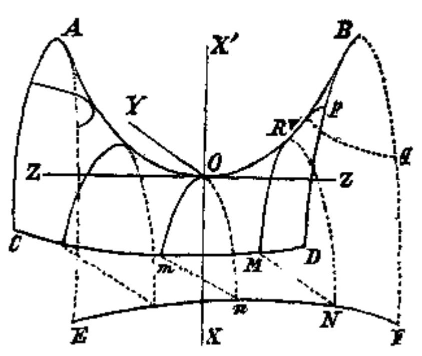
$$a^2_{12}-a_{11}a_{22}$$

найдемъ:

$$a^2_{12}-a_{11}a_{22}=\frac{\alpha^2}{a^2b^2}$$

величина положительная, слѣдовательно сѣченіе есть всегда гипербола, исключая того случая, когда $\alpha=0$; въ этомъ случаѣ сѣченіе есть парабола.

Фиг. 169.



Изъ этого видимъ, что гиперболическій параболоидъ (фиг. 169) не можетъ имѣть круговыхъ сѣченій съ плоскостью, потому-что всѣ его сѣченія съ плоскостью суть незамкнутыя кривыя.

Изъ уравненій (17) и (18) видимъ, что сѣченія поверхности плоскостями параллельными плоскости XY суть равныя параболы, точно также равны между собою и параболы пересѣченій поверхности плоскостями параллельными плоскости XZ, слѣдовательно этотъ параболоидъ можно разсматривать, какъ образованный движеніемъ параболы, коей плоскость движется параллельно плоскости XY, а вершина скользитъ по параболѣ (17). Или эта поверхность можетъ быть образована параболой, коей плоскость остается параллельною плоскости XZ, а вершина скользитъ по параболѣ (18).

§ 619. *Прямолинейныя женератрисы.* Выше видѣли, что на гиперболическомъ параболоидѣ помѣщаются двѣ прямыя:

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\ ,\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$$

посмотримъ есть-ли еще, кромѣ этой пары, прямыя, которыя помѣщаются на этой поверхности. Пусть такая прямая будетъ:

$$x = \alpha z + \beta \quad , \quad y = \gamma z + \delta \tag{19}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе поверхности (16), найдемъ:

$$\frac{(\gamma z + \delta)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{2(\alpha z + \beta)}{a}$$

уравненіе, которое должно быть удовлетворено независимо отъ z, а для этого надобно имѣть:

$$\frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0 \quad , \quad \frac{\gamma\delta}{b^2} - \frac{\alpha}{a} = 0 \quad , \quad \frac{\delta^2}{b^2} - \frac{2\beta}{a} = 0 \tag{20}$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что точки пересѣченія прямыхъ, лежащихъ на поверхности, съ плоскостью XY, лежатъ всѣ на параболѣ:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a} \tag{21}$$

которая есть пересѣченіе поверхности плоскостью XY. Другія два уравненія (20) даютъ:

$$\gamma = \pm \frac{b}{c} \quad , \quad \alpha = \pm \frac{a\delta}{bc} \tag{22}$$

Одинъ изъ параметровъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ остается произвольнымъ, а какъ для α и γ имѣемъ только двѣ величины, то существуетъ только двѣ системы женератрисъ и только двѣ, коихъ уравненія суть:

$$\begin{aligned} &(1') \quad x = \frac{a\delta}{bc} z + \beta \quad , \quad y = \frac{b}{c} z + \delta \\ &(2') \quad x = -\frac{a\delta}{bc} z + \beta \quad , \quad y = -\frac{b}{c} z + \delta \end{aligned} \tag{23}$$

β и δ суть координаты, какой-нибудь точки параболы (21). Уравненія прямолинейныхъ женератрисъ могутъ быть выведены прямо изъ уравненія поверхности:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a} \tag{24}$$

которое можно написать въ формѣ:

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \frac{2x}{a}$$

Для этого положимъ:

$$(1'') \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \lambda \quad , \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{2x}{\lambda a}$$

$$(2'') \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \mu \quad , \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{2x}{\mu a} \qquad (25)$$

λ и μ суть произвольные параметры, опредѣляющіе двѣ различныя системы прямыхъ, находящихся на поверхности, такъ какъ перемножая предъидущія уравненія находимъ уравненіе (24).

Полагая для краткости:

$$A_1 = \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \quad , \quad A_2 = \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \quad , \quad B_1 = \frac{2x}{a}$$

уравненія (25) сдѣлаются:

$$(a) \quad A_1 - \lambda = 0 \quad , \quad \lambda A_2 - B_1 = 0$$

$$(b) \quad A_2 - \mu = 0 \quad , \quad \mu A_1 - B_1 = 0 \qquad (26)$$

Фиг. 170.

A D C B

а уравненіе поверхности будетъ:

$$A_1 A_2 = B_1 \qquad (27)$$

часть этой поверхности представлена на чертежѣ (фиг. 170) въ видѣ сѣдлообразной, вогнутой, поверхности $ABCD$.

§ 620. *Предложеніе.* Черезъ каждую точку на гиперболическомъ параболоидѣ проходитъ по одной женератрисѣ изъ каждой системы.

Доказательство. Пусть x_1, y_1, z_1 будутъ координаты, какой-нибудь, точки на поверхности. Пусть A'_1, A'_2, B'_1 будутъ величины количествъ A_1, A_2, B_1 соотвѣтствующихъ этимъ координатамъ, то будемъ имѣть уравненія:

$$A'_1 - \lambda = 0 \quad , \quad \lambda A'_2 - B'_1 = 0 \quad , \quad A'_2 - \mu = 0 \quad , \quad \mu A'_1 - B'_1 = 0$$

откуда:

$$\lambda = A'_1 \quad , \quad \lambda = \frac{B'_1}{A'_2} \quad , \quad \mu = A'_2 \quad , \quad \mu = \frac{B'_1}{A'_1}$$

но изъ уравненія (27) имѣемъ:

$$A'_1 A'_2 = B'_1$$

Слѣдовательно оба параметра λ и μ совпадаютъ.

§ 621. *Предложеніе.* Двѣ женератрисы одной системы не встрѣчаются, а двѣ различныхъ системъ лежатъ въ одной плоскости.

Доказательство. Пусть:

$$A_1 - \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_1 A_2 - B_1 = 0$$

$$A_1 - \lambda_2 = 0 \quad , \quad \lambda_2 A_2 - B_1 = 0$$

будутъ двѣ женератрисы одной системы, вычитая эти уравненія, найдемъ:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

что невозможно, такъ какъ λ_1 и λ_2 неравны.

Съ другой стороны, уравненіе плоскости, проходящей по женератрисѣ первой системы, будетъ:

$$A_1 - \lambda + k(\lambda A_2 - B_1) = 0$$

и если обусловимъ, что эта плоскость проходитъ по женератрисѣ другой системы, то найдемъ два условія, которыя оба даютъ для k одно значеніе $\frac{1}{\mu}$. Слѣдовательно плоскость:

$$\mu A_1 + \lambda A_2 - B_1 - \lambda\mu = 0$$

содержитъ двѣ женератрисы различныхъ системъ. Въ декартовыхъ координатахъ уравненіе этой плоскости будетъ:

$$(\lambda+\mu)\frac{y}{b}+(\lambda-\mu)\frac{z}{c}-\frac{2x}{a}-\lambda\mu=0$$

§ 622. *Женератрисы перпендикулярныя.* Возьмемъ уравненія (1″) и (2″) § 619 и рѣшивъ ихъ относительно x и y, найдемъ:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a\lambda}{c}z+\frac{\lambda^2 a}{2} \quad , \quad y = \frac{b}{c}z+\lambda b \\ x &= -\frac{\mu a}{c}z+\frac{\mu^2 a}{2} \quad , \quad y = -\frac{b}{c}z+\mu b \end{aligned} \tag{28}$$

Въ этой формѣ видно, что женератрисы не могутъ быть параллельны.

Условіе перпендикулярности женератрисъ, очевидно, есть:

$$-\frac{\lambda\mu a^2}{c^2}-\frac{b^2}{c^2}+1=0 \quad \text{или} \quad \lambda\mu+\frac{b^2-c^2}{a^2}=0$$

Замѣщая λ и μ ихъ выраженіями (25), найдемъ:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+\frac{b^2-c^2}{a^2}=0$$

или

$$2x+\frac{b^2-c^2}{a}=0 \tag{29}$$

откуда видимъ, что геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ женератрисы перпендикулярны, есть гипербола—пересѣченіе предъидущей плоскости (29) съ поверхностью.

§ 623. *Предложеніе.* Проэкціи женератрисъ поверхности суть касательныя къ главной параболѣ на плоскости XY.

Доказательство. Исключивъ z изъ уравненій:

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda \quad , \quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{2x}{\lambda a}$$

найдемъ:

$$\frac{2\lambda y}{b}=\lambda^2+\frac{2x}{a} \tag{30}$$

Но для, какой нибудь, точки $(x_1\, y_1\, 0)$ параболы:

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x \tag{31}$$

имѣемъ:

$$y^2_1 = \frac{2b^2}{a} x_1 \quad , \quad \lambda = \frac{y_1}{b}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (30) найдемъ уравненіе проэкцій на плоскости XY:

$$yy_1 = \frac{b^2}{a} (x + x_1)$$

а это есть уравненіе касательной къ параболѣ (31) въ точкѣ $(x_1 y_1)$.

§ 624. *Предложеніе.* Всѣ женератрисы одной системы параллельны одной постоянной плоскости.

Доказательство. Уравненіе:

$$A_1 - \lambda = 0$$

представляетъ плоскость, проэктирующую женератрисы первой системы на плоскость YZ; всѣ эти плоскости параллельны плоскости:

$$A_1 = 0$$

слѣдовательно женератрисы, находящіяся въ этихъ плоскостяхъ, параллельны плоскости:

$$A_1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \tag{32}$$

Точно также женератрисы второй системы параллельны плоскости:

$$A_2 + 0 \quad \text{или} \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \tag{33}$$

Эти двѣ плоскости (32) и (33) называются *директрисами* поверхности.

§ 625. Предъидущія свойства даютъ два способа образованія гиперболическаго параболоида движеніемъ прямой линіи. Эта поверхность можетъ быть образована, если прямая второй системы скользитъ по тремъ прямымъ первой системы, или еще, если прямая второй системы скользитъ по двумъ прямымъ первой системы, оставаясь параллельною плоскости:

$$A_2 = 0$$

Обратно, поверхность образованная прямой, скользящей по тремъ даннымъ прямымъ, параллельнымъ одной плоскости и не лежащимъ по парно въ одной плоскости, есть гиперболическій параболоидъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть AB, CD, OE суть три данныя прямыя параллельныя одной плоскости (фиг. 171). Возьмемъ прямую OE за ось Z, плоскость XZ за плоскость, которой данныя прямыя параллельны, за ось Y возьмемъ прямую встрѣчающую прямыя AB и CD.

Уравненія данныхъ прямыхъ, отнесенныхъ къ этой системѣ координатъ, будутъ:

$$(AB)\ \begin{matrix} y=\beta \\ z=\gamma x \end{matrix}\quad,\quad (CD)\ \begin{matrix} y=\beta' \\ z=\gamma' x \end{matrix}\quad,\quad (OE)\ \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

Уравненіе женератрисы, разсматриваемой, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, одной проходящей черезъ AB, а другой, проходящей черезъ CD, будетъ:

$$z-\gamma x=\lambda(y-\beta)\quad,\quad z-\gamma' x=\mu(y-\beta') \tag{34}$$

гдѣ λ и μ суть произвольные параметры.

Вычитая эти уравненія, найдемъ:

$$(\gamma'-\gamma)x=(\lambda-\mu)y+\mu\beta'-\lambda\beta$$

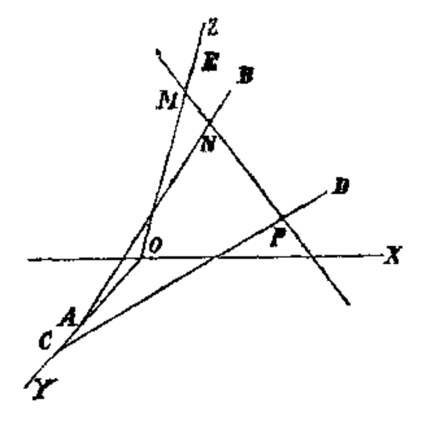
и какъ прямая (женератриса) встрѣчаетъ ось Z, то:

$$\mu\beta'-\lambda\beta=0$$

Исключая параметры λ, μ съ помощью уравненій (34), найдемъ:

$$(\beta-\beta')yz-(\beta\gamma-\beta'\gamma')xy-\beta\beta'(\gamma-\gamma')x=0$$

Фиг. 171.



это поверхность втораго порядка, неимѣющая центра, образованная движеніемъ прямой, слѣдовательно есть гиперболическій параболоидъ.

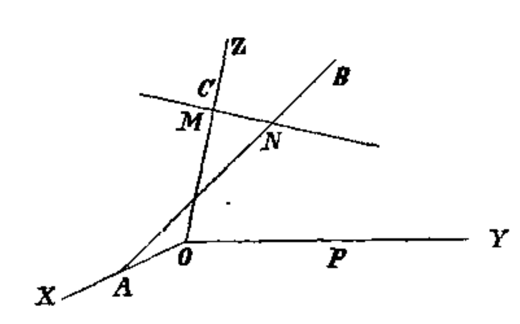
Точно также поверхность описанная прямой, скользящей по двумъ прямымъ и параллельной данной плоскости, есть гиперболическій параболоидъ. Чтобы это показать, пусть AB и OC (фиг. 172) будутъ двѣ данныя прямыя, P данная плоскость. Возьмемъ OC за ось Z, плоскость P за плоскость XY; выберемъ за плоскость XZ плоскость параллельную, AB, а за ось Y прямую встрѣчающую AB.

Уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$(AB)\ \begin{matrix} y=\beta \\ z=\alpha x \end{matrix}\qquad (OC)\ \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$$

Женератриса будучи параллельна плоскости XY и встрѣчая ось Z, будетъ имѣть уравненія:

Фиг. 172.



$$z = \lambda \quad , \quad y = \mu x \qquad (35)$$

Параметры λ и μ должны удовлетворять уравненіе:

$$\alpha\beta = \lambda\mu$$

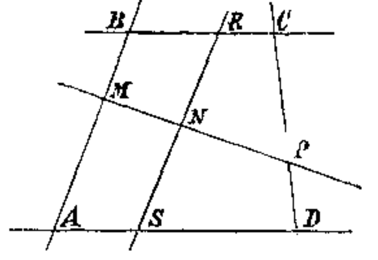
если женератриса упирается на AB. Исключая λ и μ съ помощью уравненій (35), найдемъ уравненіе поверхности:

$$yz - \alpha\beta x = 0$$

которое, очевидно, есть гиперболическій параболоидъ.

§ 626. *Предложеніе.* Если прямая линія такъ скользитъ по двумъ даннымъ прямымъ, что ея отрѣзки будутъ пропорціональны, то она опишетъ гиперболическій параболоидъ.

Фиг. 173.



Доказательство. Замѣтимъ сначала, что если AB и CD (фиг. 173) суть двѣ женератрисы параболоида, а AD, MP и BC три прямыя другой системы, то:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DP}{PC}$$

Въ самомъ дѣлѣ, если по каждой прямой AD, MP и BC проведемъ плоскости параллельныя направляющей плоскости, то онѣ будутъ параллельны между собою и опредѣлятъ на AB и CD пропорціональные отрѣзки.

Обратно, положимъ, что прямая MP скользитъ по AB и CD и образуетъ пропорціональные отрѣзки. Пусть Q будетъ плоскость параллельная двумъ положеніямъ AD и BC скользящей прямой, проведемъ черезъ AB и BC двѣ плоскости параллельныя плоскости Q. Плоскость, проведенная черезъ точку M параллельно послѣднимъ плоскостямъ, отдѣлитъ на AB и CD пропорціональные отрѣзки, а слѣдовательно пройдетъ черезъ точку P и опишетъ, какъ видно гиперболическій параболоидъ. На этомъ основаніи устраиваютъ модель этой поверхности: раздѣляютъ стороны AB и CD косаго четыреугольника на равное число равныхъ частей, точки дѣленія соединяютъ нитяии, которыя представляютъ женератрисы параболоида. Если двѣ другія стороны четыреугольника также раздѣлимъ на

равное число равныхъ частей, то нити, соединяющія точки дѣленія будутъ женератрисы другой системы.

Мы назвали прямыя, лежащія на однополомъ гиперболоидѣ и на гиперболическомъ параболоидѣ, *женератрисами*, потому что движеніемъ этихъ прямыхъ по извѣстному закону образуются эти двѣ поверхности.

§ 627. *Касательная плоскость.* Уравненіе касательной плоскости есть:

$$\frac{yy_1}{b^2}-\frac{zz_1}{c^2}-\frac{(x+x_1)}{a}=0$$

Если отождествимъ это уравненіе съ уравненіемъ плоскости двухъ женератрисъ:

$$(\lambda+\mu)\frac{y}{b}+(\lambda-\mu)\frac{z}{c}-\frac{2x}{a}-\gamma\mu=0$$

то найдемъ:

$$\frac{\lambda+\mu}{\frac{y_1}{b}}=\frac{\lambda-\mu}{-\frac{z_1}{c}}=2$$

откуда:

$$\lambda=\frac{y_1}{b}-\frac{z_1}{c}\quad,\quad\mu=\frac{y_1}{b}+\frac{z_1}{c}$$

это величины параметровъ λ и μ женератрисъ, пересѣкающихся въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$. Слѣдовательно касательная плоскость проходитъ по двумъ женератрисамъ, пересѣкающимся въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$.

Легко, какъ выше, показать, что:

1. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины поверхности на касательную плоскость, будетъ:

$$p=-\frac{b^2\cos^2\beta-c^2\cos^2\gamma}{2a\cos\alpha}$$

такъ что:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+\frac{b^2\cos^2\beta-c^2\cos^2\gamma}{2a\cos\alpha}=0$$

будетъ уравненіе касательной плоскости.

2. Сумма проэкцій на оси гиперболическаго параболоида перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершины поверхности на три перпендикулярныя между собою касательныя плоскости, есть величина постоянная.

3. Геометрическое мѣсто вершины треграннаго прямаго угла, описаннаго около гиперболическаго параболоида, есть:

$$x+\frac{b^2-c^2}{2a}=0$$

плоскость перпендикулярная къ оси X.

4. Уравненія нормальной линіи суть:

$$\frac{x-x_1}{-\frac{1}{a}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{-\frac{z_1}{c^2}}.$$

Изъ точки взятой внѣ поверхности къ ней можно, вообще, провести пять нормальныхъ линій, коихъ основанія находятся на поверхности вращенія, проходящей черезъ вершину, и коей ось параллельна оси гиперболическаго параболоида.

5. Всѣ діаметры параллельны и есть безчисленное множество координатныхъ косоугольныхъ осей, для которыхъ гиперболическій параболоидъ будетъ представляться уравненіемъ формы:

$$\frac{y^2}{b^2_1}-\frac{z^2}{c^2_1}=\frac{2x}{a_1}$$

§ 628. Уравненіе гиперболическаго параболоида въ линейныхъ координатахъ будетъ:

$$b^2\eta^2+c^2\zeta^2=2a\xi$$

а уравненіе точки касанія касательной плоскости (ζ_1, η_1, ξ_1) есть:

$$b^2\eta_1\eta-c^2\zeta_1\zeta=a(\xi+\xi_1)$$

ГЛАВА XXXVIII.

Шаръ.

§ 629. Уравненіе *шара* получимъ, если выразимъ основное свойство шаровой поверхности, что разстояніе каждой ея точки отъ центра есть величина постоянная.

Пусть a, b, c будутъ координаты центра, x, y, z координаты, какой-нибудь точки поверхности шара, r радіусъ шара, то будемъ имѣть:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \tag{1}$$

Если начало координатъ помѣстимъ въ центрѣ шара, то $a=0$, $b=0$ $c=0$, слѣдовательно уравненіе (1) сдѣлается:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{2}$$

Это самая простая форма уравненія шара.

Если развернемъ уравненіе (1), то найдемъ:

$$x^2+y^2+z^2+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d=0 \tag{3}$$

гдѣ:

$$a_1=-a\quad,\quad b_1=-b\quad,\quad c_1=-c\quad,\quad d=a^2+b^2+c^2-r^2 \tag{4}$$

Изъ уравненія (3) видимъ, что самое общее уравненіе шара въ прямоугольныхъ координатахъ не заключаетъ произведеній, или какъ говорятъ прямоугольниковъ xy, xz, yz, и коэфиціенты при x^2, y^2, z^2 равны.

Если уравненіе шара дано въ формѣ (3), то координаты центра и радіусъ вычисляются съ помощью уравненій (4).

Уравненіе шара есть частный случай уравненія поверхности втораго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (5)$$

когда:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad , \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

въ этомъ случаѣ уравненіе (5) будетъ:

$$a_{11}(x^2 + y^2 + z^2) + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (6)$$

которое по раздѣленіи на a_{11} имѣетъ форму уравненія (3).

§ 630. Если координаты будутъ косоугольныя и углы между ними будутъ α, β, γ, то уравненіе поверхности шара будетъ (§ 433, 14):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\gamma + \\ + 2(x-a)(z-c)\cos\beta + 2(y-b)(z-c)\cos\alpha = r^2 \quad (7)$$

гдѣ a, b, c суть координаты центра, а r радіусъ шара. Если начало координатъ помѣстимъ въ центрѣ шара, то $a = b = c = 0$, откуда уравненіе шара сдѣлается:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos\gamma + 2xz\cos\beta + 2yz\cos\alpha = r^2 \quad (8)$$

§ 631. Пусть x_1, y_1, z_1 будутъ координаты точки M въ пространствѣ, а:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

уравненіе шара; a, b, c координаты его центра.

Изъ точки M проведемъ, какую-нибудь, касательную MT къ шару; T точка касанія. Если O есть центръ шара, то очевидно:

$$MT^2 = OM^2 - r^2$$

но:

$$OM^2 = (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 + (z_1-c)^2$$

слѣдовательно:

$$MT^2 = (x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 + (z_1-c)^2 - r^2$$

Изъ этого заключаемъ, что если въ уравненіе шара:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

вставимъ координаты, какой-нибудь точки внѣ поверхности шара, то полученное числовое значеніе будетъ длина касательной проведенной изъ взятой точки къ шару.

§ 632. Уравненіе шара (3) заключаетъ четыре произвольные коэфиціента a_1, b_1, c_1, d_1, слѣдовательно шаръ вполнѣ опредѣляется четырьмя данными точками не лежащими въ одной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, если точки $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$, $(x_4y_4z_4)$, находятся на шарѣ:

$$x^2+y^2+z^2+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d=0 \tag{9}$$

то имѣемъ:

$$\begin{aligned}
x^2_1+y^2_1+z^2_1+2a_1x_1+2b_1y_1+2c_1z_1+d=0\\
x^2_2+y^2_2+z^2_2+2a_1x_2+2b_1y_2+2c_1z_2+d=0\\
x^2_3+y^2_3+z^2_3+2a_1x_3+2b_1y_3+2c_1z_3+d=0\\
x^2_4+y^2_4+z^2_4+2a_1x_4+2b_1y_4+2c_1z_3+d=0
\end{aligned}$$

откуда найдемъ уравненіе шара, проходящаго черезъ четыре данныя точки, если къ этимъ уравненіямъ присовокупимъ уравненіе (9):

$$\begin{vmatrix}
x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1\\
x^2_1+y^2_1+z^2_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1\\
x^2_2+y^2_2+z^2_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1\\
x^2_3+y^2_3+z^2_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1\\
x^2_4+y^2_4+z^2_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1
\end{vmatrix}=0 \tag{10}$$

Уравненія конуса, описаннаго около шара, полярной и касательной плоскостей.

§ 633. Пусть уравненіе шара будетъ:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{11}$$

пусть $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ будутъ двѣ какія нибудь точки; координаты точки находящейся на прямой, проходящей черезъ эти точки, будутъ (§ 437):

$$x=\frac{x_1+\lambda x_1}{1+\lambda}\quad,\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\quad,\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

Если прямая встрѣчаетъ шаръ, и λ соотвѣтствуетъ точкѣ встрѣчи, то эти выраженія должны удовлетворять уравненіе (11). Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$(x^2_2+y^2_2+z^2_2-r^2)\lambda^2+2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-r^2)\lambda+x^2_1+y^2_1+z^2_1-r^2=0 \quad (12)$$

Это уравненіе второй степени относительно λ, слѣдовательно прямая встрѣчаетъ шаръ, вообще, въ двухъ точкахъ. Если эти точки совпадаютъ, то прямая касается шара, а для этого необходимо, чтобы въ уравненіи (12) оба корня были равны, т. е. должны имѣть:

$$(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-r^2)^2=(x^2_1+y^2_1+z^2_1-r^2)(x^2_2+y^2_2+z^2_2-r^2) \quad (13)$$

Если теперь точку $(x_1y_1z_1)$ оставимъ въ покоѣ, а точку $(x_2y_2z_2)$ будемъ такъ перемѣщать въ пространствѣ, чтобы ея координаты постоянно удовлетворяли уравненіе (12), то уравненіе:

$$(x_1x+y_1y+z_1z-r^2)^2=(x^2_1+y^2_1+z^2_1-r^2)(x^2+y^2+z^2-r^2) \quad (14)$$

будетъ представлять, очевидно, геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на касательныхъ проведенныхъ изъ точки $(x_1y_1z_1)$ къ поверхностм шара. Очевидно, это уравненіе конуса, описаннаго около шаре, коего вершина находится въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$.

Если точка $(x_1y_1z_1)$ находится на поверхмости шара, то:

$$x^2_1+y^2_1+z^2_1-r^2=0$$

слѣдовательно уравненіе (14) сдѣлается:

$$xx_1+yy_1+zz_1-r^2=0$$

какъ видно плоскость, а такъ какъ всѣ прямыя въ этой плоскости, проходящія черезъ $(x_1y_1z_1)$ касаются шара, то это есть уравненіе касательной плоскости въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ къ шару (11).

§ 634. Если точки пересѣченія шара съ прямою, проходящею черезъ точки $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, суть сопряженно гармоническія точкамъ $(x_1y_1z_1)$ и $(x_2y_2z_2)$, то корни уравненія (12) должны быть равны, но съ противными знаками, а для этого необходимо имѣть:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2-r^2=0 \quad (15)$$

Если точку $(x_1y_1z_1)$ оставимъ въ покоѣ, а точку $(x_2y_2z_2)$ будемъ такъ опредѣлять, чтобы ея координаты удовлетворяли уравненіе (15), то:

$$x_1x+y_1y+z_1z-r^2=0 \quad (16)$$

будетъ уравненіе плоскости, которая есть геометрическое мѣсто четвертой гармонической къ тремъ точкамъ: $(x_1y_1z_1)$ и къ двумъ точкамъ пересѣченія прямой, проходящей черезъ точку $(x_1y_1z_1)$ съ шаромъ. Слѣдовательно это есть полярная плоскость, коей полюсъ есть $(x_1y_1z_1)$. Если точка $(x_1y_1z_1)$ находится на шарѣ, то полярная плоскость обращается въ касательную.

Легко видѣть, что если уравненіе шара будетъ дано въ общей формѣ (1), то уравненіе полярной плоскости точки $(x_1y_1z_1)$ или касательной плоскости въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ на шарѣ будетъ:

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)+(z_1-c)(z-c)-r^2=0 \qquad (17)$$

Замѣтимъ, что уравненіе полярной плоскости можно получить изъ общаго уравненія ея для поверхности втораго порядка (§ 510).

§ 635. Уравненіе прямой, соединяющей точку $(x_1y_1z_1)$ съ центромъ (a, b, c) шара, есть:

$$\frac{x-a}{x_1-a}=\frac{y-b}{y_1-b}=\frac{z-c}{z_1-c} \qquad (18)$$

изъ котораго видимъ (§ 457), что эта прямая перпендикулярна къ полярной плоскости (17). Если разстояніе полюса $(x_1y_1z_1)$ отъ полярной плоскости назовемъ черезъ p, а разстояніе его отъ центра шара черезъ q, то легко видѣть, что:

$$\frac{r^2}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2}}=p$$

или:

$$r^2=p.q \qquad (19)$$

такъ какъ:

$$q=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2}$$

Съ помощью этого выраженія легко построить полярную плоскость, если данъ полюсъ.

Уравненіе шара въ линейныхъ координатахъ.

§ 636. Мы видѣли, что если координаты точки суть a, b, c, то ея уравненіе есть:

$$a\xi+b\eta+c\zeta=1 \qquad (20)$$

разстояніе r этой точки отъ плоскости данной координатами ξ_1, η_1, ζ_1 имѣетъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{a\xi_1+b\eta_1+c\zeta_1-1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}}=r \qquad (21)$$

если r есть величина постоянная, а ξ_1, η_1, ζ_1 будемъ такъ измѣнять, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіе (21), то будемъ имѣть уравненіе шара:

$$(a\xi + b\eta + c\zeta - 1)^2 = r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \tag{22}$$

Координаты ξ, η, ζ удовлетворяющіе этому уравненію опредѣляютъ положеніе плоскости, которая касается шара, коего координаты центра суть (a, b, c), а радіусъ r. Уравненіе центра, очевидно, есть (20).

Если начало координатъ находится въ центрѣ шара, то $a = b = c = 0$ и уравненіе шара будетъ:

$$r^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 \tag{23}$$

Если развернемъ уравменіе (22), то найдемъ:

$$\begin{gathered}(a^2 - r^2)\xi^2 + (b^2 - r^2)\eta^2 + (c^2 - r^2)\zeta^2 + \\ + 2ab\xi\eta + 2ac\xi\zeta + 2bc\eta\zeta - 2(a\xi + b\eta + c\zeta) + 1 = 0\end{gathered} \tag{24}$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ:

$$\begin{gathered}a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta + \\ + 2a_{14}\xi + 2a_{24}\eta + 2a_{34}\zeta + a_{44} = 0\end{gathered} \tag{25}$$

найдемъ условія, при которыхъ это уравненіе представляетъ шаръ:

$$\begin{gathered}a^2 - r^2 = \frac{a_{11}}{a_{44}} \quad , \quad b^2 - r^2 = \frac{a_{22}}{a_{44}} \quad , \quad c^2 - r^2 = \frac{a_{33}}{a_{44}} \\ ab = \frac{a_{12}}{a_{44}} \;,\; ac = \frac{a_{13}}{a_{44}} \;,\; bc = \frac{a_{23}}{a_{44}} \;,\; a = -\frac{a_{14}}{a_{44}} \;,\; b = -\frac{a_{24}}{a_{44}} \;,\; c = -\frac{a_{34}}{a_{44}}\end{gathered} \tag{26}$$

исключая изъ этихъ уравненій a, b, c, r найдемъ:

$$\begin{gathered}a^2_{14} - a_{11}a_{44} = a^2_{24} - a_{22}a_{44} = a^2_{34} - a_{33}a_{44} \\ a_{14}a_{24} = a_{12}a_{44} \quad , \quad a_{14}a_{34} = a_{13}a_{44} \quad , \quad a_{24}a_{34} = a_{23}a_{44}\end{gathered} \tag{27}$$

Это необходимыя и достаточныя условія, чтобы общее уравненіе втораго порядка представляло шаръ. Если условія (27) удовлетворяются, то координаты центра и радіусъ будутъ:

$$\begin{gathered}a = -\frac{a_{14}}{a_{44}} \quad , \quad b = -\frac{a_{24}}{a_{44}} \quad , \quad c = -\frac{a_{34}}{a_{44}} \\ r^2 = \frac{a^2_{14} - a_{11}a_{44}}{a^2_{44}} = \frac{a^2_{24} - a_{22}a_{44}}{a^2_{44}} = \frac{a^2_{34} - a_{33}a_{44}}{a^2_{44}}\end{gathered} \tag{28}$$

§ 637. *Задача.* Найти уравненіе точки касанія касательной плоскости къ шару?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе шара будетъ:

$$r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)=1 \tag{29}$$

пусть ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 будутъ координаты двухъ, какихъ-нибудь, плоскостей. Очевидно уравненія этихъ плоскостей въ координатахъ Декарта будутъ:

$$\xi_1 x+\eta_1 y+\zeta_1 z-1=0 \quad ; \quad \xi_2 x+\eta_2 y+\zeta_2 z-1=0$$

Уравненіе плоскости, проходящей черезъ пересѣченіе этихъ двухъ плоскостей, будетъ:

$$\xi_1 x+\eta_1 y+\zeta_1 z-1+\lambda(\xi_2 x+\eta_2 y+\zeta_2 r-1)=0 \tag{30}$$

Слѣдовательно координаты этой плоскости будутъ:

$$\xi=\frac{\xi_1+\lambda\zeta_2}{1+\lambda} \quad , \quad \eta=\frac{\eta_1+\lambda\eta_2}{1+\lambda} \quad , \quad \zeta=\frac{\zeta_1+\lambda\zeta_2}{1+\lambda} \tag{31}$$

Если плоскость (30) будетъ касательная къ поверхности шара (29), то координаты (31) должны удовлетворять уравненіе (29), слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\left\{r^2(\xi^2{}_2+\eta^2{}_2+\zeta^2{}_2)-1\right\}\lambda^2+2\left\{(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)r^2-1\right\}\lambda+$$
$$+r^2(\xi^2{}_1+\eta^2{}_1+\zeta^2{}_1)-1=0 \tag{32}$$

Это уравненіе квадратное, слѣдовательно даетъ для λ два значенія, откуда заключаемъ, что черезъ пересѣченіе двухъ данныхъ плоскостей можно провести двѣ касательныя плоскости къ шару. Но если кординаты ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 удовлетворяютъ уравненіе:

$$\left\{r^2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)-1\right\}^2=\left\{r^2(\xi^2{}_1+\eta^2{}_1+\zeta^2{}_1)-1\right\}\left\{r^2(\xi^2{}_2+\eta^2{}_2+\zeta^2{}_2)-1\right\} \tag{33}$$

то оба корня уравненія (32) будутъ равны, а слѣдовательно плоскости совпадутъ, что требуетъ, чтобы прямая пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей касалась шара, въ одной изъ точекъ пересѣченія плоскости ξ_1, η_1, ζ_1 съ поверхностью шара. Если въ предъидущемъ уравненіи замѣнимъ ξ_2, η_2, ζ_2 перемѣнными ζ, η, ξ, то найдемъ:

$$\left\{r^2(\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta)-1\right\}^2-\left\{r^2(\xi^2{}_1+\eta^2{}_1+\zeta^2{}_1)-1\right\}\left\{r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-1\right\}=0 \tag{34}$$

Это уравненіе удовлетворяется координатами, какой нибудь, плоскости,

проходящей черезъ касательную къ кругу пересѣченія плоскости ξ_1, η_1, ζ_1 съ шаромъ. Но если эта послѣдняя плоскость будетъ касательная къ шару, то имѣемъ:

$$r^2(\xi^2_1+\eta^2_1+\zeta^2_1)-1=0$$

Слѣдовательно предъидущее равенство сдѣлается:

$$r^2(\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta)=1 \tag{35}$$

Это уравненіе удовлетворяется координатами, какой нибудь изъ плоскостей, пересѣкающей плоскость $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ по касательной къ шару; слѣдовательно это будетъ уравменіе искомой точки.

Если уравненіе шара будетъ:

$$(a\xi+b\eta+c\zeta-1)^2=r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$$

то уравненіе точки касанія плоскости $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ будетъ:

$$(a\xi_1+b\eta_1+c\zeta_1-1)(a\xi+b\eta+c\zeta-1)-r^2(\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta)=0$$

§ 638. Если въ уравненіи (32) корни будутъ равны, но съ противными знаками, то будемъ имѣть:

$$r^2(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)-1=0 \tag{36}$$

при этомъ условіи, очевидно плоскости $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$, $(\xi_2\eta_2\zeta_2)$ и двѣ соотвѣтствующіе корнямъ $+\lambda$ и $-\lambda$ будутъ гармоническія. Если плоскость $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ фиксируемъ, а координаты плоскости $(\xi_2\eta_2\zeta_2)$ будемъ такъ измѣнять, чтобы онѣ удовлетворяли уравненіе, то это уравненіе будетъ представлять точку, которая есть, очевидно, полюсъ плоскости $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$. Всѣ предъидущіе результаты можно получить изъ общихъ свойствъ кривыхъ втораго порядка, изложенныхъ въ §§ 207—211.

Система двухъ шаровъ.

639. Пусть уравненія двухъ шаровъ будутъ:

$$\begin{aligned} S_1&=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r^2_1=0\\ S_2&=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r^2_2=0 \end{aligned} \tag{37}$$

если эти уравменія вычтемъ, то найдемъ:

$$S_1-S_2=0 \tag{38}$$

или:

$$(a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+(c_2-c_1)z+$$
$$+\frac{a^2_1+b^2_1+c^2_1-a^2_2-b^2_2-c^2_2-r^2_1+r^2_2}{2}=0 \quad (39)$$

Это уравненіе представляетъ плоскость, которая, очевидно, перпендикулярна къ прямой:

$$\frac{x-a_1}{a_1-a_2}=\frac{y-b_1}{b_1-b_2}=\frac{z-c_1}{c_1-c_2} \quad (40)$$

соединяющей центры шаровъ $S_1=0$ и $S_2=0$. Эта плоскость называется *радикальною плоскостью.*

Изъ уравненія:

$$S_1=S_2 \quad (41)$$

видимъ, припоминая числовое значеніе количествъ S_1 и S_2 (§ 631), что всѣ касательныя, проведенныя изъ какой нибудь точки радикальной плоскости къ шарамъ (37) равны. Если шары $S_1=0$ и $S_2=0$ пересѣкаются, то радикальная плоскость есть плоскость круга, по которому пересѣкаются шары (37); если шары касаются, то радикальная плоскость есть общая касательная плоскость къ обѣимъ шарамъ, наконецъ если шары не пересѣкаются, то радикальная плоскость проходитъ черезъ средины общихъ касательныхъ къ шарамъ. Въ частномъ случаѣ, если шары концентричны, а при этомъ $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$, то уравненіе (39) сводится на постоянное количество, что показываетъ, что радикальная плоскость находится на безконечности.

§ 640. Очевидно, что уравненіе:

$$S_1-\lambda S_2=0 \quad (42)$$

есть шаръ, проходящій черезъ пересѣченіе шаровъ (37); давая λ всевозможныя значенія, мы будемъ имѣть систему изъ безконечнаго числа шаровъ, которые всѣ проходятъ черезъ пересѣченіе шаровъ (37). Если означимъ черезъ a, b, c, r координаты центра и радіусъ одного изъ этихъ шаровъ, то будемъ имѣть:

$$a=\frac{a_1-\lambda a_2}{1-\lambda}\quad,\quad b=\frac{b_1-\lambda b_2}{1-\lambda}\quad,\quad c=\frac{c_1-\lambda c_2}{1-b} \quad (43)$$

$$r^2=\frac{r^2_2\lambda^2+(d^2-r^2_1-r^2_2)\lambda+r^2_1}{(1-\lambda)^2} \quad (44)$$

гдѣ d есть разстояніе между центрами шаровъ. Изъ выраженій (43) ви-

димъ, что центры шаровъ системы всѣ находятся на прямой, соединяющей центры шаровъ (37). Такъ какъ всѣ шары (42) проходятъ черезъ пересѣченіе, дѣйствительное или мнимое шаровъ (37), то вся система имѣетъ общую радикальную плоскость. Между шарами системы (42) есть два шара, коихъ радіусы равны нулю; положеніе этихъ шаровъ или точекъ найдемъ, если въ уравненіи (44) положимъ $r=0$. Это условіе даетъ уравненіе:

$$r^2_2\lambda^2 - (d^2 - r^2_1 - r^2_2)\lambda + r^2_1 = 0 \qquad (45)$$

Изъ этого квадратнаго уравненія найдемъ для λ два значенія λ_1 и λ_2, которыя и дадутъ положеніе центровъ искомыхъ шаровъ, называемыхъ *предѣльными*.

Предѣльныя точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря потому будутъ-ли корни уравненія (45) дѣйствительные или мнимые. Если выраженіе:

$$(d^2 - r^2_1 - r^2_2)^2 - 4r^2_1 r^2_2 \qquad (46)$$

будетъ положительное, то корни уравненія (45) будутъ дѣйствительные, въ противномъ случаѣ они будутъ мнимые. Если выраженіе (46) будетъ равно нулю, то корни будутъ равные.

Выраженіе (46) можетъ быть написано въ формѣ:

$$(d + r_1 + r_2)(-d + r_1 + r_2)(d - r_1 + r_2)(d + r_1 - r_2) \qquad (47)$$

изъ котораго видно, что выраженіе (46) будетъ отрицательнымъ подъ условіемъ:

$$d > r_1 + r_2 \quad \text{или} \quad d < r_2 - r_1$$

если $r_2 > r_1$. Предѣльныя точки совмѣстятся если:

$$d = r_1 + r_2 \quad \text{или} \quad d = r_2 - r_1$$

Изъ этого видимъ, что предѣльныя точки будутъ мнимыя, если шары пересѣкаются, и дѣйствительныя въ противномъ случаѣ.

§ 641. Такъ какъ уравненіе (44) относительно λ второй степени, то въ системѣ шаровъ (42) есть всегда два шара съ даннымъ радіусомъ.

Если шары (37) пересѣкаются, то легко построить систему шаровъ (42), имѣющихъ общую сѣкущую плоскость, но если шары (37) не пересѣкаются, то построеніе системы шаровъ (42) дѣлается съ помощью слѣдующихъ свойствъ системы.

Такъ какъ система шаровъ (42) имѣетъ общую радикальную плоскость, то изъ свойствъ (41) слѣдуетъ, что касательныя, проведенныя изъ

какой-нибудь точки m радикальной плоскости ко всѣмъ шарамъ системы (42), равны, слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ касанія касательныхъ проведенныхъ изъ точки m къ шарамъ системы, есть шаръ, пересѣкающій всѣ шары системы подъ прямымъ угломъ и коего центръ есть точка m. Этотъ шаръ, очевидно, проходитъ и черезъ *предѣльныя* точки системы. Если точку m будемъ перемѣщать по радикальной плоскости, то получимъ другую систему шаровъ, пересѣкающихъ первую подъ прямыми углами.

Всѣ шары второй системы проходятъ черезъ предѣльныя точки, слѣдовательно, прямая соединяющая эти точки есть общая хорда шаровъ второй системы. На этомъ свойствѣ легко построить, какой-нибудь изъ шаровъ, принадлежащихъ второй системѣ.

§ 642. *Полярная плоскость системы шаровъ.* Мы видѣли выше (§ 634), что полярныя плоскости шаровъ $S_1=0$ и $S_2=0$ относительно полюса $(x_1y_1z_1)$ суть:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1-a_1)(x-a_1)+(y_1-b_1)(y-b_1)+(z_1-c_1)(z-c_1)-r^2_1=0 \\ P_2 &= (x_1-a_2)(x-a_2)+(y_1-b_2)(y-b_2)+(z_1-c_2)(z-c_2)-r^2_2=0 \end{aligned} \tag{48}$$

слѣдовательно полярная плоскость системы (42) относительно того же полюса будетъ:

$$P_1-\lambda P_2=0 \tag{49}$$

Изъ формы этого уравненія видимъ, что полярная плоскость, какой-нибудь, точки относительно шаровъ системы (42) всегда проходитъ черезъ пересѣченіе полярныхъ плоскостей (48) той-же точки относительно шаровъ $S_1=0$ и $S_2=0$.

Если полюсъ находится на прямой соединяющей центры шаровъ, то вмѣсто x_1, y_1, z_1 надобно подставить въ уравненіе (49) выраженія:

$$x_1=\frac{a_1-\lambda a_2}{1-\lambda}\quad,\quad y_1=\frac{b_1-\lambda b_2}{1-\lambda}\quad,\quad z_1=\frac{c_1-\lambda c_2}{1-\lambda} \tag{50}$$

откуда будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} P_1 &= (a_1-a_2)(x-a_1)+(b_1-b_2)(y-b_1)+(c_1-c_2)(z-c_1)-\frac{r^2_1(1-\lambda)}{\lambda}=0 \\ P_2 &= (a_1-a_2)(x-a_2)+(b_1-b_2)(y-b_2)+(c_1-c_2)(z-c_2)-r^2_2(1-\lambda)=0 \end{aligned} \tag{51}$$

очевидно эти плоскости перпендикулярны къ прямой, соединяющей центры шаровъ.

Если желаемъ имѣть полярныя плоскости одной изъ предѣльныхъ точекъ, то мы должны въ уравненія (51) вставить вмѣсто λ корни уравненія (45) λ_1 и λ_2, что даетъ:

$$(a_1-a_2)(x-a_1)+(b_1-b_2)(y-b_1)+(c_1-c_2)(z-c_1)-\frac{r^2_1(1-\lambda_1)}{\lambda_1}=0$$
$$(a_1-a_2)(x-a_2)+(b_1-b_2)(y-b_2)+(c_1-c_2)(z-c_2)-r^2_2(1-\lambda_1)=0 \tag{52}$$

Если въ эти уравненія вставимъ вмѣсто x, y, z координаты другой предѣльной точки:

$$x=\frac{a_1-\lambda_2 a_2}{1-\lambda_2} \quad , \quad y=\frac{b_1-\lambda_2 b_2}{1-\lambda_2} \quad , \quad z=\frac{c_1-\lambda_2 c_2}{1-\lambda_2} \tag{53}$$

и замѣтимъ, что:

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{r^2_1}{r^2_2} \quad , \quad \lambda_1+\lambda_2=-\frac{(d^2-r^2_1-r^2_2)}{r^2_2}$$

то найдемъ, что уравненія (52) удовлетворяются этими координатами, откуда видимъ, что полярныя плоскости (52) проходятъ черезъ другую предѣльную точку, а такъ какъ онѣ перпендикулярны къ прямой соединяющей центры шаровъ, то онѣ совмѣщаются, откуда слѣдуетъ, что полярная плоскость одной изъ предѣльныхъ точекъ, относительно каждаго изъ шаровъ системы (42), есть плоскость, проходящая черезъ другую предѣльную точку перпендикулярно къ прямой, соединяющей центры шаровъ.

Центры подобія.

§ 643. Пусть уавненія двухъ шаровъ будутъ:

$$S_1=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r^2_1=0$$
$$S_2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r^2_2=0 \tag{54}$$

уравненія центровъ этихъ шаровъ, очевидно, будутъ:

$$A_1=a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta-1=0 \quad , \quad A_2=a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta-1=0 \tag{55}$$

Два общіе описанные конуса около шаровъ (54) имѣютъ вершины на прямой, соединяющей центры шаровъ, одну внѣ шаровъ, другую между шарами. Назовемъ центры шаровъ черезъ O_1, O_2, а вершины конусовъ черезъ S и s. Помѣстимъ начало координатъ въ вершинѣ S, возьмемъ за

ось X прямую SO_1O_2. Плоскость XZ пересѣчетъ оба шара по кругамъ, коихъ внѣшній центръ подобія будетъ вершина S. Если A и a будутъ двѣ, какія-нибудь, соотвѣтственныя точки на кругахъ пересѣченія, то будемъ имѣть, очевидно:

$$\frac{SA}{sa} = \frac{r_1}{r_2} = k$$

откуда:

$$SA = sa \,.\, k \tag{56}$$

k есть коэфиціентъ подобія круговъ. Но за плоскость XZ можно взять какую угодно плоскость, проходящую по прямой O_1O_2, слѣдовательно зависимость (56) будетъ имѣть мѣсто для двухъ, какихъ нибудь, точекъ шаровъ, лежащихъ на прямой, проходящей черезъ вершину S. Такимъ образомъ уравненіе служитъ для опредѣленія одной изъ двухъ точекъ A и a, если другая дана и данъ коэфиціентъ подобія k. Вершина S называется *внѣшнимъ центромъ подобія* двухъ шаровъ (54), а вершина s—*внутреннимъ центромъ подобія* тѣхъ-же шаровъ.

Изъ подобія круговъ въ плоскости, проходящей черезъ прямую SO_1O_2, слѣдуетъ, что S, O_1, s, O_2 суть гармоническія точки и что радіусы проведенные въ соотвѣтственныя точки шаровъ параллельны. Чтобы построить внѣшній центръ подобія двухъ данныхъ шаровъ надобно черезъ ихъ центры провести два параллельные радіуса въ одномъ направленіи и черезъ ихъ концы провести прямую, которая встрѣтитъ прямую O_1O_2 въ искомой точкѣ S. Если параллельные радіусы будутъ проведены въ противуположныхъ направленіяхъ, то прямая, соединяющая ихъ концы встрѣтитъ прямую центровъ O_1O_2 въ точкѣ s, которая будетъ внутреннимъ центромъ подобія.

§ 644. *Задача.* Найти координаты центровъ подобія двухъ данныхъ шаровъ?

Рѣшеніе. Выше видѣли, что точки S, O_1, s, O_2 суть гармоническія и что:

$$\frac{r_1}{r^2} = \frac{O_1S}{O_2S} = \frac{O_1s}{O_2s}$$

Замѣчая, что уравненія точекъ O_1 и O_2 суть (55):

$$A_1 = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta - 1 = 0 \quad , \quad A_2 = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta - 1 = 0$$

найдемъ уравненія точекъ S и s:

$$(S) \quad A_1 - \frac{r_1}{r_2} A_2 = 0 \quad , \quad (s) \quad A_2 + \frac{r_1}{r_2} A_2 = 0 \tag{57}$$

или:

$$(a_1r_2-a_2r_1)\xi+(b_1r_2-b_2r_1)\eta+(c_1r_2-c_2r_1)\zeta-(r_2-r_1)=0$$
$$(a_1r_2+a_2r_1)\xi+(b_1r_2+b_2r_1)\eta+(c_1r_2+c_2r_1)\zeta-(r_2+r_1)=0 \qquad (58)$$

откуда координаты точекъ S и s будутъ:

$$(S)\quad x=\frac{a_1r_2-a_2r_1}{r_2-r_1}\ ,\quad y=\frac{b_1r_2-b_2r_1}{r_2-r_1}\ ,\quad z=\frac{c_1r_2-c_2r_1}{r_2-r_1}$$
$$(s)\quad x=\frac{a_1r_2+a_2r_1}{r_2+r_2}\ ,\quad y=\frac{b_1r_2+b_2r_1}{r_2+r_1}\ ,\quad z=\frac{c_1r_2+c_2r_1}{r_2+r_1} \qquad (59)$$

§ 645. *Задача.* Найти уравненія конусовъ, описанныхъ около двухъ данныхъ шаровъ?

Рѣшеніе. Означимъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты вершины конуса, описаннаго около шара $S_1=0$, его уравненіе будетъ (§ 631):

$$\{(x_1-a_1)(x-a_1)+(y_1-b_1)(y-b_1)+(z_1-c_1)(z-c_1)-r^2_1\}^2-$$
$$-S_1\{(x_1-a_1)^2+(y_1-b_1)^2+(z_1-c_1)^2-r^2_1\}=0 \qquad (60)$$

Замѣстивъ координаты x_1, y_1, z_1, координатами S (59), найдемъ:

$$\{(x-a_1)(a_1-a_2)+(y-b_1)(b_1-b_2)+(z-c_1)(c_1-c_2)-r_1(r_2-r_1)\}^2-$$
$$-S_1\{\overline{O_1O_2}^2-(r_2-r_1)^2\}=0$$

Если развернемъ квадратъ въ этомъ уравненіи и замѣтимъ, что:

$$\frac{1}{2}(S_2-S_1)=$$
$$=(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)z+\frac{a^2_2+b^2_2+c^2_2-a^2_1-b^2_1-c^2_2-r^2_2+r^2_2}{2}$$

то найдемъ:

$$\{S_2-S_1-\overline{O_1O_2}^2+(r_2-r_1)^2\}^2-4S_1\{\overline{O_1O_2}^2-(r_2-r_1)^2\}=0 \qquad (61)$$

Это есть уравненіе конуса описаннаго около шаровъ $S_1=0$ и $S_2=0$, коего вершина есть точка S. Легко такимъ же образомъ найти описанный конусъ, коего вершина есть точка s:

$$\{S_2-S_1-\overline{O_1O_2}^2+(r_1+r_2)^2\}^2-4S_1\{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2\}=0 \qquad (62)$$

§ 646. *Задача.* Найти уравненія полярныхъ плоскостей центровъ подобія двухъ шаровъ?

Рѣшеніе. Полярная плоскость точки $(x_1y_1z_1)$ относительно шара $S_1=0$ есть:

$$(x_1-a_1)(x-a_1)+(y_1-b_1)(y-b_1)+(z_1-c_1)(z-c_1)-r^2_1=0$$

Замѣстимъ координаты x_1, y_1, z_1 координатами S (59), то съ помощію предъидущаго преобразованія, найдемъ:

$$S_2-S_1-\{\overline{O_1O_2}^2-(r_2-r_1)^2\}=0 \tag{63}$$

Полярная плоскость той-же точки относительно шара $S_2=0$ будетъ:

$$S_2-S_1+\{\overline{O_1O_2}^2-(r_2-r_1)^2\}=0 \tag{64}$$

Точно также найдемъ уравненія полярныхъ плоскостей внутренняго центра подобія относительно обоихъ шаровъ:

$$\left.\begin{aligned}S_2-S_1-\{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2\}=0\\ S_2-S_1+\{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2\}=0\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Система трехъ шаровъ

§ 647. Пусть данные три шара будутъ:

$$\left.\begin{aligned}S_1&=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r^2_1=0\\ S_2&=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r^2_2=0\\ S_3&=(x-a_3)^2+(y-b_3)^2+(z-c_3)^2-r^2_3=0\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Уравненія ихъ центровъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned}A_1&=a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta-1=0\\ A_2&=a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta-1=0\\ A_3&=a_3\xi+b_3\eta+c_3\zeta-1=0\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Радикальныя плоскости каждой пары изъ трехъ шаровъ (66) будутъ:

$$S_1-S_2=0\quad,\quad S_2-S_3=0\quad,\quad S_3-S_1=0 \tag{68}$$

Легко видѣть, что эти три плоскости пересѣкаются по одной прямой, которая называется *радикальною осью* трехъ шаровъ.

Каждая изъ точекъ радикальной оси удовлетворяетъ уравненія:

$$S_1=S_2=S_3 \tag{69}$$

Слѣдовательно она есть геометрическое мѣсто точекъ, изъ коихъ касательныя, проведенныя къ тремъ шарамъ (66), равны. Такъ какъ радикальная плоскость перпендикулярна къ прямой соединяющей центры шаровъ, то изъ этого слѣдуетъ, что радикальная ось перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ центры трехъ шаровъ.

648. Уравненіе:

$$S_1+\lambda S_2+\mu S_3=0 \tag{70}$$

представляетъ систему шаровъ, имѣющихъ общую радикальную ось съ шарами (66).

Въ самомъ дѣлѣ, длина касательной, проведенной изъ какой нибудь точки радикальной оси къ шару (70), очевидно, есть:

$$\frac{S_1+\lambda S_2+\mu S_3}{1+\lambda+\mu}$$

но для всякой точки на радикальной оси имѣемъ $S_1=S_3=S_3$, слѣдовательно:

$$\frac{S_1+\lambda S_2+\mu S_3}{1+\lambda+\mu}=S_1 \tag{71}$$

а это показываетъ, что всѣ шары системы (70) имѣютъ общую радикальную ось.

Координаты центра одного изъ шаровъ системы (70) суть:

$$x=\frac{a_1+\lambda a_2+\mu a_3}{1+\lambda+\mu}\quad,\quad y=\frac{b_1+\lambda b_2+\mu b_3}{1+\lambda+\mu}\quad,\quad z=\frac{c_1+\lambda c_1+\mu c_3}{1+\lambda+\mu}$$

исключая изъ этихъ уравненій λ и μ найдемъ геометрическое мѣсто центровъ шаровъ (70):

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_3 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

которое, какъ видно, есть плоскость, проходящая черезъ центры трехъ шаровъ (66).

Задача. Показать, что геометрическое мѣсто центровъ шаровъ системы (70), коихъ радіусъ есть данная величина, есть коническое сѣченіе на плоскости центровъ?

§ 649. *Предложеніе*. Полярныя плоскости данной точки, относительно каждаго изъ системы шаровъ (70), проходятъ всѣ черезъ одну и туже точку.

Доказательство. Пусть:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \tag{72}$$

будутъ три шара.

$$S_1 + \lambda S_2 + \mu S_3 = 0 \tag{73}$$

есть система шаровъ имѣющихъ общую радикальную ось съ тремя данными шарами (72).

Если:

$$P_1 = 0 \quad , \quad P_2 = 0 \quad , \quad P_3 = 0$$

суть полярныя плоскости точки $(x_1 y_1 z_1)$ относительно шаровъ (72), то:

$$P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3 = 0 \tag{74}$$

будетъ, очевидно, полярная плоскость той-же точки относительно шара (73). Изъ формы уравненія (74) видно, что эта плоскость проходитъ черезъ точку пересѣченія плоскостей (73), какія бы нибыли значенія параметровъ λ и μ.

Задача. Показать, что если данная точка $(x_1 y_1 z_1)$ находится на радикальной оси трехъ шаровъ, то полярныя плоскости (73) пересѣкаются также на радикальной оси?

§ 650. *Центры подобія.* Три шара:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \tag{75}$$

взятые попарно имѣютъ шесть центровъ подобія, которые расположены на сторонахъ треугольника $O_1 O_2 O_3$, если O_1, O_2, O_3 суть центры данныхъ шаровъ. Уравненія этихъ центровъ суть:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0 \\ \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3} + \frac{A_1}{r_1} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} = 0 \end{aligned} \tag{76}$$

первыя три уравненія даютъ тождество:

$$\left(\frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3}\right) + \left(\frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1}\right) + \left(\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2}\right) = 0$$

Слѣдовательно три внѣшние центра подобія лежатъ на одной прямой ли-

ніи. Изъ тѣхъ же уравненій (76) найдемъ еще слѣдующія тождества:

$$\left(\frac{A_1}{r_1}+\frac{A_2}{r_2}\right)-\left(\frac{A_2}{r_2}+\frac{A_2}{r_3}\right)+\left(\frac{A_3}{r_3}-\frac{A_1}{r_1}\right)\equiv 0$$

$$\left(\frac{A_1}{r_1}+\frac{A_2}{r_2}\right)-\left(\frac{A_3}{r_3}+\frac{A_1}{r_1}\right)-\left(\frac{A_2}{r_2}-\frac{A_3}{r_3}\right)\equiv 0$$

$$\left(\frac{A_2}{r_2}+\frac{A_3}{r_3}\right)-\left(\frac{A_3}{r_3}+\frac{A_1}{r_1}\right)+\left(\frac{A_1}{r_1}-\frac{A_2}{r_2}\right)\equiv 0$$

Изъ этихъ тождествъ слѣдуетъ, что два внутренніе и одинъ внѣшній изъ центровъ подобія также лежатъ на одной прямой линіи. Четыре прямыя, на которыхъ лежатъ по три центра подобія называются *осями подобія* трехъ шаровъ. Очевидно эти четыре оси находятся въ плоскости центровъ.

Съ помощью уравненій (76) легко написать координаты центровъ подобія. Такъ, напримѣръ, координаты центровъ подобія:

$$\frac{A_2}{r_2}-\frac{A_3}{r_3}=0 \quad , \quad \frac{A_3}{r_3}-\frac{A_1}{r_1}=0$$

суть:

$$x_1=\frac{a_2r_1-a_1r_2}{r_1-r_2} \quad , \quad y_1=\frac{b_2r_1-b_1r_2}{r_1-r_2} \quad , \quad z_1=\frac{c_2r_1-c_1r_2}{r_1-r_2}$$

$$x_2=\frac{a_3r_1-r_1a_3}{r_1-r_3} \quad , \quad y_2=\frac{b_3r_1-b_1r_3}{r_1-r_3} \quad , \quad z_2=\frac{c_3r_1-c_1r_3}{r_1-r_3} \qquad (77)$$

Косинусы угловъ прямой, проходящей черезъ двѣ точки $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, пропорціональны разностямъ:

$$x_2-x_1 \quad , \quad y_2-y_1 \quad , \quad z_2-z_1$$

Слѣдовательно изъ выраженій (77) слѣдуетъ, что косинусы угловъ, которые внѣшняя ось подобія составляетъ съ координатными осями, пропорціональны выраженіямъ:

$$\begin{aligned} &r_1(a_2-a_3)+r_2(a_3-a_1)+r_3(a_1-a_2)\\ &r_1(b_2-b_3)+r_2(b_3-b_1)+r_3(b_1-b_2)\\ &r_1(c_2-c_3)+r_2(c_3-c_1)+r_3(c_1-c_2)\end{aligned} \qquad (78)$$

Въ уравненіи:

$$r_1(S_2-S_2)+r_2(S_3-S_1)+r_3(S_1-S_2)=0$$

коэфиціенты при x, y, z, очевидно, пропорціональны выраженіямъ (78), слѣ-

довательно это уравненіе представляетъ плоскость, которая проходитъ черезъ радикальную ось и перпендикулярна къ внѣшней оси подобія.

§ 651. *Задача.* Найти взаимную поляру внѣшней оси подобія трехъ шаровъ?

Рѣшеніе. Пусть данные шары будутъ:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0$$

Выше видѣли, что уравненіе полярной плоскости точки:

$$\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0$$

относительно шара $S_1 = 0$, есть:

$$S_1 - S_2 + \left\{ O_1 O_2^{\ 2} - (r_1 - r_2)^2 \right\} = 0 \tag{79}$$

Уравненіе полярной плоскости точки:

$$\frac{A_3}{r_3} - \frac{A_1}{r_1} = 0$$

относительно того-же шара, есть:

$$S_1 - S_3 + \left\{ \overline{O_1 O_2}^{\ 2} - (r_1 - r_3)^2 \right\} = 0 \tag{80}$$

Уравненія (79) и (80) взятыя вмѣстѣ представляютъ взаимную поляру внѣшней оси подобія относительно шара $S_1 = 0$, такъ какъ полярныя плоскости двухъ точекъ пересѣкаются по взаимной полярѣ прямой, проходящей черезъ двѣ точки. Такія-же уравненія можно получить относительно другихъ шаровъ.

Извѣстно, что взаимная поляра пересѣченія двухъ касательныхъ плоскостей къ шару, есть хорда соприкосновенія. Слѣдовательно, если къ уравненіямъ (79) и (80) присовокупимъ уравненіе шара $S_1 = 0$, то будемъ имѣть три уравненія, изъ коихъ можно опредѣлить точки касанія касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ шару $S_1 = 0$ черезъ внѣшнюю ось подобія.

Система четырехъ шаровъ.

652. Пусть уравненія четырахъ шаровъ будутъ:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \quad , \quad S_4 = 0 \tag{81}$$

Радикальныя оси этихъ шаровъ, взятыя по три, суть:

$$\begin{matrix} S_1 - S_2 = 0 & , & S_2 - S_3 = 0 & , & S_3 - S_1 = 0 \\ S_2 - S_3 = 0 & , & S_3 - S_4 = 0 & , & S_4 - S_2 = 0 \\ S_3 - S_4 = 0 & , & S_4 - S_1 = 0 & , & S_1 - S_3 = 0 \\ S_4 - S_1 = 0 & , & S_1 - S_2 = 0 & , & S_2 - S_4 = 0 \end{matrix} \qquad (82)$$

Легко видѣть, что эти прямыя пересѣкаются въ одной точкѣ, которая соотвѣтствуетъ равенству:

$$S_1 = S_2 = S_2 = S_4$$

Эта точка называется *радикальнымъ центромъ* четырехъ данныхъ шаровъ. Точка эта имѣетъ то свойство, что всѣ касательныя проведенныя изъ нея ко всѣмъ четыремъ шарамъ, равны; она есть центръ шара, который проходитъ черезъ всѣ точки касанія, касательныхъ къ четыремъ шарамъ, и коего радіусъ есть общая длина этихъ касательныхъ.

Положимъ, что четвертый шаръ $S_4 = 0$ измѣняется и пусть D будетъ радикальная ось трехъ остальныхъ шаровъ. Какое-бы нибыло положеніе центра, шаръ $S_4 = 0$ пересѣчетъ другіе шары по кругамъ, коихъ плоскости пересѣкутся на прямой D.

§ 653. *Центры подобія.* Если возьмемъ шары по-парно, то найдемъ по три центра подобія на каждомъ ребрѣ тетраэдра, коего вершины суть центры данныхъ четырехъ шаровъ. Уравненія этихъ двѣнадцати центровъ подобія суть:

$$\begin{matrix} (\alpha) & \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0 & , & \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_3}{r_3} = 0 & , & \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_4}{r_4} = 0 \\ (\beta) & \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_3}{r_3} = 0 & , & \frac{A_2}{r_2} - \frac{A_4}{r_4} = 0 & , & \frac{A_3}{r_3} - \frac{A_4}{r_4} = 0 \\ (\gamma) & \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} = 0 & , & \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_3}{r_3} = 0 & , & \frac{A_3}{r_3} + \frac{A_4}{r_4} = 0 \\ (\delta) & \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_3}{r_3} = 0 & , & \frac{A_2}{r_2} + \frac{A_4}{r_4} = 0 & , & \frac{A_3}{r_3} + \frac{A_4}{r_4} = 0 \end{matrix} \qquad (83)$$

гдѣ:

$$A_1 = 0 \quad , \quad A_2 = 0 \quad , \quad A_3 = 0 \quad , \quad A_4 = 0$$

суть уравненія центровъ шаровъ.

Легко видѣть, что уравненія (β) суть слѣдствія уравненій (α), откуда слѣдуетъ, что шесть первыхъ центровъ подобія (α) и (β) находятся въ одной плоскости. Точно также легко показать, что вычитая почленно три уравненія системъ (γ) и (δ) найдемъ три уравненія, принадлежащія системамъ (α) и (β). Откуда слѣдуетъ, что три центра подобія втораго рода находятся съ тремя центрами подобія перваго рода въ одной плоскости. Для каждой системы изъ трехъ шаровъ существуютъ четыре оси подобія, такъ что двѣнадцать центровъ подобія находятся по три на шестнадцати *осяхъ подобія* и комбинированные по шесть, находятся въ одной плоскости, которая называется *плоскостью подобія*; такихъ плоскостей есть восемь; онѣ пересѣкаются по осямъ подобія.

§ 654. *Задача.* Найти полюсъ плоскости подобія относительно одного изъ четырехъ данныхъ шаровъ?

Рѣшеніе. Опредѣлимъ, напримѣръ, полюсъ плоскости подобія, въ которой находятся точки (α) и (β) (83). Означимъ эту плоскость черезъ P и назовемъ ее *внѣшнею* плоскостью подобія въ отличіе отъ другихъ. Мы выше видѣли, что полярная плоскость точки:

$$\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} = 0$$

относительно шара $S_1 = 0$, есть:

$$S_1 - S_2 + \overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2 = 0 \tag{84}$$

и полярныя плоскости относительно точекъ:

$$\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_3}{r_3} = 0 \quad , \quad \frac{A_1}{r_1} - \frac{A_4}{r_4} = 0$$

относительно того-же шара, суть:

$$\left.\begin{aligned} S_1 - S_3 + \overline{O_1 O_3}^2 - (r_1 - r_3)^2 = 0 \\ S_1 - S_4 + \overline{O_1 O_4}^2 - (r_1 - r_4)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

Полюсъ плоскости P есть пересѣченіе этихъ трехъ плоскостей, слѣдовательно, опредѣляя изъ этихъ трехъ уравненій x, y, z, найдемъ координаты искомаго полюса.

Точно также найдемъ уравненія, опредѣляющія полюсъ той-же плоскости относительно другихъ шаровъ, а также и полюсы другихъ плоскостей подобія относительно данныхъ шаровъ.

§ 655. *Задача.* Найти шаръ касательный къ четыремъ даннымъ шарамъ?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ шаровъ будутъ:

$$S_1 = 0 \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0 \quad , \quad S_4 = 0$$

а координаты ихъ центровъ и радіусы пусть будутъ:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & r_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 & r_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & r_4 \end{matrix}$$

Если означимъ центры этихъ шаровъ черезъ O_1, O_2, O_3, O_4, а центръ и радіусъ искомаго шара черезъ O и r, который касается внутренне данныхъ шаровъ, то, очевидно, будемъ имѣть слѣдующія уравненія:

$$\overline{OO_1}^2 = (r+r_1)^2 \ , \ \overline{OO_2}^2 = (r+r_2)^2 \ , \ \overline{OO_3}^2 = (r+r_3)^2 \ , \ \overline{OO_4}^2 = (r+r_4)^2$$

Но извѣстно, что разстояніе OO_1 дается выраженіемъ:

$$OO_1^2 = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2$$

гдѣ x, y, z суть координаты центра искомаго шара, слѣдовательно предъидущія уравненія могутъ быть выражены въ формѣ:

$$\begin{aligned} S_1 + r^2_1 = (r+r_1)^2 \quad &, \quad S_2 + r^2_2 = (r+r_2)^2 \\ S_2 + r^2_3 = (r+r_3)^2 \quad &, \quad S_4 + r^2_4 = (r+r_4)^2 \end{aligned} \qquad (86)$$

Эти четыре уравненія содержатъ рѣшеніе предложенной задачи, онѣ даютъ возможность опредѣлить радіусъ искомаго шара и координаты его центра. Въ уравненіяхъ (86) мы предположили, что шаръ касается внутренне данныхъ шаровъ; въ случаѣ внѣшняго касанія надобно перемѣнить знаки при радіусахъ r_1, r_2, r_3, r_4. Наконецъ, какой-бы ни былъ шаръ касательный къ даннымъ, надобно написать уравненіе (86), давая знакъ —тѣмъ шарамъ, коихъ искомый шаръ касается внѣшне. Сосчитывая всѣ комбинаціи знаковъ легко видѣть, что задача имѣетъ шестнадцать рѣшеній, изъ коихъ нѣкоторыя могутъ быть мнимыя—это зависитъ отъ положенія данныхъ шаровъ.

§ 656. Если вычтемъ почленно уравненія (86), то найдемъ:

$$(a)\quad S_1-S_2=2r(r_1-r_2)\quad,\quad S_1-S_3=2r(r_1-r_3)\quad,\quad S_1-S_4=2r(r_1-r_4)$$

$$(b)\quad S_2-S_3=2r(r_2-r_3)\quad,\quad S_2-S_4=2r(r_2-r_4)\quad,\quad S_3\quad S_4=2r(r_3-r_4)$$

изъ этихъ уравненій только три различны, такъ какъ три послѣднія суть слѣдствія первыхъ. Исключая r изъ уравненій (a), найдемъ:

$$(r_1-r_4)(S_1-S_2)-(r_1-r_2)(S_1-S_4)=0$$

$$(r_1-r_4)(S_1-S_3)-(r_1-r_3)(S_1-S_4)=0$$

или:

$$r_1(S_4-S_2)+r_2(S_1-S_4)+r_4(S_2-S_1)=0 \qquad (87)$$

$$r_1(S_4-S_3)+r_3(S_1-S_4)+r_4(S_3-S_1)=0 \qquad (88)$$

Эти уравненія неизмѣняются, если измѣнимъ знаки радіусовъ r_1, r_2, r_3, r_4 и такъ какъ онѣ вытекаютъ изъ уравненій (a), то онѣ будутъ удовлетворяться координатами центра шара, который касается внутренне или внѣшне данныхъ шаровъ. Разности S_4-S_2 и т. д. первой степени относительно x, y, z, слѣдовательно уравненія (87) и (88) представляютъ двѣ плоскости, проходящія черезъ радикальный центръ и пересѣкающіяся по прямой, на которой находятся центры двухъ касательныхъ шаровъ. Первое изъ предъидущихъ уравненій (87) представляетъ плоскость перпендикулярную къ внѣшней оси подобія (§ 650) шаровъ O_1, O_2, O_4, а второе (88) представляетъ плоскость перпендикулярную къ внѣшней оси подобія шаровъ O_1, O_3, O_4, слѣдовательно плоскость D, которая содержитъ шесть точекъ:

$$\frac{A_4}{r_4}-\frac{A_2}{r_2}=0\quad,\quad\frac{A_2}{r_2}-\frac{A_1}{r_1}=0\quad,\quad\frac{A_1}{r_1}-\frac{A_4}{r_4}=0$$

$$\frac{A_4}{r_4}-\frac{A_3}{r_3}=0\quad,\quad\frac{A_4}{r_4}-\frac{A_1}{r_1}=0\quad,\quad\frac{A_1}{r_1}-\frac{A_3}{r_3}=0$$

перпендикулярна къ плоскостямъ (87) и (88) и къ ихъ общему сѣченію. Изъ этого заключаемъ, *что центры двухъ касательныхъ шаровъ внѣшне и внутренне къ даннымъ, находятся на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ радикальнаго центра на внѣшнюю плоскость подобія.*

Точно также найдемъ, если не всѣ радіусы r_1, r_2, r_3, r_4 имѣютъ общій знакъ, *что центры шестнадцати шаровъ касательныхъ къ четыремъ даннымъ, находятся на перпендикулярахъ, опущенныхъ изъ радикальнаго центра на восемь плоскостей подобія.*

§ 657. Пусть S будетъ касательный шаръ, касающійся внутренне, пусть x_1, y_1, z_1 суть координаты точки касанія шаровъ $S=0$ и $S_1=0$. Эта точка дѣлитъ разстояніе OO_1 въ отношеніи $\frac{r_1}{r}$, слѣдовательно:

$$x_1 = \frac{r_1 x + r a_1}{r + r_1} \quad , \quad y_1 = \frac{r_1 y + r b_1}{r + r_1} \quad , \quad z = \frac{r_1 z + r c_1}{r + r_1}$$

откуда:

$$x = \frac{(r + r_1) x_1 - r a_1}{r_1} \quad , \quad y = \frac{(r + r_1) y_1 - r b_1}{r_1} \quad , \quad z = \frac{(r + r_1) z_1 - r c_1}{r_1}$$

такъ какъ x, y, z суть координаты центра O, то онѣ должны удовлетворять уравненіямъ (a). Прежде подстановленія замѣтимъ, что замѣщая въ полиномѣ первой степени формы $ax + by + cz + d$ величины x, y, z ихъ предъидущими выраженіями, найдемъ:

$$\frac{r + r_1}{r_1}(a x_1 + b y_1 + c z_1 + d) - \frac{r}{r_1}(a a_1 + b b_1 + c c_1 + d)$$

т. е. результатъ равенъ данному полиному, въ которомъ x, y, z замѣщены черезъ x_1, y_1, z_1, умноженному на $\frac{r + r_1}{r_1}$ безъ того-же полинома, умноженнаго на $\frac{r}{r_1}$, и въ который вмѣсто x, y, z вставлены координаты a_1, b_1, c_1. Въ силу этого правила первое изъ уравненій (a) сдѣлается:

$$\frac{r + r_1}{r_1}(S_1' - S_2') - \frac{r}{r_1}\{2(a_2 - a_1)a_1 + 2(b_2 - b_1)b_1 +$$

$$+ 2(c_2 - c_1)c_1 + a^2_1 + b^2_1 - r^2_1 - a^2_2 - b^2_2 + r^2_2\} = 2r(r_1 - r_2)$$

или:

$$\frac{r + r_1}{r_1}(S_1' - S_2') + \frac{r}{r_1}(\overline{O_1 O_2}^2 + r^2_1 - r^2_2) = 2r(r_1 - r_2)$$

послѣ сокращеній это уравненіе приметъ форму:

$$S_1' - S_2' + \frac{r}{r + r_1}\{\overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2\} = 0$$

точно также найдемъ для остальныхъ двухъ уравненій (a):

$$S_1' - S_3' + \frac{r}{r + r_1}\{\overline{O_1 O_3}^2 - (r_1 - r_3)^2\} = 0$$

$$S_1' - S_4' + \frac{r}{r + r_1}\{\overline{O_1 O_4}^2 - (r_1 - r_4)^2\} = 0$$

Откуда, отбрасывая индексы, видимъ, что координаты точки касанія шаровъ S и S_1 удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} &\frac{S_1 - S_2}{\overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2} + \frac{r}{r + r_1} = 0 \\ &\frac{S_1 - S_3}{\overline{O_1 O_3}^2 - (r_1 - r_3)^2} + \frac{r}{r + r_1} = 0 \qquad (89) \\ &\frac{S_1 - S_4}{\overline{O_1 O_4}^2 - (r_1 - r_4)^2} + \frac{r}{r + r_1} = 0 \end{aligned}$$

откуда, вычитая, найдемъ:

$$\begin{aligned} &\frac{S_1 - S_2}{\overline{O_1 O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2} - \frac{S_1 - S_4}{\overline{O_1 O_4}^2 - (r_1 - r_4)^2} = 0 \\ &\frac{S_1 - S_3}{\overline{O_1 O_3}^2 - (r_1 - r_3)^2} - \frac{S_1 - S_4}{\overline{O_1 O_4}^2 - (r_1 - r_4)^2} = 0 \end{aligned} \qquad (90)$$

Эти уравненія представляютъ плоскости, въ которыхъ находится радикальный центръ и точки касанія шара S съ шаромъ $S_1 = 0$; совокупно эти уравненія представляютъ прямую, проходящую черезъ эти двѣ точки. Такъ какъ эти уравненія неизмѣняются, если измѣнимъ r_1, r_2, r_3, r_4 на $-r_1, -r_2, -r_3, -r_4$, то прямая эта проходитъ и черезъ внѣшнюю точку касанія шара $S_1 = 0$ съ шаромъ S.

Если вычтемъ уравненіе (84) изъ уравненій (85), которыя опредѣляютъ полюсъ внѣшней плоскости подобія, то найдемъ уравненія (90). Слѣдовательно прямая, соединяющая радикальный центръ съ полюсомъ плоскости D относительно шара $S_1 = 0$, содержитъ точки касанія двухъ шаровъ касательныхъ внутренне и внѣшне къ даннымъ шарамъ. Такое же заключеніе выведемъ и относительно шаровъ $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 = 0$.

Слѣдовательно прямыя, соединяющія радикальный центръ, съ полюсами внѣшней плоскости подобія, опредѣляютъ пересѣченіемъ своимъ съ данными шарами точки касанія двухъ касательныхъ шаровъ, одного внѣшне, а другаго внутренне, съ данными шарами.

Обобщая этотъ результатъ, найдемъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Если выберемъ произвольно одну изъ плоскостей подобія системы четырехъ шаровъ, то прямыя, соединяющія радикальный центръ съ полюсами этой плоскости относительно каждаго изъ четырехъ шаровъ, встрѣчаютъ шары въ восьми точкахъ, которыя суть точки касанія двухъ шаровъ касательныхъ къ даннымъ.

§ 658. Замѣтимъ здѣсь, что рѣшеніе задачи „о нахожденіи шара, касающагося четырехъ данныхъ шаровъ“ было дано Ферма, которому этотъ вопросъ былъ предложенъ, для рѣшенія, Декартомъ. Послѣдній хотя утверждалъ, что имъ найдено рѣшеніе этой задачи, при помощи обыкновенной геометріи, но указаній по этому предмету въ его сочиненіяхъ нѣтъ никакихъ. Вопросъ объ отыскаціи шара, касающагося четырехъ данныхъ есть ничто иное, какъ дальнѣйшее обобщеніе задачи объ отыскаціи круга, касающагося трехъ данныхъ; послѣдняя задача, какъ извѣстно, была одной изъ важнѣйшихъ утеряннаго сочиненія Аполлонія „О соприкосновеніяхъ“, которое было возстановлено Віетомъ. Задачу эту Віетъ предлагалъ для рѣшенія голландскому геометру Адріану Романусу, который нашелъ центръ искомаго круга, какъ точку пересѣченія двухъ гиперболъ Но Віетъ ему показалъ, что задача можетъ быть рѣшена безъ посредства коническихъ сѣченій и что искомую точку можно найти проще, какъ пересѣченіе двухъ прямыхъ линій. Другія рѣшенія этой задачи были даны Ньютономъ. Вопросъ этотъ занималъ также Декарта, который далъ два рѣшенія; первое изъ нихъ по его же словамъ „было на столько сложно, что потребовалось бы не менѣе мѣсяца для его построенія“. Другое представляло не меньшія затрудненія.

ГЛАВА XXXIX.

Фокусы поверхностей.

§ 659. Если:

$$S_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 - r_1^2 = 0 \tag{1}$$

есть уравненіе шара, коего центръ есть (a_1, b_1, c_1), радіусъ r_1, а:

$$\begin{aligned} A_1 &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1 = 0 \\ A_2 &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

суть уравненія двухъ плоскостей въ нормальной формѣ, то:

$$S_1 - \lambda A_1 A_2 = 0 \tag{3}$$

есть уравненіе поверхности втораго порядка, проходящей черезъ пересѣченіе шара (1) съ плоскостью (2). Пересѣченія эти суть круги, а слѣдовательно всѣ пересѣченія поверхности (3) плоскостями параллельными плоскостямъ (2) будутъ также круги.

Легко показать, что поверхность (3) съ шаромъ (1) имѣютъ двойное соприкосновеніе на прямой пересѣченія плоскостей (2), т. е. въ точкахъ гдѣ прямая $(A_1 A_2)$ встрѣчаетъ шаръ (1) и поверхность (3). Въ самомъ дѣлѣ, пусть $(x_1 y_1 z_1)$ будетъ точка общая обѣимъ поверхностямъ (1) и (3),

а $P=0$ уравненіе касательной плоскости въ этой точкѣ къ шару (1), очевидно:

$$P=(x_1-a_1)(x-a_1)+(y_1-b_1)(y-b_1)+(z_1-c_1)(z-c_1)-r^2_1=0 \quad (4)$$

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности (3) въ той-же точкѣ есть:

$$P-\lambda(A'_1A_2+A_1A'_2)=0 \quad (5)$$

гдѣ A'_1 и A'_2 суть числовыя значенія A_1 и A_2, когда въ нихъ подставимъ координаты x_1, y_1, z_1. Если точка $(x_1y_1z_1)$ находится на пересѣченіи плоскостей (2), то $A'_1=0$, $A'_2=0$, слѣдовательно уравненіе (5) касательной плоскости къ поверхности (3) сдѣлается $P=0$, т. е. поверхности (1) и (3) имѣютъ общую касательную плоскость въ точкѣ встрѣчи поверхности съ прямою (A_1A_2).

Обратно, если поверхность втораго порядка имѣетъ двойное соприкосновеніе съ шаромъ въ двухъ точкахъ q_1 и q_2, то пересѣченіе этихъ поверхностей суть два круга. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $P=0$ и $Q=0$ будутъ общія касательныя къ обѣимъ поверхностямъ въ точкахъ q_1 и q_2, пусть q_3 будетъ третья точка на пересѣченіе поверхностей. Если черезъ точки q_1, q_2, q_3 проведемъ плоскость, то сѣченія ея съ поверхностями будутъ два коническія сѣченія, имѣющія двойное соприкосновеніе въ точкахъ q_1 и q_2, а такъ какъ онѣ проходятъ и черезъ точку q_3, то оба вполнѣ опредѣляются одними и тѣми-же пятью условіями, а слѣдовательно онѣ тождественны, т. е. совпадаютъ.

Но пересѣченіе поверхностей втораго порядка четвертой степени, слѣдовательно другія точки не находящіяся на первомъ кругѣ должны находиться на другомъ.

Если черезъ $A_1=0$ и $A_2=0$ означимъ плоскости круговъ пересѣченія шара и поверхности втораго порядка, то ея уравненіе будетъ имѣть форму:

$$S_1-\lambda A_1A_2=0$$

Если шаръ (1) обращается въ точку, т. е. если $r_1=0$, то его уравненіе будетъ:

$$S_1=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=0 \quad (6)$$

Эту точку должно разсматривать, какъ имѣющую двойное соприкосновеніе съ поверхностью:

$$S_1-\lambda A_1A_2=0$$

Точка, имѣющая такое свойство называется *фокусомъ* поверхности, а прямая соприкосновенія называется *соотвѣтствующей директрисой*.

Мы сейчасъ увидимъ, что поверхность втораго порядка имѣетъ безчисленное множество фокусовъ, которые образуютъ три коническія сѣченія на трехъ главныхъ сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостяхъ. Эти коническія сѣченія называются *фокальными линіями* поверхности.

Фокусы и фокальныя линіи въ центральныхъ поверхностяхъ.

§ 660. Пусть уравненіе центральной поверхности отнесенной къ ея осямъ будетъ:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}+\frac{z^2}{r}=1 \tag{7}$$

Если она имѣетъ фокусъ $(a_1b_1c_1)$, то ея уравненію можно дать форму:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=A_1A_2 \tag{8}$$

Но плоскости $A_1=0$ и $A_2=0$ суть плоскости круговыхъ сѣченій, слѣдовательно онѣ параллельны одной изъ осей поверхности; а потому произведеніе A_1A_2 можно замѣстить однимъ изъ выраженій:

$$\lambda(x-k)^2+\mu(y-h)^2 \;,\; \lambda(x-k)^2+\nu(z-g)^2 \;,\; \mu(y-h)^2+\nu(z-g)^2 \tag{9}$$

которыя, будучи приравнены нулю, представляютъ плоскости, пересѣкающіяся по прямымъ параллельнымъ одной изъ осей. Эти плоскости будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря по знакамъ постоянныхъ количествъ λ, μ, ν.

Возьмемъ уравненіе:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=\lambda(x-k)^2+\mu(y-h)^2 \tag{10}$$

и выразимъ, что оно представляетъ туже поверхность, что и уравненіе (7). Уравненія ея центра будутъ:

$$x-a_1-\lambda(x-k)=0 \;,\; y-b_1-\mu(y-h)=0 \;,\; z-c_1=0 \tag{11}$$

такъ какъ центръ долженъ быть въ началѣ, то мы должны имѣть:

$$a_1=\lambda k \;,\; b_1=\mu h \;,\; c_1=0 \tag{12}$$

Въ силу этихъ значеній уравненіе (10) сдѣлается:

$$(1-\lambda)x^2+(1-\mu)y^2+z^2=\frac{1-\lambda}{\lambda}a^2_1+\frac{1-\mu}{\mu}b^2_1 \tag{13}$$

сравнивая которое съ (7) найдемъ:

$$p(1-\lambda)=q(1-\mu)=r=\frac{1-\lambda}{\lambda}a^2_1+\frac{1-\mu}{\mu}b^2_1 \tag{14}$$

откуда:

$$\lambda=\frac{p-r}{p}\quad,\quad \mu=\frac{q-r}{q}\quad,\quad 1-\lambda=\frac{r}{p}\quad,\quad 1-\mu=\frac{r}{q} \tag{15}$$

подставляя эти значенія въ уравненіе:

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}a^2_1+\frac{1-\mu}{\mu}b^2_1=r$$

найдемъ:

$$\frac{a^2_1}{p-r}+\frac{b^2_1}{q-r}=1 \tag{16}$$

т. е. координаты фокуса удовлетворяютъ уравненіе (16). Слѣдовательно въ плоскости XY существуетъ безчисленное множество фокусовъ поверхности, которыя образуютъ коническое сѣченіе:

$$\frac{x^2}{p-r}+\frac{y^2}{q-r}=1 \tag{17}$$

Если сдѣлаемъ тѣже преобразованія относительно уравненій:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=\lambda(x-k)^2+\nu(z-g)^2$$

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=\mu(y-h)^2+\nu(z-g)^2$$

то будемъ имѣть слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Геометрическое мѣсто фокусовъ центральныхъ поверхностей состоитъ изъ трехъ коническихъ сѣченій въ главныхъ плоскостяхъ, которыхъ уравненія суть:

$$z=0\quad,\quad \frac{x^2}{p-r}+\frac{y^2}{q-r}=1$$

$$y=0\quad,\quad \frac{x^2}{p-q}+\frac{z^2}{r-q}=1 \tag{18}$$

$$x=0\quad,\quad \frac{y^2}{q-p}+\frac{z^2}{r-p}=1$$

Между дѣйствительными фокусами различаютъ фокусы, коихъ директриса есть пересѣченіе двухъ дѣйствительныхъ плоскостей, и фокусы, коихъ ди-

ректриса есть пересѣченіе двухъ мнимыхъ плоскостей; первые называются *фокусами перваго рода*, а вторые *фокусами втораго рода*.

Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ директриса есть пересѣченіе дѣйствительныхъ или мнимыхъ плоскостей:

$$\lambda(x-k)^2+\mu(y-h)^2=0\ ,\ \lambda(x-k)^2+\nu(z-g)^2=0\ ,\ \mu(y-h)^2+\nu(z-g)^2=0 \quad (19)$$

Координаты точки встрѣчи этихъ прямыхъ съ главными плоскостями, очевидно, будутъ:

$$\begin{array}{lll} g=0 \ , & k=\dfrac{pa_1}{p-r} \ , & h=\dfrac{qb_1}{q-r} \\ k=0 \ , & k=\dfrac{pa_1}{p-q} \ , & g=\dfrac{rc_1}{r-q} \\ h=0 \ , & h=\dfrac{qb_1}{q-p} \ , & g=\dfrac{rc_1}{r-p} \end{array} \quad (20)$$

откуда найдемъ:

$$\frac{k\sqrt{p-r}}{p}=\frac{a_1}{\sqrt{p-r}} \quad , \quad \frac{h\sqrt{q-r}}{q}=\frac{b_1}{\sqrt{q-r}}$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ:

$$k^2\frac{p-r}{p^2}+h^2\frac{q-r}{q^2}=1$$

Изъ этого заключаемъ, что директрисы образуютъ цилиндрическую поверхность, коей пересѣченіе съ плоскостью XY есть коническое сѣченіе:

$$\frac{x^2}{\dfrac{p^2}{p-r}}+\frac{y^2}{\dfrac{q^2}{q-r}}=1$$

Этотъ цилиндръ называется *направляющимъ*. Такой цилиндръ существуетъ для каждой фокальной линіи.

§ 661. Легко показать, что фокальныя линіи проходятъ черезъ круглячки поверхности. Координаты кругляковъ суть:

$$y=0 \quad , \quad x=\pm\sqrt{\frac{p(p-q)}{p-r}} \quad , \quad z=\pm\sqrt{\frac{r(q-r)}{p-r}}$$

когда $p>q>r$. Легко провѣрить, что эти выраженія удовлетворяютъ уравненію фокальной линіи:

$$\frac{x^2}{p-q}+\frac{z^2}{r-q}=1$$

§ 662. *Предложеніе.* Основаніе директрисы фокуса $(a_1b_1c_1)$ есть полюсъ касательной въ этой точкѣ къ фокальной линіи въ главной плоскости.

Доказательство. Поляра точки (k, h) главнаго сѣченія:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$$

поверхности, есть:

$$\frac{kx}{p}+\frac{hy}{q}=1$$

или, подставляя вмѣсто k и h ихъ значенія (20):

$$\frac{a_1x}{p-r}+\frac{b_1y}{q-r}=1$$

а это, очевидно, есть уравненіе касательной въ точкѣ (a_1b_1) къ фокальной линіи (17).

§ 663. *Предложеніе.* Прямая, соединяющая фокусъ съ основаніемъ соотвѣтствующей директрисы есть нормальная линія къ фокальной линіи.

Доказательство. Уравненіе прямой, проходящей черезъ точки (a_1b_1), (k, h), есть:

$$\frac{x-a_1}{k-a_1}=\frac{y-b_1}{h-b_1}$$

или, подставляя вмѣсто k и h ихъ выраженія (20), найдемъ:

$$\frac{x-a_1}{\frac{a_1}{p-r}}=\frac{y-b_1}{\frac{b_1}{q-r}}$$

Очевидно, это есть уравненіе нормальной линіи въ точкѣ (a_1b_1) къ фокальной линіи въ плоскости XY.

664. *Предложеніе.* Плоскость, проходящая черезъ фокусъ поверхности и соотвѣтствующую директрису, пересѣкаетъ поверхность по коническому сѣченію, коего фокусъ и директриса суть фокусъ и директриса поверхности.

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, если за плоскость XY возьмемъ плоскость, проходящую черезъ фокусъ (a_1b_1) и его директрису, то уравненіе поверхности будетъ имѣть форму:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+z^2=A_1A_2$$

гдѣ A_1 и A_2 при $z=0$ должны обратиться въ одно и то же выраженіе $ax+by+c$, такъ какъ эти плоскости встрѣчаютъ плоскость XY по одной

и той-же прямой. Слѣдовательно коническое сѣченіе въ плоскости XY будетъ:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(ax+by+c)^2$$

а это есть коническое сѣченіе, коего фокусъ есть (a_1b_1), а директриса $ax+by+c=0$.

§ 665. *Предложеніе.* Конусъ, описанный около центральной поверхности, и имѣющій вершину на фокальной линіи, есть конусъ вращенія.

Доказательство. Для доказательства, помѣстимъ начало координатъ въ фокусѣ $(a_1b_1c_1)$, а плоскость XY проведемъ черезъ директрису. Въ этомъ случаѣ уравненіе поверхности будетъ:

$$x^2+y^2+z^2=A_1A_2 \tag{21}$$

гдѣ:

$$A_1=x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1+z\cos\gamma_1-p_1=0\ \ ,\ \ A_2=x\cos\alpha_2+y\cos\beta_2+z\cos\gamma_2-p_2=0$$

Мы видѣли, что уравненіе конуса описаннаго около поверхности:

$$f(x_1x_2x_3x_4)=0$$

есть (§ 539):

$$4f(y_1).f(x_1)-\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial x_3}+y_4\frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^2=0$$

Если это уравненіе приложимъ къ поверхности (21), полагая $y_1=y_2=y_3=0$, $y_4=1$, то найдемъ:

$$4p^2_1(x^2+y^2+z^2-A_1A_2)+p^2_1(A_1+A_2)^2=0$$

или:

$$4(x^2+y^2+z^2)+(A_1-A_2)^2=0$$

или наконецъ:

$$4(x^2+y^2)+4z^2+(\cos\gamma_1-\cos\gamma_2)^2z^2=0$$

а это уравненіе представляетъ, очевидно, конусъ вращенія, коего ось перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ фокусъ и соотвѣтствующую директрису.

§ 666. Пояснимъ сказанное примѣрами.

Пр. 1. Эллипсоидъ. Уравненіе этой поверхности есть:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Уравненія фокальныхъ линій будутъ:

$$z=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1 \quad , \quad \lambda=\frac{a^2-c^2}{a^2} \quad , \quad \mu=\frac{b^2-c^2}{b^2}$$

$$y=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2-b^2}=1 \quad , \quad \lambda=\frac{a^2-b^2}{a^2} \quad , \quad \nu=\frac{c^2-b^2}{c^2}$$

$$x=0 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}=1 \quad , \quad \mu=\frac{b^2-a^2}{b^2} \quad , \quad \nu=\frac{c^2-a^2}{c^2}$$

Если $a>b>c$, то первая изъ фокальныхъ линій есть эллипсъ въ плоскости XY, фокусы будутъ втораго рода, такъ какъ λ и μ имѣютъ одинаковые знаки. Вторая фокальная линія есть гипербола въ плоскости XZ, а фокусы перваго рода. Наконецъ, третяя фокальная линія есть мнимый эллипсъ.

Пр. 2. Гиперболоидъ однополый. Его уравненіе есть:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Уравненія фокальныхъ линій суть:

$$z=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=1 \quad , \quad \lambda=\frac{a^2+c^2}{a^2} \quad , \quad \mu=\frac{b^2+c^2}{b^2}$$

$$y=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=1 \quad , \quad \lambda=\frac{a^2-b^2}{a^2} \quad , \quad \nu=\frac{b^2+c^2}{c^2}$$

$$x=0 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{c^2+a^2}=1 \quad , \quad \mu=\frac{b^2-a^2}{b^2} \quad , \quad \nu=\frac{a^2+c^2}{c^2}$$

Если $a>b>c$, то первая фокальная линія есть эллипсъ и фокусъ втораго рода; вторая фокальная линія есть гипербола и фокусы втораго рода. Третяя фокальная линія есть мнимый эллипсъ.

Пр. 3. Гиперболоидъ двуполый. Его уравненіе есть:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Фокальныя линіи суть:

$$z=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{c^2-b^2}=1 \quad , \quad \lambda=\frac{a^2+c^2}{a^2} \quad , \quad \mu=-\frac{c^2-b^2}{b^2}$$

$$y=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{b^2-c^2}=1 \quad , \quad \lambda=\frac{a^2+b^2}{a^2} \quad , \quad \nu=-\frac{b^2-c^2}{c^2}$$

$$x=0 \quad , \quad \frac{y^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{a^2+c^2}=-1 \quad , \quad \mu=\frac{a^2+b^2}{c^2} \quad , \quad \nu=\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

Если $a > b > c$, то первая фокальная линія есть гипербола, а фокусы втораго рода. Вторая фокальная линія есть эллипсъ, а фокусы перваго рода. Наконецъ, третья фокальная линія есть мнимый эллипсъ.

Замѣтимъ, что въ трехъ центральныхъ поверхностяхъ, въ каждой, есть мнимая фокальная линія, гиперболоидъ имѣетъ фокусы только втораго рода, а въ двухъ другихъ поверхностяхъ фокусы перваго рода принадлежатъ главной плоскости перпендикулярной къ циклическимъ сѣченіямъ.

Пр. 4. Фокальныя линіи конуса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

суть:

$$z=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=0 \quad , \quad \lambda=\frac{a^2+c^2}{a^2} \quad , \quad \mu=\frac{b^2+c^2}{b^2}$$

$$y=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=0 \quad , \quad \lambda=\frac{a^2-b^2}{a^2} \quad , \quad \nu=\frac{b^2+c^2}{c^2}$$

$$x=0 \quad , \quad \frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{a^2+c^2}=0 \quad , \quad \mu=\frac{b^2-a^2}{b^2} \quad , \quad \nu=\frac{a^2+c^2}{c^2}$$

Если $a > b$, то конусъ имѣетъ одну дѣйствительную фокальную линію, которая состоитъ изъ двухъ прямыхъ въ плоскости XY, а соотвѣтствующіе фокусы втораго рода.

Можно показать, что фокальныя линіи перпендикулярны къ циклическимъ плоскостямъ взаимнаго конуса. *Взаимнымъ конусомъ* называютъ конусъ, образованный, проходящими черезъ вершину прямыми, перпендикулярно къ касательнымъ плоскостямъ конуса.

Уравненія перпендикуляра къ касательной плоскости конуса въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ суть:

$$\frac{x}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y}{\frac{y_1}{b^2}}=-\frac{z}{\frac{z_1}{c^2}}=\rho$$

слѣдовательно:

$$ax=\frac{x_1}{a}\rho \quad , \quad by=\frac{y_1}{b}\rho \quad , \quad cz=-\frac{z_1}{c}\rho$$

откуда:

$$a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2=0$$

есть уравненіе взаимнаго конуса. Уравненія циклическихъ плоскостей этой поверхности суть:

$$x^2(a^2-b^2)-z^2(b^2+c^2)=0 \tag{22}$$

Если сравнимъ это уравненіе съ дѣйствительными фокальными линіями:

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=0 \tag{23}$$

то легко видѣть, что эти линіи перпендикулярны къ плоскостямъ (22).

Образованіе центральныхъ поверхностей.

§ 667. Если въ уравненіи:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=A_1A_2$$

плоскости $A_1=0$ и $A_2=0$ дѣйствительны, то можно его написать въ формѣ:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=\lambda(x-k)^2-\mu(y-h)^2$$

Первая часть представляетъ квадратъ разстоянія точки $(x\,y\,z)$ отъ фокуса $(a_1b_1c_1)$; вторая часть, раздѣленная на $\lambda+\mu$, представляетъ произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки $(x\,y\,z)$ на плоскости $A_1=0$, $A_2=0$. Если означимъ черезъ P_1 и P_2 эти перпендикуляры, то называя черезъ R разстояніе точекъ $(x\,y\,z)$ и $(a_1b_1c_1)$, будемъ имѣть:

$$R^2=(\lambda+\mu)P_1P_2$$

или:

$$\frac{R^2}{P_1 \cdot P_2}=\lambda+\mu=\text{постоян.}$$

Откуда имѣетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Центральную поверхность втораго порядка можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, коихъ квадратъ разстоянія отъ данной точки находится въ постоянномъ отношеніи съ произведеніемъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нихъ на двѣ данныя плоскости.

Если $A_1=0$ и $A_2=0$ суть мнимыя плоскости, то уравненіе поверхности можно написать въ формѣ:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=\lambda(x-k)^2+(y-h)^2 \tag{24}$$

Пусть $(x_1 y_1 z_1)$ будетъ одна изъ точекъ этой поверхности. Проведемъ плоскость черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$ параллельно оси Y, то ея уравненіе будетъ:

$$z - z_1 = m(x - x_1) \tag{25}$$

эта плоскость встрѣчаетъ директрису соотвѣтствующую фокусу въ точкѣ, коей координаты суть:

$$x = k \quad ; \quad y = h \quad , \quad z - z_1 = m(k - x_1) \tag{26}$$

Откуда видимъ, что квадратъ разстоянія точки $(x_1 y_1 z_1)$ отъ точки (26) будетъ:

$$(x_1 - k)^2 + (y_1 - h)^2 + m^2(x_1 - k)^2 = (1 + m^2)(x_1 - k) + (y_1 - h)^2$$

Если это разстояніе означимъ черезъ δ и положимъ $1 + m^2 = \frac{\lambda}{\mu}$, то будемъ имѣть:

$$\delta^2 = \frac{\lambda(x_1 - k)^2 + \mu(y_1 - h)^2}{\mu}$$

Слѣдовательно уравненіе поверхности можно написать въ формѣ:

$$R^2 = \mu\delta^2 \quad \text{или} \quad \frac{R}{\delta} = \sqrt{\mu} = \text{постоян.}$$

Легко провѣрить, что:

$$m = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1}$$

есть величина дѣйствительная для эллипсоида и двуполаго гиперболоида и представляетъ тангенсъ угла наклоненія циклическихъ плоскостей къ плоскости XY. Такъ, напримѣръ, въ эллипсоидѣ:

$$\lambda = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \quad , \quad \mu = \frac{b^2 - c^2}{b^2}$$

слѣдовательно:

$$m = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$$

Откуда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Предложеніе. Центральную поверхность можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разстояніе отъ фокуса находится въ постоянномъ отношеніи съ разстояніемъ отъ директрисы, — это послѣднее разстояніе считается параллельно циклической плоскости.

Софокусныя центральныя поверхности.

§ 668. Возьмемъ центральную поверхность:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{27}$$

Если λ есть произвольный параметръ, то уравненіе:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{28}$$

представляетъ поверхность также центральную, направленіе осей въ которой тоже какъ и въ (27); кромѣ этого эта поверхность имѣетъ общія фокальныя линіи съ поверхностью (27), въ чемъ легко убѣдиться, составляя уравненія этихъ линій для поверхности (28). Поверхности, имѣющія это свойство называются *софокусными*.

Если λ есть величина положительная, то уравненіе (28) представляетъ эллипсоидъ дѣйствительный. Положимъ $a>b>c$ и $\lambda=-\mu^2$, то уравненіе (28) сдѣлается:

$$\frac{x^2}{a^2-\mu^2}+\frac{y^2}{b^2-\mu^2}+\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1 \tag{29}$$

Это уравненіе будетъ представлять: эллипсоидъ, если $\mu^2<c^2$; гиперболоидъ однополый, если $b^2>\mu^2>c^2$; гиперболоидъ двуполый, если $a^2>\mu^2>b^2$; и оно представляетъ мнимый эллипсоидъ, если $\mu^2>a^2$.

Положимъ, что μ^2 приближается къ c^2, при $\mu^2=c^2$ одна изъ осей поверхности (29) равна нулю и поверхность обращается въ фокальную линію:

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1 \tag{30}$$

Точно также, если $\mu^2=b^2$, то поверхность (29) обращается въ фокальную линію:

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2-b^2}=1$$

Слѣдовательно фокальныя линіи можно разсматривать, какъ поверхности софокусныя, безконечно сплюснутыя.

§ 669. *Предложеніе.* Черезъ каждую точку въ пространствѣ проходятъ три софокусныя поверхности: эллипсоидъ, гиперболоидъ однополый и гиперболоидъ двуполый.

Доказательство. Если положимъ, что поверхность:

$$\frac{x^2}{a^2-\mu^2}+\frac{y^2}{b^2-\mu^2}+\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1 \qquad (31)$$

проходитъ черезъ точку $(x_1y_1z_1)$, то будемъ имѣть:

$$\frac{x^2_1}{a^2-\mu^2}+\frac{y^2_1}{b^2-\mu^2}+\frac{z^2_1}{c^2-\mu^2}=1$$

откуда:

$$(\mu^2-a^2)(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)+x^2_1(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)+$$
$$+y^2_1(\mu^2-a^2)(\mu^2-c^2)+z^2_1(\mu^2-a^2)(\mu^2-b^2)=0 \qquad (32)$$

Это уравненіе относительно μ^2 третей степени и его всѣ три корня *всегда* дѣйствительны, такъ какъ подстановленіе вмѣсто μ^2:

$$-\infty \quad , \quad c^2 \quad , \quad b^2 \quad , \quad a^2$$

даетъ въ результатѣ:

$$- \; + \; - \; +$$

Слѣдовательно корни заключаются между $-\infty$ и c^2, между c^2 и b^2 и между b^2 и a^2. Корню меньшему отъ c^2 соотвѣтствуетъ эллипсоидъ, корню заключающемуся между c^2 и b^2 соотвѣтствуетъ однополый гиперболоидъ, и наконецъ корню, заключающемуся между b^2 и a^2, соотвѣтствуетъ двуполый гиперболоидъ.

Пусть μ_1, μ_2, μ_3 будутъ корни, а ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 оси трехъ поверхностей, то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \xi^2_1&=a^2-\mu^2_1 \quad , \quad \eta^2_1=b^2-\mu^2_1 \quad , \quad \zeta^2_1=c^2-\mu^2_1 \\ \xi^2_2&=a^2-\mu^2_2 \quad , \quad \eta^2_2=b^2-\mu^2_2 \quad , \quad \zeta^2_2=c^2-\mu^2_2 \\ \xi^2_3&=a^2-\mu^2_3 \quad , \quad \eta^2_3=b^2-\mu^2_3 \quad , \quad \zeta^2_3=c^2-\mu^2_3 \end{aligned} \qquad (33)$$

§ 670. *Задача.* Выразить координаты точки $(x_1y_1z_1)$ въ функціи осей трехъ софокусныхъ поверхностей, которыя проходятъ черезъ эту точку?

Рѣшеніе. Положимъ $a^2-\mu^2=\xi^2$, то найдемъ:

$$b^2-\mu^2=\xi^2+b^2-a^2 \quad , \quad c^2-\mu^2=\xi^2+c^2-a^2$$

Означая черезъ m^2 и n^2 положительныя количества a^2-b^2 и a^2-c^2 будемъ имѣть:

$$a^2-\mu^2=\xi^2 \quad , \quad b^2-\mu^2=\xi^2-m^2 \quad , \quad c^2-\mu^2=\xi^2-n^2 \qquad (34)$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (32), найдемъ:

$$\xi^6 - (m^2 + n^2 + x^2_1 + y^2_1 + z^2_1)\,\xi^4 +$$

$$+ \left\{m^2n^2 + (m^2 + n^2)\,x^2_1 + n^2y^2_1 + m^2z^2_1\right\}\xi^2 - m^2n^2x^2_1 = 0 \qquad (35)$$

Это уравненіе, какъ и уравненіе (32) имѣетъ три дѣйствительные корня, которые суть оси $\xi^2_1, \xi^2_2, \xi^2_3$ трехъ поверхностей, проходящихъ черезъ точку $(x_1y_1z_1)$.

Такъ какъ ихъ произведеніе равно послѣднему члену уравненія (25) съ противнымъ знакомъ, то имѣемъ:

$$\xi^2_1\xi^2_2\xi^2_3 = m^2n^2x^2_1 \quad \text{или} \quad \xi^2_1\xi^2_2\xi^2_3 = (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)\,x^2_1 \qquad (36)$$

точно также найдемъ:

$$\eta^2_1\eta^2_2\eta^2_3 = (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)\,y^2_1 \quad , \quad \zeta^2_1\zeta^2_2\zeta^2_3 = (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)\,z^2_1 \qquad (37)$$

откуда найдемъ:

$$x^2_1 = \frac{\xi^2_1\xi^2_2\xi^2_3}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} = \frac{(a^2 - \mu^2_1)(a^2 - \mu^2_2)(a^2 - \mu^2_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

$$y^2_1 = \frac{\eta^2_1\eta^2_2\eta^2_3}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} = \frac{(b^2 - \mu^2_1)(b^2 - \mu^2_2)(b^2 - \mu^2_3)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \qquad (38)$$

$$z^2_1 = \frac{\zeta^2_1\zeta^2_2\zeta^2_3}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} = \frac{(c^2 - \mu^2_1)(c^2 - \mu^2_2)(c^2 - \mu^2_3)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

Изъ уравненія (35) имѣемъ:

$$x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 + m^2 + n^2 = \xi^2_1 + \xi^2_2 + \xi^2_3$$

откуда:

$$x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 = a^2_1 + a^2 - \mu^2_2 + a^2 - \mu^2_3 - a^2 + b^2 - a^2 + c^2$$

или:

$$x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 = \xi^2_1 + \eta^2_2 + \zeta^2_3 \qquad (39)$$

Слѣдовательно квадратъ радіуса вектора, проведеннаго въ точку $(x_1y_1z_1)$, равенъ суммѣ квадратовъ осей $\xi^2_1, \eta^2_2, \zeta^2_3$, принадлежащихъ тремъ софокуснымъ поверхностямъ, проходящимъ черезъ точку $(x_1y_1z_1)$.

Выраженія (38) называются *эллиптическими координатами* точки. Въ этой системѣ координатъ положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется тремя софокусными поверхностями.

§ 671. *Предложеніе.* Двѣ софокусныя поверхности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

Доказательство. Пусть:

$$\frac{x^2}{a^2-\mu^2_1}+\frac{y^2}{b^2-\mu^2_1}+\frac{z^2}{c^2-\mu^2_1}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu^2_2}+\frac{y^2}{b^2-\mu^2_2}+\frac{z^2}{c^2-\mu^2_2}=1 \qquad (40)$$

будутъ двѣ софокусныя поверхности. Какая-нибудь точка $(x_1y_1z_1)$ ихъ пересѣченія удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{x^2}{(a^2-\mu^2_1)(a^2-\mu^2_2)}+\frac{y^2}{(b^2-\mu^2_1)(b^2-\mu^2_2)}+\frac{z^2}{(c^2-\mu^2_1)(c^2-\mu^2_2)}=0 \quad (41)$$

полученному, вычитая предъидущія два уравненія.

Уравненія касательныхъ плоскостей въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ къ поверхностямъ (40) суть:

$$\frac{x_1x}{a^2-\mu^2_1}+\frac{y_1y}{b^2-\mu^2_1}+\frac{z_1z}{c^2-\mu^2_1}=1 \quad , \quad \frac{x_1x}{a^2-\mu^2_2}+\frac{y_1y}{b^2-\mu^2_2}+\frac{zz_1}{c^2-\mu^2_2}=1 \quad (42)$$

Но легко видѣть, что условіе перпендикулярности есть (41):

$$\frac{x^2_1}{(a^2-\mu^2_1)(a^2-\mu^2_2)}+\frac{y^2_1}{(b^2-\mu^2_1)(b^2-\mu^2_2)}+\frac{z^2_1}{(c^2-\mu^2_1)(c^2-\mu^2_2)}=0$$

Задача. Какая-нибудь изъ трехъ центральныхъ поверхностей пересѣкается плоскостями параллельными одной изъ координатныхъ плоскостей; найти геометрическое мѣсто фокусовъ, полученныхъ сѣченіями коническихъ сѣченій?

§ 672. *Предложеніе.* Геометрическое мѣсто полюсовъ, данной плоскости относительно системы софокусныхъ поверхностей, есть прямая линія перпендикулярная къ данной плоскости.

Доказательство. Уравненіе полярной плоскости точки $(x_1y_1z_1)$ относительмо поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2-\mu^2}+\frac{y}{b^2-\mu^2}+\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1$$

есть:

$$\frac{x_1x}{a^2-\mu^2}+\frac{y_1y}{b^2-\mu^2}+\frac{z_1z}{c^2-\mu^2}=1$$

Если данная плоскость дана уравненіемъ:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \tag{43}$$

то отождествляя ее съ предъидущимъ уравненіемъ, найдемъ:

$$\frac{\cos\alpha}{p} = \frac{x_1}{a^2 - \mu^2} \quad , \quad \frac{\cos\beta}{p} = \frac{y_1}{b^2 - \mu^2} \quad , \quad \frac{\cos\gamma}{p} = \frac{z_1}{c^2 - \mu^2}$$

откуда:

$$\frac{px_1}{\cos\alpha} = a^2 - \mu^2 \quad , \quad \frac{py_1}{\cos\beta} = b^2 - \mu^2 \quad , \quad \frac{pz_1}{\cos\gamma} = c^2 - \mu^2$$

откуда видимъ, что координаты полюса удовлетворяютъ уравненіе:

$$\frac{px}{\cos\alpha} - a^2 = \frac{py}{\cos\beta} - b^2 = \frac{pz}{\cos\gamma} - c^2$$

а это, очевидно, уравненіе прямой перпендикулярной къ плоскости (43).

Если данная плоскость (43) будетъ касательная къ софокусной поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

то геометрическое мѣсто полюсовъ относительно всей системы поверхностей будетъ нормаль въ точкѣ касанія.

Фокальныя линіи поверхностей неимѣющихъ центра.

§ 673. Возьмемъ сначала параболоидъ эллиптическій:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \tag{44}$$

Если эта поверхность имѣетъ фокусъ, то ея уравненію можно дать одну изъ слѣдующихъ формъ:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \lambda(x-k)^2 + \mu(y-h)^2 \tag{45}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \lambda(x-k)^2 + \nu(z-g)^2 \tag{46}$$

Изъ уравненія (45) имѣемъ:

$$(1-\lambda)x^2 + (1-\mu)y^2 + z^2 - 2(a-\lambda k)x - 2(b-\mu h)y -$$

$$- 2cz^2 + a^2 + b^2 + c^2 - \lambda k^2 - \mu h^2 = 0 \tag{47}$$

Сравнивая это уравненіе съ (44), найдемъ:

$$1-\lambda=0 \quad , \quad c=0 \quad , \quad a^2+b^2=\lambda k^2+\mu h^2$$

$$p(1-\mu)=q=a-\lambda k \quad , \quad b-\mu h=0$$

откуда:

$$\lambda=1 \quad , \quad a^2+b^2=(a-q)^2+\frac{b^2}{\mu} \quad , \quad \mu=\frac{p-q}{p}$$

слѣдовательно:

$$b^2=2(p-q)a-q(p-q)$$

Изъ этого слѣдуетъ, что эллиптическій параболоидъ имѣетъ первую фокальную линію въ плоскости XY, коей уравненіе есть:

$$y^2=(p-q)(2x-q) \tag{48}$$

Это парабола, коей ось совпадаетъ съ положительною осью X, если $p>q$. Соотвѣтствующіе фокусы принадлежатъ второму роду, такъ какъ имѣемъ:

$$\lambda=1 \quad , \quad \mu=\frac{p-q}{p}$$

Уравненіе (46) даетъ:

$$(1-\lambda)x^2+y^2+(1-\nu)z^2-2x(a-\lambda k)-$$

$$-2by-2z(c-\nu g)+a^2+b^2+c^2-\lambda k^2-\nu g^2=0$$

Сравнивая это уравненіе съ (44), найдемъ.

$$1-\lambda=0 \quad , \quad b=0 \quad , \quad a^2+c^2=\lambda k^2+\nu g^2$$

$$p=q(1-\nu)=a-\lambda k \quad , \quad c-\nu g=0$$

откуда:

$$\lambda=1 \quad , \quad a^2+c^2=(a-p)^2+\frac{c}{\nu} \quad , \quad \nu=\frac{q-p}{q}$$

Слѣдовательно:

$$c^2=2(q-p)a-p(q-p)$$

Откуда видимъ, что эллиптическій параболоидъ имѣетъ и вторую фокальную линію въ плоскости XZ, коей уравненіе есть:

$$z^2=(q-p)(2x-p) \tag{49}$$

очевидно также парабола. Соотвѣтствующіе фокусы принадлежатъ первому роду, такъ какъ:

$$\lambda = 1 \quad , \quad \nu = \frac{q-p}{\text{[illegible]}}$$

эти коэфиціенты имѣютъ разные знаки, если $p > q$.

Если въ уравненіи (48) и (49) измѣнимъ q на $-q$, то найдемъ уравненія фокальныхъ линій гиперболическаго параболоида:

$$z = 0 \quad , \quad y^2 = (p+q)(2x+q) \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad \mu = \frac{p+q}{p}$$

$$y = 0 \quad , \quad z^2 = -(p+q)(2x-p) \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad \nu = \frac{p+q}{q}$$

Это суть параболы, а фокусы принадлежатъ къ второму роду.

§ 674. Если $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ суть дѣйствительныя плоскости въ уравненіе:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = A_1 A_2$$

то можно приложить и къ эллиптическому параболоиду образованіе центральныхъ поверхностей (§ 667). Если плоскости $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$ мнимыя, то:

$$m = \sqrt{\frac{\lambda}{p} - 1} = \sqrt{\frac{q}{p-q}}$$

будетъ величина дѣйствительная, если $p > q$ и въ этомъ случаѣ можно приложить къ эллиптическому параболоиду второй способъ образованія центральныхъ поверхностей.

Если поверхность будетъ параболоидъ гиперболическій, то:

$$m = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} - 1} = \sqrt{\frac{-q}{p+q}}$$

количество мнимое. Въ этомъ случаѣ мы будемъ считать разстояніе точки $(x_1 y_1 z_1)$ поверхности отъ директрисы параллельно плоскости $z = ny$.

Плоскость:

$$z - z_1 = n(y - y_1)$$

встрѣчаетъ директрису въ точкѣ, коей координаты суть:

$$x = k \quad , \quad y = h \quad , \quad z - z_1 = n(h - y_1)$$

Означая это разстояніе черезъ δ будемъ имѣть:

$$\delta^2 = (x_1 - k)^2 + (y_1 - h)^2 + n^2 (y_1 - h)^2 = (x_1 - k)^2 + (1 + n^2)(y_1 - h)^2$$

полагая $1 + n^2 = \mu$, найдемъ:

$$\delta^2 = (x_1 - k)^2 + \mu (y_1 - h)^2$$

Слѣдовательно уравненіе поверхности можно написать въ формѣ:

$$R^2 = \delta^2$$

гдѣ R есть разстояніе точки $(x_1 y_1 z_1)$ отъ фокуса, откуда:

$$\frac{R}{\delta} = 1$$

Количество:

$$n = \sqrt{\mu - 1} = \sqrt{\frac{p+q}{p} - 1} = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

очевидно, есть величина дѣйствительная. Уравненіе плоскости $z = ny$ сдѣлается:

$$z = \pm y \sqrt{\frac{q}{p}}$$

или:

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0$$

это суть *направляющія* плоскости. Изъ этого видимъ, что гиперболоидъ параболическій можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, коихъ разстояніе отъ фокуса равно разстоянію отъ директрисы; это послѣднее разстояніе должно откладываться параллельно направляющей плоскости.

Софокусныя поверхности неимѣющія центра.

§ 675. Пусть данная поверхность будетъ эллиптическій параболоидъ:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \tag{50}$$

уравненіе:

$$\frac{y^2}{p+\mu} + \frac{z^2}{q+\mu} = 2x + \mu \tag{51}$$

представляетъ систему поверхностей, имѣющихъ съ поверхностью однѣ и тѣже фокальныя линіи, въ чемъ легко убѣдится, составляя уравненія этихъ линій для поверхности (51).

Предложеніе. Главныя сѣченія поверхности (51):

$$\begin{aligned} y^2 &= 2(p+\mu)x + \mu(p+\mu) \\ z^2 &= 2(q+\mu)x + \mu(q+\mu) \end{aligned} \tag{52}$$

имѣютъ общіе фокусы съ главными сѣченіями эллиптическаго параболоида (50).

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, первое изъ предъидущихъ сѣченій имѣетъ свою вершину на разстояніи $-\frac{\mu}{2}$ отъ начала, а разстояніе фокуса отъ вершины есть:

$$\frac{p+\mu}{2}-\frac{\mu}{2}=\frac{p}{2}$$

Точно также разстояніе фокуса отъ начала, во второмъ изъ сѣченій, есть $\frac{q}{2}$, слѣдовательно фокусы кривыхъ совпадаютъ съ фокусами главныхъ сѣченій данной поверхности (50).

Поверхности, выраженныя уравненіемъ (51), суть всегда эллиптическіе параболоиды, исключая того случая, когда μ заключается между p и q. Всѣ эти поверхности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, такъ какъ касательныя плоскости, въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ пересѣченія двухъ софокусныхъ поверхностей:

$$\frac{y^2}{p+\mu_1}+\frac{z^2}{q+\mu_1}-2x-\mu_1=0 \quad , \quad \frac{y^2}{p+\mu_2}+\frac{z^2}{q+\mu_2}-2x-\mu_2=0 \qquad (53)$$

суть:

$$\begin{aligned}\frac{y_1y}{p+\mu_1}+\frac{z_1z}{q+\mu_1}-(x_1+x)-\mu_1=0\\ \frac{y_1y}{p+\mu_2}+\frac{z_1z}{q+\mu_2}-(x_1+x)-\mu_2=0\end{aligned} \qquad (54)$$

Условіе перпендикулярности этихъ плоскостей есть:

$$\frac{y^2_1}{(p+\mu_1)(p+\mu_2)}+\frac{z^2_1}{(q+\mu_1)(q+\mu_2)}+1=0 \qquad (55)$$

Но это уравненіе получимъ, вычитая уравненія (53).

Примѣры.

§ 676. *Пр. 1.* Найти длину нормали эллипсоида между его основаніемъ и точкою встрѣчи съ плоскостью XY?

Рѣшеніе. Уравненія эллипсоида и нормали въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ суть:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad \frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}}=\rho$$

Чтобы найти координаты точки встрѣчи нормали съ плоскостью XY надобно положить въ уравненіяхъ нормали $z = 0$, что дастъ:

$$x - x_1 = -\frac{c^2 x_1}{a^2} \quad , \quad y - y_1 = -\frac{c^2 y_1}{b^2} \quad , \quad -z_1 = \frac{\rho z_1}{c^2} \quad , \quad \rho = \quad c^2$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ, означая черезъ N искомую длину:

$$N = \frac{c^2}{P}$$

гдѣ P есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ центра эллипсоида на касательную плоскость въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$.

Пр. 2. Найти на эллипсоидѣ такую точку, чтобы касательная плоскость въ этой точкѣ дѣлала равные отрѣзки на координатныхъ осяхъ?

Рѣшеніе. Если искомую точку означимъ черезъ $(x_1 y_1 z_1)$, то касательная плоскость въ этой точкѣ къ эллипсоиду, есть:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} \quad 1$$

Если напишемъ ее въ формѣ:

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_1}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_1}} + \frac{z}{\frac{c^2}{z_1}} = 1$$

то отсюда видимъ, что отрѣзки, которые она дѣлаетъ на координатныхъ осяхъ суть:

$$\frac{a^2}{x_1} \quad , \quad \frac{b^2}{y_1} \quad , \quad \frac{c^2}{z_1}$$

Если эти отрѣзки равны, то мы должны имѣть:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{y_1}{b^2} \quad \frac{z_1}{c^2} = \rho$$

откуда:

$$\frac{x_1}{a} = a\rho \quad , \quad \frac{y_1}{b} = b\rho \quad , \quad \frac{z_1}{c} = c\rho$$

возвышая въ квадратъ и складывая, найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{y_1}{b^2} = \frac{z_1}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

откуда:

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad , \quad y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad , \quad z_1 = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Пр. 3. Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ нормаль къ эллипсоиду въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$ и черезъ его центръ?

Отв.

$$a^2 (b^2 - c^2) \frac{x}{x_1} + b^2 (c^2 - a^2) \frac{y}{y_1} + c^2 (a^2 - b^2) \frac{z}{z_1} = 0$$

Пр. 4. Найти геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра эллипсоида на касательныя плоскости?

Рѣшеніе. Пусть x, y, z будутъ координаты основанія перпендикуляра P, то будемъ имѣть:

$$x = P^2 \frac{x_1}{a^2} \quad , \quad y = P^2 \frac{y_1}{b^2} \quad , \quad z = P^2 \frac{z_1}{c^2} \quad , \quad P^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

откуда, исключая P, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

Пр. 5. Три перпендикулярныя между собою прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, касаются во всѣхъ своихъ положеніяхъ поверхности втораго порядка; найти геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченія?

Рѣшеніе. Пусть уравненія прямыхъ будутъ:

$$\frac{x - x_1}{\lambda_1} = \frac{y - y_1}{\mu_1} = \frac{z - z_1}{\nu_1} \quad , \quad \frac{x - x_1}{\lambda_2} = \frac{y - y_1}{\mu_2} = \frac{z - z_1}{\nu_2} \quad , \quad \frac{x - x_1}{\lambda_3} = \frac{y - y_1}{\mu_3} = \frac{z - z_1}{\nu_3}$$

а уравненіе поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

подставляя въ это уравненіе выраженія:

$$x = x_1 + \lambda_1\rho \quad , \quad y = y_1 + \mu_1\rho \quad , \quad z = z_1 + \nu_1\rho$$

найдемъ:

$$\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} + \frac{z^2_1}{c^2} - 1 + 2\rho\left(\frac{\lambda_1 x_1}{a^2} + \frac{\mu_1 y_1}{b^2} + \frac{\nu_1 z_1}{c^2}\right) + \rho^2\left(\frac{\lambda^2_1}{a^2} + \frac{\mu^2_1}{b^2} + \frac{\nu^2_1}{c^2}\right) = 0$$

Условіе касанія первой прямой поверхности есть:

$$\left(\frac{\lambda_1 x_1}{a^2} + \frac{\mu_1 y_1}{b^2} + \frac{\nu_1 z_1}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} + \frac{z^2_1}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\lambda^2_1}{a^2} + \frac{\mu^2_1}{b^2} + \frac{\nu^2_1}{c^2}\right)$$

Условія касанія двухъ другихъ прямыхъ будутъ:

$$\left(\frac{\lambda_2 x_1}{a^2} + \frac{\mu_2 y_1}{b^2} + \frac{\nu_2 z_1}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} + \frac{z^2_1}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\lambda^2_2}{a^2} + \frac{\mu^2_2}{b^2} + \frac{\nu^2_2}{c^2}\right)$$

$$\left(\frac{\lambda_3 x_1}{a^2} + \frac{\mu_3 y_1}{b^2} + \frac{\nu_3 z_1}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} + \frac{z^2_1}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\lambda^2_3}{a^2} + \frac{\mu^2_3}{b^2} + \frac{\nu^2_3}{c^2}\right)$$

Складывая почленно эти уравненія, найдемъ:

$$\frac{x^2_1}{a^4} + \frac{y^2_1}{b^4} + \frac{z^2_1}{c^4} = \left(\frac{x^2_1}{a^2} + \frac{y^2_1}{b^2} + \frac{z^2_1}{c^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

или:

$$(b^2 + c^2)\, x^2_1 + (a^2 + c^2)\, y^2_1 + (a^2 + b^2)\, z^2_1 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$$

Слѣдовательно геометрическое мѣсто есть эллипсоидъ концентричный данному.

Если уравненіе поверхности будетъ:

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$$

то геометрическое мѣсто будетъ параболоидъ вращенія:

$$y^2+z^2=2(p+q)\,x+pq$$

Пр. 6. Три перпендикулярныя между собою прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, перемѣщаются, упираясь постоянно на данное коническое сѣченіе; найти геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченія?

Рѣшеніе. Пусть уравненіе даннаго коническаго сѣченія будетъ:

$$z=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{56}$$

а уравненія прямыхъ тѣже, что и въ предъидущемъ примѣрѣ. Если выразимъ, что прямая:

$$x=x_1+\lambda_1\rho \quad , \quad y=y_1+\mu_1\rho \quad , \quad z=z_1+\nu_1\rho$$

встрѣчаетъ коническое сѣченіе (56), то найдемъ уравненіе:

$$\left(\frac{x^2_1}{a^2}+\frac{y^2_1}{b^2}-1\right)+2\rho\left(\frac{\lambda_1 x_1}{a^2}+\frac{\mu_1 y_1}{b^2}\right)+\rho^2\left(\frac{\lambda^2_1}{a^2}+\frac{\mu^2_1}{b^2}\right)=0$$

Но въ точкѣ встрѣчи прямой и коническаго сѣченія $z=0$, $\rho=-\frac{z_1}{\nu}$, если вмѣсто ρ подставимъ эту величину въ предъидущее уравненіе, найдемъ:

$$\nu^2_1\left(\frac{x^2_1}{a^2}+\frac{y^2_1}{b^2}-1\right)-2z_1\left(\frac{\lambda_1\nu_1x_1}{a^2}+\frac{\mu_1\nu_1y_1}{b^2}\right)+z^2_1\left(\frac{\lambda^2_1}{a^2}+\frac{\mu^2_1}{b^2}\right)=0$$

для другихъ прямыхъ точно также найдемъ:

$$\nu^2_2\left(\frac{x^2_1}{a^2}+\frac{y^2_1}{b^2}-1\right)-2z_1\left(\frac{\lambda_2\nu_2x_1}{a^2}+\frac{\mu_2\nu_2y_1}{b^2}\right)+z^2_1\left(\frac{\lambda^2_2}{a^2}+\frac{\mu^2_2}{b^2}\right)=0$$

$$\nu^2_3\left(\frac{x^2_1}{a^2}+\frac{y^2_1}{b^2}-1\right)-2z_1\left(\frac{\lambda_3\nu_3x_1}{a^2}+\frac{\mu_3\nu_3y_1}{b^2}\right)+z^2_1\left(\frac{\lambda^2_3}{a^2}+\frac{\mu^2_3}{b^2}\right)=0$$

Складывая, почленно, эти три уравненія найдемъ:

$$b^2x^2_1+a^2y^2_1+(a^2+b^2)\,z^2_1=a^2b^2$$

Слѣдовательно искомое геометрическое мѣсто есть эллипсоидъ. Это геометрическое мѣсто будетъ однополый или двуполый гиперболоидъ, если коническое сѣченіе будетъ гипербола. Если данное коническое сѣченіе будетъ парабола $y^2=2px$, то геометрическое мѣсто будетъ параболоидъ вращенія:

$$y^2+z^2=2px$$

Пр. 7. Три перпендикулярныя между собою плоскости касаются къ данному коническому сѣченію; найти геометрическое мѣсто ихъ точки пересѣченія?

Рѣшеніе. Пусть данное коническое сѣченіе и одна изъ плоскостей, проходящихъ черезъ точку $(x_1 y_1 z_1)$, будутъ:

$$z=0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad (x-x_1)\cos\alpha_1+(y-y_1)\cos\beta_1+(z-z_1)\cos\gamma_1=0$$

пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью XY есть:

$$x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1-(x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1)=0$$

оно должно быть тождественно съ касательной:

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1$$

откуда найдемъ:

$$a\cos\alpha_1=(x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1)\frac{x_1}{a} \quad , \quad b\cos\beta_1=(x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1)\frac{y_1}{b}$$

а изъ этихъ послѣднихъ уравненій имѣемъ:

$$(x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1)^2=a^2\cos^2\alpha_1+b^2\cos^2\beta_1$$

точно также найдемъ для двухъ другихъ плоскостей:

$$(x_1\cos\alpha_2+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\gamma_2)^2=a^2\cos^2\alpha_2+b^2\cos^2\beta_2$$

$$(x_1\cos\alpha_3+y_1\cos\beta_3+z_1\cos\gamma_3)^2=a^2\cos^2\alpha_3+b^2\cos^2\beta_3$$

Складывая эти три уравненія, найдемъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста:

$$x^2_1+y^2_1+z^2_1=a^2+b^2$$

Если кривая будетъ парабола $z=0$, $y^2=2px$, то геометрическое мѣсто будетъ плоскость перпендикулярная къ плоскости XY и проходящая черезъ директрису параболы.

Пр. 8. Плоскость касается поверхности втораго порядка; найти геометрическое мѣсто ея полюса относительно другой данной поверхности втораго порядка?

Рѣшеніе. Пусть данная поверхность, къ которой касается плоскость будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2_1}+\frac{y^2}{b^2_1}+\frac{z^2}{c^2_1}=1 \tag{57}$$

а поверхность, относительно которой берется полюсъ пусть будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{58}$$

Если черезъ $(x_1 y_1 z_1)$ означимъ полюсъ, то:

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}+\frac{z_1 z}{c^2}=1 \quad , \quad \frac{x' x}{a^2_1}+\frac{y' y}{b^2_1}+\frac{z' z}{c^2_1}=1$$

будутъ уравненія полярной плоскости точки $(x_1 y_1 z_1)$ и касательной плоскости въ

точкѣ $(x'y'z')$ поверхности (57). Отождествляя эти уравненія, найдемъ:

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{x'}{a^2_1} \quad , \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{y'}{b^2_1} \quad , \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{z'}{c^2_1}$$

исключая x_1, y_1, z_1, найдемъ искомое геометрическое мѣсто:

$$\frac{a^2_1}{a^4} x^2_1 + \frac{b^2_1}{b^4} y^2_1 + \frac{c^2_1}{c^4} z^2_1 = 1$$

Пр. 9. Найти геометрическое мѣсто центровъ коническихъ сѣченій, происшедшихъ отъ пересѣченія поверхности втораго порядка, плоскостями проведенными въ данномъ разстояніи отъ начала?

Рѣшеніе. Пусть данная поверхность и одна изъ сѣкущихъ плоскостей будутъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

Центръ сѣченія находится на плоскости и на сопряженномъ ей діаметрѣ, котораго уравненія, очевидно, суть:

$$\frac{x}{a^2 \cos\alpha} = \frac{y}{b^2 \cos\beta} = \frac{z}{c^2 \cos\gamma}$$

Исключая косинусы между этими уравненіями и сѣкущей плоскостью, найдемъ уравненіе искомаго мѣста:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = p^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$$

Пр. 10. Если плоскость сѣченія проходитъ черезъ данную точку, то геометрическое мѣсто сѣченій будетъ:

$$\frac{x}{a^2}(x - x_1) + \frac{y}{b^2}(y - y_1) + \frac{z}{c^2}(z - z_1) = 0$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 суть координаты данной точки.

Пр. 11. Геометрическое мѣсто точки пересѣченія трехъ перпендикулярныхъ касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda^2_1} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda^2_1} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda^2_1} = 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda^2_2} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda^2_2} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda^2_2} = 1$$

есть шаръ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \lambda^2_1 + \lambda^2_2$$

Пр. 12. Найти разстояніе между точкою касанія $(x'y'z')$ касательной плоскости къ поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{59}$$

и полюсомъ этой плоскости относительно софокусной поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{60}$$

Рѣшеніе. Касательная плоскость къ поверхности (59) въ точкѣ $(x'y'z')$ есть:

$$\frac{x'x}{a^2}+\frac{y'y}{b^2}+\frac{z'z}{c^2}=1$$

а полярная плоскость точки $(x_1y_1z_1)$ относительно поверхности (57) есть:

$$\frac{x'x}{a^2+\lambda}+\frac{y'y}{b^2+\lambda}+\frac{z'z}{c^2+\lambda}=1$$

отождествляя эти два уравненія, найдемъ:

$$\frac{x'}{a^2}=\frac{x_1}{a^2+\lambda} \quad , \quad \frac{y'}{b^2}=\frac{y_1}{b^2+\lambda} \quad , \quad \frac{z'}{b^2}=\frac{z_1}{c^2+\lambda}$$

откуда:

$$x_1-x'=\frac{\lambda x'}{a^2} \quad , \quad y_1-y'=\frac{\lambda y'}{b^2} \quad , \quad z_1-z'=\frac{\lambda z'}{c^2}$$

означая черезъ δ разстояніе точекъ $(x'y'z')$ и $(x_1y_1z_1)$, найдемъ наконецъ:

$$\delta=\frac{\lambda}{P}$$

Пр. 13. Дано уравненіе эллипсоида въ плоскостныхъ координатахъ:

$$a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2=1 \tag{61}$$

Найти уравненіе, какой нибудь, точки на нормальной линіи къ поверхности въ точкѣ касанія касательной плоскости данной координатами $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$?

Рѣшеніе. Уравненія нормали въ точкѣ $(x_1y_1z_1)$ къ эллипсоиду въ декартовыхъ координатахъ есть:

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}}=\lambda \tag{62}$$

Уравненіе точки касанія касательной плоскости есть:

$$a^2\xi_1\xi+b^2\eta_1\eta+c^2\zeta_1\zeta=1 \tag{63}$$

Координаты этой точки, очевидно, суть:

$$x_1=a^2\xi_1 \quad , \quad y_1=b^2\eta_1 \quad , \quad z_1=c^2\zeta_1$$

откуда изъ (62) найдемъ координаты, какой нибудь, точки на нормали:

$$x=(a^2-\lambda)\xi_1 \quad , \quad y=(b^2-\lambda)\eta_1 \quad , \quad z=(c^2-\lambda)\zeta_1$$

Если это координаты точки на нормали, то ея уравненіе есть:

$$a^2\xi_1\xi+b^2\eta_1\eta+c^2\zeta_1\zeta-\lambda(\xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta)=0$$

Пр. 14. Уравненіе:

$$\frac{\xi^2}{a^2+\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda}+\frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}=1$$

представляетъ систему поверхностей, имѣющихъ однѣ и тѣже плоскости круговыхъ сѣченій.

Рѣшеніе. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе этой поверхности въ декартовыхъ координатахъ есть:

$$(a^2+\lambda)x^2+(b^2+\lambda)y^2+(c^2+\lambda)z^2=1$$

Изъ формы этого уравненія видно, что система этихъ поверхностей имѣетъ однѣ и тѣ-же плоскости круговыхъ сѣченій. Эти поверхности называются *конциклическими.*

Пр. 15. Три конциклическія поверхности касаются одной и той-же плоскости въ пространствѣ, а прямыя, соединяющія центръ этихъ поверхностей съ точками касанія, перпендикулярны между собою

Доказательство. Пусть уравненіе системы конциклическихъ поверхностей будетъ:

$$\frac{\xi^2}{a^2+\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda}+\frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}=1$$

Если эти поверхности касаются плоскостя $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$, то имѣемъ:

$$\frac{\xi^2_1}{a^2+\lambda}+\frac{\eta^2_1}{b^2+\lambda}+\frac{\zeta^2_1}{c^2+\lambda}=1$$

откуда получимъ уравненіе третьей степени относительно λ, всѣ три корня коего всегда дѣйствительны; пусть эти корни будутъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Слѣдовательно поверхности:

$$\frac{\xi^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{\zeta^2}{c^2+\lambda_1}=1 \quad , \quad \frac{\xi^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{\xi^2}{c^2+\lambda_2}=1 \qquad (64)$$

касаются плоскости $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$. Уравненія точекъ касанія будутъ:

$$\frac{\xi_1\xi}{a^2+\lambda_1}+\frac{\eta_1\eta}{b^2+\lambda_1}+\frac{\zeta_1\zeta}{c^2+\lambda_1}=1 \quad , \quad \frac{\xi_1\xi}{a^2+\lambda_2}+\frac{\eta_1\eta}{b^2+\lambda_2}+\frac{\zeta_1\zeta}{c^2+\lambda_2}=1$$

Если $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ суть Декартовы координаты этихъ точекъ, то имѣемъ:

$$x_1=\frac{\xi_1}{a^2+\lambda_1} \quad , \quad y_1=\frac{\eta_1}{b^2+\lambda_1} \quad , \quad z_1=\frac{\zeta_1}{c^2+\lambda_1}$$

$$x_2=\frac{\xi_1}{a^2+\lambda_2} \quad , \quad y_2=\frac{\eta_1}{b^2+\lambda_2} \quad , \quad z_2=\frac{\zeta_1}{c^2+\lambda_2}$$

Слѣдовательно косинусы угловъ, которые радіусы векторы r_1 и r_2 составляютъ съ координатными осями, суть:

$$\cos\alpha_1=\frac{\xi_1}{r_1(a^2+\lambda_1)} \quad , \quad \cos\beta_1=\frac{\eta_1}{r_1(b^2+\lambda_1)} \quad , \quad \cos\gamma_1=\frac{\zeta_1}{r_1(c^2+\lambda_1)}$$

$$\cos\alpha_2=\frac{\xi_1}{r_2(a^2+\lambda_2)} \quad , \quad \cos\beta_2=\frac{\eta_1}{r_2(b^2+\lambda_2)} \quad , \quad \cos\gamma_2=\frac{\zeta_1}{r_2(c^2+\lambda_2)}$$

откуда:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=$$

$$=\frac{1}{r_1r_2}\left\{\frac{\xi^2_1}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{\eta^2_1}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+\frac{\zeta^2_1}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}\right\}$$

Но если вычтемъ уравненія (64) поверхностей, то увидимъ, что вторая часть предъидущаго уравненія равна нулю, слѣдовательно r_1 и r_2 перпендикулярны.

Пр. 16. Даны двѣ прямыя линіи; двѣ перпендикулярныя плоскости, проходящія, черезъ эти прямыя пересѣкаются; найти геометрическое мѣсто пересѣченія?

Рѣшеніе. Пусть уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} x&=az+p \quad , \quad x=a_1z+p_1 \\ y&=bz+q \quad , \quad y=b_1z+q_1 \end{aligned} \tag{65}$$

уравненія плоскостей, проходящихъ черезъ эти прямыя, очевидно, будутъ:

$$x-az-p=\lambda(y-bz-q) \quad , \quad x-a_1z-p_1=\mu(y-b_1z-q) \tag{66}$$

такъ какъ эти плоскости перпендикулярны, по условію, то имѣемъ:

$$1+\lambda\mu+(\lambda b-a)(\mu b_1-a_1)=0$$

или:

$$1+aa_1-ab_1\mu-a_1b\lambda+(1+bb_1)\lambda\mu=0 \tag{67}$$

подставляя въ это уравненіе λ и μ изъ уравненій (66), найдемъ искомое геометрическое мѣсто.

Чтобы точно опредѣлить родъ поверхности, выберемъ координатныя оси слѣдующимъ образомъ: пусть $AB=2d$ будетъ кратчайшее разстояніе между двумя данными прямыми. Помѣстимъ начало координатъ въ срединѣ AB и возьмемъ за плоскость XY плоскость перпендикулярную къ AB, наконецъ за ось X возьмемъ равнодѣлящую уголъ между проэкціями данныхъ прямыхъ на плоскости XY. При такомъ положеніи координатныхъ осей уравненія данныхъ прямыхъ будутъ:

$$\begin{aligned} z&=d \qquad\quad z=-d \\ y&=mx \quad , \quad y=-mx \end{aligned}$$

уравненія плоскостей, проходящихъ черезъ эти прямыя будутъ:

$$z-d=\lambda(y-mx) \quad , \quad z+d=\mu(y+mx) \tag{68}$$

условіе (67) сдѣлается:

$$1+(1-m^2)\lambda\mu=0$$

исключая λ и μ, съ помощью уравненій (68), найдемъ:

$$1+(1-m^2)\frac{z-d}{y-mx}\cdot\frac{z+d}{y+mx}=0$$

или:

$$y^2-m^2x^2+(1-m^2)(z^2-d^2)=0$$

или еще:

$$y^2 - m^2x^2 + (1 - m^2) z^2 = d^2(1 - m^2)$$

Это уравненіе однополаго гиперболоида.

Пр. 17. Найти геометрическое мѣсто точекъ, находящихся въ равномъ разстояніи отъ двухъ данныхъ прямыхъ?

Рѣшеніе. Взявъ ту же систему координатъ, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ, найдемъ:

$$mxy + (1 + m^2)\, dz = 0$$

уравненіе гиперболическаго параболоида.

Пр. 18. Найти геометрическое мѣсто точки, коей разстояніе отъ данной точки равно n разъ взятому разстоянію отъ данной прямой?

Рѣшеніе. Пусть A будетъ данная точка, возьмемъ за ось X перпендикуляръ, опущенный изъ точки A на данную прямую, помѣстимъ начало координатъ O на разстояніи a отъ точки A; наконецъ возьмемъ за ось Z прямую параллельную данной прямой. Уравненіе геометрическаго мѣста будетъ:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = n^2 \left\{ y^2 + (d - x)^2 \right\}$$

гдѣ d есть разстояніе данной прямой отъ начала координатъ. Если развернемъ предъидущее уравненіе, то найдемъ:

$$(1 - n^2)\, x^2 + (1 - n^2)\, y^2 + z^2 - 2ax + 2n^2dx = n^2d^2 - a^2$$

поверхность, очевидно, вращенія.

Пр. 19. Найти геометрическое мѣсто точки, которой произведеніе разстояній, отъ смежныхъ граней даннаго параллелепипеда равно произведенію разстояній отъ граней, пересѣкающихся въ противуположномъ углѣ?

Рѣшеніе. Пусть ребра даннаго косоугольнаго параллелепипеда будутъ $2a$, $2b$, $2c$. Помѣстимъ начало въ центрѣ параллелепипеда и возьмемъ за координатныя оси прямыя параллельныя ребрамъ. Уравненія граней будутъ:

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$
$$x = -a \quad , \quad y = -b \quad , \quad z = -c$$

Означимъ через λ, μ, ν косинусы угловъ между координатными осями и положимъ:

$$\delta = \sqrt{1 + 2\lambda\mu\nu - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}$$

разстоянія, перемѣщающейся точки отъ граней параллелепипеда будутъ:

$$\delta \frac{x - a}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad , \quad \delta \frac{y - b}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad , \quad \delta \frac{z - c}{\sqrt{1 - \nu^2}}$$

$$\delta \frac{x + a}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad , \quad \delta \frac{y + b}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad , \quad \delta \frac{z + c}{\sqrt{1 - \nu^2}}$$

откуда уравненіе геометрическаго мѣста будетъ однополый гиперболоидъ:

$$(x - a)(y - b)(z - c) = (x + a)(y + b)(z + c)$$

или

$$ayz + bxz + cxy + abc = 0$$

Пр. 20. Найти геометрическое мѣсто центровъ поверхности:

$$x^2+y^2-z^2+2\lambda xz+2\mu qyz-2ax-2by+2cz=0$$

гдѣ λ и μ суть перемѣнные параметры.

Пр. 21. Шаръ скользитъ, оставаясь касательнымъ къ двумъ перпендикулярнымъ непересѣкающимся прямымъ; найти геометрическое мѣсто его центровъ?

Отв. Гиперболическій параболоидъ.

Поверхности, проходящія черезъ пересѣченіе двухъ поверхностей втораго порядка.

§ 677. Мы видѣли, что если:

$$\begin{gathered} f_1=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+ \\ +2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}xu+2a_{24}yu+2a_{34}zu+a_{44}u^2=0 \\ f_2=b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+ \\ +2b_{12}xy+2b_{13}xz+2b_{23}yz+2b_{14}xu+2b_{24}yu+2b_{34}zu+b_{44}u^2=0 \end{gathered} \qquad (69)$$

суть уравненія двухъ поверхностей втораго порядка, то уравненіе:

$$f_1-\lambda f_2=0 \qquad (70)$$

будетъ представлять уравненіе поверхности также втораго порядка, проходящей черезъ пересѣченіе поверхностей (69), которое есть кривая двойной кривизны четвертой степени. Такъ какъ λ есть произвольный параметръ, то есть безчисленное множество—система поверхностей, проходящихъ черезъ пересѣченіе поверхностей (69). Между этими поверхностями есть вообще четыре коническія. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли § 533, что если опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0 \qquad (71)$$

то уравненіе $f_1=0$ представляетъ конусъ. Если приложимъ этотъ критеріумъ къ уравненію (70), то найдемъ слѣдующее условіе, чтобы оно представляло конусъ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11}\,, & a_{12}-\lambda b_{12}\,, & a_{13}-\lambda b_{13}\,, & a_{14}-\lambda b_{14} \\ a_{21}-\lambda b_{21}\,, & a_{22}-\lambda b_{22}\,, & a_{23}-\lambda b_{23}\,, & a_{24}-\lambda b_{24} \\ a_{31}-\lambda b_{31}\,, & a_{32}-\lambda b_{32}\,, & a_{33}-\lambda b_{33}\,, & a_{34}-\lambda b_{34} \\ a_{41}-\lambda b_{41}\,, & a_{42}-\lambda b_{42}\,, & a_{43}-\lambda b_{43}\,, & a_{44}-\lambda b_{44} \end{vmatrix}=0 \qquad (72)$$

Это уравненіе четвертой степени относительно λ, а слѣдовательно между системой поверхностей (70) есть вообще четыре конуса.

Если означимъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ корни уравненія (72), то:

$$f_1 - \lambda f_2 = 0$$

есть конусъ, слѣдовательно (§ 533) x, y, z, и должны удовлетворять уравненіямъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial u} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

величины x, y, z, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ суть координаты вершины конуса.

§ 678. Полярная плоскость точки $(x_1 y_1 z_1 u_1)$ относительно поверхности (70), есть:

$$x\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) + y\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right) + z\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial z_1}\right) + u\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \lambda \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right) = 0 \quad (73)$$

Если полюсъ $(x_1 y_1 z_1 u_1)$ совпадаетъ съ вершиною конуса, соотвѣтствующаго корню λ_1, то имѣетъ слѣдующія зависимости:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = 0\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = 0 \quad (74)$$

откуда, подставляя эти выраженія въ (73), найдемъ:

$$(\lambda_1 - \lambda)\left(x \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + y \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + z \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + u \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right) = 0$$

или:

$$x \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + y \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + z \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + u \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = 0$$

Это есть уравненіе полярной плоскости вершины конуса, соотвѣтствующаго корню λ_1, такъ какъ эта плоскость не зависитъ отъ λ, то изъ этого слѣдуетъ, что она есть полярная плоскость вершины конуса относительно всей системы (70) поверхностей.

Другія вершины конусовъ, соотвѣтствующихъ корнямъ $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, будутъ имѣть тоже свойство.

Слѣдовательно тетраэдръ, коего вершины суть вершины четырехъ конусовъ, есть общій полярный тетраэдръ всей системы поверхностей (70).

Обратно, если точка въ пространствѣ есть полюсъ одной и той-же плоскости относительно всѣхъ поверхностей системы (70), то она должна совпадать съ одной изъ вершинъ четырехъ конусовъ, проходящихъ черезъ пересѣченіе поверхностей (69).

Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе (73) представляетъ одну и туже плоскость, какое бы нибыло количество λ, то мы должны имѣть:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\lambda\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=\lambda\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial z_1}=\lambda\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial u_1}=\lambda\frac{\partial f_2}{\partial u_1}$$

но если изъ этихъ уравненій исключимъ x_1, y_1, z_1, u_1, то найдемъ уравненіе (72), слѣдовательно точка $(x_1y_1z_1u_1)$ будетъ вершина одного изъ четырехъ конусовъ.

Теперь покажемъ, что полярная плоскость одной изъ вершинъ конусовъ проходитъ черезъ три вершины остальныхъ конусовъ.

Умножая равенства:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=\lambda_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=\lambda_1\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial z_1}=\lambda_1\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial u_1}=\lambda_1\frac{\partial f_2}{\partial u_1}$$

на x_2, y_2, z_2, u_2, а уравненія:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial y_2}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial z_2}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z_2}\quad,\quad\frac{\partial f_1}{\partial u_2}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial u_2}$$

на x_1, y_1, z_1, u_1 и складывая, а полученныя суммы вычитая, найдемъ:

$$(\lambda_1-\lambda_2)\left(x_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f_2}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f_2}{\partial z_1}+u_2\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right)=0 \tag{75}$$

замѣчая, что:

$$x_2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f_1}{\partial z_1}+u_2\frac{\partial f_1}{\partial u_1}=x_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial f_1}{\partial y_2}+z_1\frac{\partial f_1}{\partial z_2}+u_1\frac{\partial f_1}{\partial u_2}$$

Изъ уравненія (75) видимъ, что вершина $(x_2y_2z_2u_2)$ конуса, соотвѣтствующаго корню λ_2, лежитъ въ полярной плоскости вершины $(x_1y_1z_1u_1)$. Точно также можно показать, что и вершины другихъ конусовъ находятся въ той-же полярной плоскости.

§ 679. Если общій полярный тетраэдръ возьмемъ за координатный, то уравненія поверхностей (69) сдѣлаются:

$$a_{11}x^2_1+a_{22}x^2_2+a_{33}x^2_3+a_{44}x^2_4=0\quad,\quad b_{11}x^2_1+b_{22}x_2^2+b_{33}x_2^2+b_{44}x_4^2=0 \tag{76}$$

а (70) будетъ:

$$(a_{11}-\lambda b_{11})x^2_1+(a_{22}-\lambda b_{22})x^2_2+(a_{33}-\lambda b_{33})x^2_3+(a_{44}-\lambda b_{44})x^2_4=0 \tag{77}$$

Если изъ уравненій (76) исключимъ x_4, то найдемъ уравненіе:

$$(a_{11}b_{44}-b_{11}a_{44})x^2_1+(a_{22}b_{44}-b_{22}a_{44})x^2_2+(a_{33}b_{44}-b_{33}a_{44})x^2_3=0$$

которое представляетъ конусъ, проходящій черезъ пересѣченіе поверхностей (76), и котораго вершина совпадаетъ съ вершиною тетраэдра, къ которой прилегаютъ грани $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$.

ГЛАВА XL.

Образованіе поверхностей.

§ 680. Въ нашихъ изслѣдованіяхъ мы уже встрѣчали поверхности, образованныя перемѣщеніемъ прямой линіи или вообще кривой въ пространствѣ (§ 591). Прямая линія или кривая, перемѣщаясь скользитъ, упираясь на одну или нѣсколько прямыхъ линій или кривыхъ. Эти послѣднія кривыя или прямыя называются *направляющими—директрисами*, а скользящая по нимъ прямая или кривая, образующая поверхность, называется *образующею—женератрисою*.

Кривая въ пространствѣ опредѣляется пересѣченіемъ двухъ поверхностей; пусть ея уравненія будутъ:

$$f_1(xyz\ ,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)=0\quad,\quad f_2(xyz\ ,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)=0 \tag{1}$$

гдѣ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ суть постоянные параметры, опредѣляющіе положеніе и форму поверхностей, а слѣдовательно и кривой, к торую эти поверхности представляютъ.

Такъ какъ дѣйствія, означенныя символами f_1 и f_2 извѣстны, то родъ кривой также извѣстенъ, но такъ какъ поверхности (1) содержатъ n параметровъ, то съ измѣненіемъ ихъ кривая будетъ измѣнять положеніе въ пространствѣ и форму.

Если параметры $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ будутъ измѣняться произвольно, то кривая (1), перемѣщаясь въ пространствѣ безъ всякаго опредѣленнаго закона, можетъ иногда наполнить послѣдовательными положеніями все пространство, не образовавъ никакой поверхности.

Пр. 1. Если въ уравненіяхъ прямой:

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma} \tag{2}$$

которыя содержатъ параметры α,β,γ, будемъ перемѣнять направленіе пря-

мой α, β, γ, то прямая (2), принимая около точки $(x_1 y_1 z_1)$ всевозможныя направленія, наполнитъ все пространство, не образовавъ никакой поверхности.

Пр. 2. Если въ уравненіяхъ круга:

$$z = ax + by + c \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{3}$$

которыя заключаютъ параметры a, b, c, r, будемъ ихъ измѣнять безъ всякаго опредѣленнаго закона, то кругъ представляемый уравненіями (3), перемѣщаясь, наполнитъ все пространство и не образуетъ никакой поверхности.

Слѣдовательно должна существовать извѣстная зависимость между параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, чтобы женератрисы (1), перемѣщаясь въ пространствѣ, образовали поверхность. Эта зависимость получится, если заставимъ женератрису (1) перемѣщаться, упираясь на $n-1$ кривыхъ директрисъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

будетъ одна изъ директрисъ, на которую кривая (1), перемѣщаясь, должна постоянно упираться. Такъ какъ кривая (1) пересѣкается съ (4), то въ точкѣ пересѣченія x, y, z должны удовлетворять уравненія (1) и (2); если изъ этихъ четырехъ уравненій исключимъ x, y, z, то найдемъ зависимость между параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Пусть эта зависимость будетъ:

$$\Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0 \tag{5}$$

слѣдовательно одинъ изъ параметровъ будетъ уже зависить отъ остальныхъ. Если будетъ дана еще одна директриса:

$$F_3(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_4(x, y, z) = 0 \tag{6}$$

то точно также найдемъ еще одну зависимость:

$$\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0 \tag{7}$$

между тѣми-же параметрами, слѣдовательно только $(n-2)$ изъ нихъ могутъ измѣняться произвольно. Слѣдовательно, если будетъ дано $(n-1)$ директрисъ, то получимъ $(n-1)$ зависимостей между параметрами α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$:

$$\Phi_1(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0 \; , \; \Phi_2(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0 \; , \ldots \; \Phi_{n-1}(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0 \tag{8}$$

которыя опредѣляютъ $n-1$ параметровъ въ функціи одного изъ нихъ, напримѣръ α_1:

$$\alpha_2 = \varphi_1(\alpha_1) \quad , \quad \alpha_3 = \varphi_2(\alpha_1), \ldots, \alpha_n = \varphi_{n-1}(\alpha_1) \tag{9}$$

Если теперь въ уравненіяхъ женератрисы:

$$f_1(x, y, z, \alpha, \ldots, \alpha_n) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z, \alpha, \ldots, \alpha_n) = 0$$

вставимъ вмѣсто $\alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ихъ выраженія (9), то будемъ имѣть:

$$f_1(x, y, z, \alpha_1, \varphi(\alpha_1) \ldots) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z, \alpha_1, \varphi(\alpha_1) \ldots) = 0 \tag{10}$$

исключая изъ этихъ уравненій α_1, найдемъ зависимость между x, y, z:

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{11}$$

которая и будетъ представлять поверхность, образованную перемѣщеніемъ женератрисы (1), упирающейся при своемъ перемѣщеніи на $(n-1)$ директрисъ.

§ 681. Въ большей части случаевъ дается одна только директриса, слѣдовательно женератриса не должна содержать болѣе двухъ параметровъ. Пусть такая женератриса будетъ:

$$f_1(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2) = 0 \tag{12}$$

а директриса:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F(x, y, z) = 0 \tag{13}$$

исключая изъ этихъ четырехъ уравненій x, y, z, найдемъ зависимость между параметрами α_1 и α_2:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \tag{14}$$

Но изъ уравненій (12) имѣемъ:

$$\alpha_1 = \varphi_1(x, y, z) \quad , \quad \alpha_2 = \varphi_2(x, y, z) \tag{15}$$

подставляя эти выраженія въ уравненіе (14), найдемъ:

$$\varphi\{\varphi_1(x, y, z) \quad , \quad \varphi_2(x, y, z)\} = \Phi(x, y, z) = 0 \tag{16}$$

уравненіе поверхности, образованной женератрисой (12), упирающейся на директрису (13).

Поверхности цилиндрическія.

§ 682. *Цилиндрическія поверхности* образуетъ прямая, которая перемѣщается параллельно данному направленію, упираясь въ своемъ перемѣщеніи на данную кривую.

Пусть данная директриса будетъ:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{17}$$

Если:

$$x = mz + \alpha_1 \quad , \quad y = nz + \alpha_2 \tag{18}$$

будетъ женератриса, то въ ней параметры m и n неизмѣняются — они даютъ направленіе женератрисы, а α_1 и α_2 измѣняются, вслѣдствіе этого измѣненія женератриса переносится въ пространствѣ, оставаясь параллельною направленію, которое опредѣляется параметрами m и n.

Если изъ уравненій (17) и (18) исключимъ (x, y, z), то найдемъ:

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

Но изъ уравненій (18) имѣемъ:

$$\alpha_1 = x - mz \quad , \quad \alpha_2 = yznz$$

откуда:

$$\Phi(x - mz \ , \ y - nz) = 0$$

будетъ уравненіе искомой цилиндрической поверхности, коей форма будетъ зависмть отъ формы директрисы (17).

Пр. Пусть уравненія директрисы будутъ:

$$z = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

если женератриса:

$$x = mz + \alpha_1 \quad , \quad y = nz + \alpha_2$$

встрѣчаетъ директрису, то имѣемъ:

$$\frac{\alpha^2_1}{a^2} + \frac{\alpha^2_2}{b^2} = 0$$

откуда:

$$\frac{(x - mz)^2}{a^2} + \frac{(y - nz)^2}{b^2} = 1$$

Это есть уравненіе цилиндра, коего женератриса параллельна оси Z, а директриса есть эллипсъ на плоскости XY.

Поверхности коническія.

§ 683. *Коническія поверхности* образуются перемѣщеніемъ прямой, которая, проходя постоянно черезъ данную точку, упирается на данную директрису.

Пусть данная директриса будетъ:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{19}$$

а женератриса:

$$x - x_1 = \alpha_1(z - z_1) \quad , \quad y - y_1 = \alpha_2(z - z_1) \tag{20}$$

Изъ этихъ четырехъ уравненій, найдемъ:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

но:

$$\alpha_1 = \frac{x - x_1}{z - z_1} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{y - y_1}{z - z_1}$$

откуда:

$$\varphi\left(\frac{x - x_1}{z - z_1} \quad , \quad \frac{y - y_1}{z - z_1}\right) = 0$$

или:

$$\frac{y - y_1}{z - z_1} = \Phi\left(\frac{x - x_1}{z - z_1}\right) \tag{21}$$

Это уравненіе конической поверхности, коей вершина находится въ точкѣ $(x_1\, y_1\, z_1)$; если вершину помѣстимъ въ началѣ координатъ, то $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, слѣдовательно уравненіе поверхности будетъ:

$$\frac{y}{z} = \Phi\left(\frac{x}{z}\right) \tag{22}$$

Изъ этого уравненія видимъ. что два изъ отношеній $\frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \frac{x}{y}$ суть функціи одно другаго, слѣдовательно уравненіе (22) есть однородная функція.

Пр. Пусть уравненіе директрисы будетъ:

$$z = 0 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

а женератрисы:

$$x - x_1 = \alpha_1(z - z) \quad , \quad y - y_1 = \alpha_2(z - z_1)$$

изъ этихъ четырехъ уравненій, найдемъ:

$$\left(\frac{x_1 - \alpha_1 z_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - \alpha_2 z_1}{b}\right)^2 = 1.$$

подставляя вмѣсто α_1 и α_2 ихъ выраженія:

$$\alpha_1 = \frac{x - x_1}{z - z_1} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{y - y_1}{z - z_1}$$

найдемъ.

$$\frac{(x_1 z - z_1 x)^2}{a^2} + \frac{(y_1 z - z_1 y)^2}{b^2} = (z - z_1)^2$$

Если точка $(x_1 y_1 z_1)$ находится на безконечности, то полагая $\frac{x_1}{z_1} = m$, $\frac{y_1}{z_1} = n$ и $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$, $z_1 = \infty$, найдемъ уравненіе цилиндра.

Если положимъ $a = b$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, то будемъ имѣть прямой конусъ:

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{z^2_1}(z - z_1)^2$$

гдѣ $\frac{a}{z_1} = \operatorname{tg} \omega$, ω есть уголъ, который женератриса составляетъ съ осью Z, слѣдовательно можно написать:

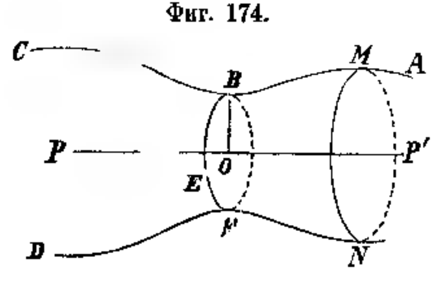
$$x^2 + y^2 = (z - z_1)^2 \operatorname{tg}^2 \omega$$

Очевидно, вершина конуса находится въ точкѣ $(0, 0, z_1)$.

Поверхности вращенія.

§ 684. Обыкновенно *поверхности вращенія* образуютъ вращеніемъ кривой около данной оси; такъ, напримѣръ, поверхность шара образуется вращеніемъ полукруга около діаметра; вращеніемъ кривой ABC (фиг. 174) около оси PP' такъ, что каждая точка B описываетъ кругъ, коего плоскость перпендикулярна къ оси PP', а центръ находится на оси, образуется поверхность $CBAFE$.

Фиг. 174.



Этотъ способъ образованія поверхностей вращенія не даетъ постоянной женератрисы, такъ какъ кривая ABC измѣняется съ родомъ поверхности; но поверхности вращенія допускаютъ постоянную женератрису, если онѣ образуются перемѣщеніемъ круга, коего центръ O перемѣщается по оси PP', плоскость его остается перпендикулярною къ оси, а радіусъ OB постоянно встрѣчаетъ кривую ABC; въ этомъ способѣ образованія женератриса поверхности есть постоянная кривая — кругъ, а директрисами служатъ: ось, по которой перемѣщается центръ круга, и кривая, на которую упирается конецъ радіуса, производящаго круга.

Выразимъ аналитически этотъ второй способъ образованія, который собственно есть тотъ-же, что и первый, разсматриваемый съ другой точки зрѣнія.

Пусть уравненія директрисы ABC будутъ:

$$F_1(x,y,z)=0 \quad , \quad F_2(x,y,z)=0 \tag{23}$$

а уравненія оси вращенія:

$$x-x_1=m(z-z_1) \quad , \quad y-y_1=n(z-z_1)$$

гдѣ x_1, y_1, z_1 суть координаты данной точки, черезъ которую проходитъ ось вращенія. Каждый изъ круговъ BEF, которые называются *параллельными*, можно разсматривать, какъ пересѣченіе плоскости перпендикулярной къ оси вращенія съ шаромъ, коего центръ находится на этой оси въ точкѣ $(x_1 y_1 z_1)$; слѣдовательно уравненія плоскости и шара будутъ:

$$mx+ny+z=\alpha_1 \quad , \quad (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\alpha_2 \tag{24}$$

гдѣ α_1 и α_2 суть перемѣнные параметры, съ измѣненіемъ которыхъ плоскость перемѣщается параллельно самой себѣ, а радіусъ шара возрастаетъ или убываетъ.

Если теперь замѣтимъ, что плоскость, шаръ и директриса (23) должны пересѣкатся въ одной точкѣ, то изъ четырехъ уравненій (23) и (24), исключая x, y, z, найдемъ зависимость между параметрами α_1 и α_2, которая пусть будетъ:

$$\alpha_1=\Phi(\alpha_2)$$

Но параметры α_1 и α_2 суть функціи координатъ x, y, z выраженныя уравненіями (24), слѣдовательно имѣемъ:

$$mx+ny+z=\Phi\left\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right\} \tag{25}$$

это уравненіе поверхности вращенія.

Если ось Z возьмемъ за ось вращенія, то $m=0$, $n=0$, слѣдовательно уравненіе сдѣлается:

$$z=\Phi(x^2+y^2+z^2) \tag{26}$$

которому можно всегда дать форму:

$$z=\psi(x^2+y^2) \tag{27}$$

но въ этомъ частномъ случаѣ, который впрочемъ часто встрѣчается, лучше

разсматривать непосредственно каждый параллельный кругъ, какъ пересѣченіе прямаго цилиндра съ плоскостью перпендикулярною къ его оси, т. е. вмѣсто уравненій (24) взять уравненія:

$$z = \alpha_1 \quad , \quad x^2 + y^2 = \alpha_2$$

изъ которыхъ найдемъ, какъ сказано выше:

$$z = \Phi\,(x^2 + y^2)$$

Пр. 1. Возьмемъ, напримѣръ, поверхность, описанную около оси Z, какою нибудь прямою:

$$x = az + b \quad , \quad y = a_1 z + b_1$$

Эти уравненія, въ настоящемъ случаѣ, замѣщаютъ женератрису (24).

Если эти уравненія свяжемъ съ параллельнымъ кругомъ:

$$z = \alpha_1 \quad , \quad x^2 + y^2 = \alpha_2$$

то найдемъ:

$$(a\alpha_1 + b)^2 + (a_1\alpha_1 + b_1)^2 = \alpha_2$$

откуда:

$$(az + b)^2 + (a_1 z + b_1)^2 = x^2 + y^2$$

или:

$$x^2 + y^2 - (a^2 + a^2_1)\,z^2 - 2\,(ab + a_1 b_1)\,z = b^2 + b^2_1$$

Это, очевидно, однополый гиперболоидъ, коего центръ, находится на оси Z и легко опредѣляется.

Если за ось X возьмемъ кратчайшее разстояніе между осью вращенія и перемѣщающейся прямой, то плоскость YZ будетъ параллельна этой прямой, слѣдовательно надобно положить $a = 0$, $b_1 = 0$, такъ что уравненіе поверхности сдѣлается:

$$x^2 + y^2 - a^2_1 z^2 = b^2$$

очевидно, начало находится въ центрѣ.

Пр. 2. Найти уравненіе поверхности, происшедшей отъ вращенія круга около оси OZ, находящейся въ плоскости круга, но не проходящей черезъ его центръ.

Рѣшеніе. Пусть уравненія круга вращенія будутъ:

$$y = 0 \quad , \quad (x - x_1)^2 + z^2 = r^2$$

пусть уравненія параллельнаго круга будутъ:

$$z = \alpha \quad , \quad x^2 + y^2 = \alpha_2$$

исключая x, y, z изъ четырехъ предъидущихъ уравненій, найдемъ:

$$(\sqrt{\alpha_2} - x_1)^2 + \alpha_1{}^2 = r^2$$

затѣмъ, исключая параметры α_1 и α_2, найдемъ уравненіе поверхности:

$$(x_1 \pm \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$$

которая называется *торомъ* или поверхностью *кольцеобразною*.

Если уничтожимъ радикалъ, то уравненіе поверхности будетъ четвертой степени. Эта поверхность образуетъ *кольцо*, если $x_1 > r$; образуетъ *яблоковидную поверхность*, если $x_1 = r$; и наконецъ образуетъ *яблоковидную поверхность съ внутреннею полостью*, если $x_1 < r$.

Коноидальныя поверхности.

§ 685. *Коноидальными поверхностями* называются поверхности, описанныя прямою, которая перемѣщается, оставаясь параллельною данной плоскости и упираясь на данную прямую и данную кривую. Слѣдовательно директрисы этой поверхности суть: плоскость, прямая линія и какая-нибудь кривая.

Помѣстимъ начало координатъ въ точкѣ встрѣчи направляющей плоскости, которую возьмемъ за плоскость XY, съ направляющею прямою.

Въ этомъ предположеніи уравненіе направляющей будетъ:

$$x = az \quad , \quad y = a_1 z \tag{28}$$

пусть уравненія другой директрисы будутъ:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{29}$$

Уравненія женератрисы, очевидно, будутъ:

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 \quad , \quad z = \alpha_3 \tag{30}$$

Такъ какъ прямыя (28) и (30) встрѣчаются, то имѣемъ:

$$a_1 \alpha_3 = a\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2$$

Въ силу этой зависимости уравненія женератрисы (30) сдѣлаются:

$$z = \alpha_3 \quad , \quad y - a_1 \alpha_3 = \alpha_1 (x - \alpha_3 a) \tag{31}$$

Но эта прямая встрѣчаетъ и директрису (29), слѣдовательно будемъ имѣть зависимость между α_1 и α_3; пусть эта зависимость будетъ:

$$\alpha_3 = \Phi(\alpha_1)$$

откуда, исключая α_1 и α_3 съ помощью уравненій (31), найдемъ уравненіе искомой коноидальной поверхности:

$$z = \Phi\left(\frac{y - a_1 z}{x - az}\right) \tag{32}$$

Если направляющая прямая (28) перпендикулярна къ направляющей плос-

кости, т. е. къ плоскости XY, то $a=0$ и $a_1=0$, слѣдовательно уравненіе поверхности будетъ:

$$z=\Phi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{33}$$

а уравненія женератрисы, если направляющую возьмемъ за ось Z, будутъ:

$$z=\alpha_3 \quad , \quad y=\alpha_1 x$$

Пр. 1. Найти уравненіе поверхности, описанной прямою, которая, оставаясь параллельною плоскости XY, скользитъ по оси Z и кривой.

$$x=x_1 \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{34}$$

которая есть эллипсъ въ плоскости перпендикулярной къ оси X на разстояніи x_1 отъ начала координатъ?

Рѣшеніе. Уравненія женератрисы, очевидно, суть:

$$z=\alpha_2 \quad , \quad y=\alpha_1 x \tag{35}$$

исключая x, y, z изъ уравненій (34) и (35), найдемъ:

$$\frac{\alpha^2_1 x}{b^2}+\frac{\alpha^2_2}{c^2}=1$$

откуда:

$$\frac{x^2}{b^2}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^2}{c^2}=4$$

или:

$$\frac{c^2x^2_1}{b^2}y^2=x^2(c^2-z^2)$$

Если положимъ $b=c$, то директриса (34) будетъ кругъ, а уравненіе поверхности будетъ:

$$x^2_1 y^2 = x^2(b^2-z^2)$$

Пр. 2. Гелисъ и гелисоидъ. Представимъ цилиндръ, коего ось есть ось Z, а основаніе кругъ:

$$x^2+y^2=r^2$$

возьмемъ, какую нибудь, точку на окружности этого круга, пусть ея координаты будутъ x, y; если означимъ черезъ φ уголъ, который составляетъ радіусъ r, проведенный въ эту точку, съ осью x, то будемъ имѣть:

$$x=r\cos\varphi \quad , \quad y=r\sin\varphi$$

Если изъ этой точки козставимъ перпендикуляръ и на немъ возьмемъ точку въ разстояніи отъ основанія равномъ $z=\frac{as}{2\pi r}=\frac{a\varphi}{2\pi}$, то такая точка опишетъ на цилиндрѣ кривую, которая называется *винтовой линіей* или *гелисомъ.*

Изъ формулы:

$$z=\frac{a\varphi}{2\pi}$$

видимъ, что каждый разъ, когда радіусъ опишетъ полный кругъ, z возрастаетъ на количество a, которое называется *шагомъ* гелиса. Слѣдовательно гелисъ или винтообразная линія выражается уравненіями:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi \quad , \quad z = \frac{a\varphi}{2\pi}$$

или уравненіями:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad x = r\cos\left(\frac{2\pi}{a}z\right) \quad , \quad y = r\sin\left(\frac{2\pi}{a}z\right)$$

Представимъ теперь, что прямая, оставаясь параллельною плоскости XY, скользитъ по оси Z и гелису, въ этомъ перемѣщеніи она опишетъ коноидальную поверхность, которая называется *гелисоидомъ*. Пусть уравненія женератрисы будутъ:

$$y = \alpha_1 x \quad , \quad z = \alpha_2$$

Изъ предъидущихъ уравненій и изъ настоящихъ получимъ зависимость между параметрами α_1 и α_2:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha_1^2}} = \cos\left(\frac{2\pi}{a}\alpha_2\right)$$

откуда:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\left(2\pi.\frac{z}{a}\right) \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{a}.z\right)$$

Это и есть искомая поверхность.

Поверхности награфленыя: косыя и развертывающіяся.

§ 686. *Награфлеными поверхностями* называютъ поверхности описанныя перемѣщеніемъ прямой въ пространствѣ; эти поверхности дѣлятся на два рода: *развертывающіяся* и *косыя*; первыя суть тѣ, въ которыхъ прямыя, при послѣдовательномъ перемѣщеніи, пересѣкаются: вторая пересѣкаетъ первую, третяя вторую, т. е. два послѣдовательныя положенія женератрисы находятся въ одной плоскости; вторыя суть тѣ, въ которыхъ послѣдовательныя прямыя не пересѣкаются, т. е. лежатъ въ различныхъ плоскостяхъ.

Первыя называются развертывающимися потому, что ихъ можно развермутъ на плоскости безъ складокъ, а вторыя безъ складокъ, на плоскости, развернуты быть не могутъ.

Къ первымъ принадлежатъ поверхности: цилиндрическія, коническія и другія, а ко вторымъ принадлежатъ: коноидальныя и другія.

Выше мы сказали, что если женератрисы въ послѣдовательныхъ положеніяхъ пересѣкаются, то поверхность можетъ быть развернута на плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ три безконечно близкія, послѣдовательныя, положенія женератрисы AA', AA'', BB', женератрисы AA' и AA'' пересѣкаются въ точкѣ A, а женератрисы AA'' и BB' въ точкѣ B. Плос-

кости $A'AA''$, $A''BB'$ составляютъ двугранный уголъ, коего ребро есть AA'', около этого ребра можно поворотить плоскость $A''BB'$, такъ что она совмѣстится съ плоскостью $A''AA'$, слѣдовательно два послѣдовательные элемента $A''AA'$ и $A''BB'$ поверхности, помѣстятся на одной плоскости; дѣлая тѣже разсужденія относительно элементовъ поверхности, слѣдующихъ за элементомъ $A''BB'$ видимъ, что вся поверхность помѣстится на плоскости безъ складокъ. Въ цилиндрическихъ поверхностяхъ всѣ женератрисы пересѣкаются въ безконечно-удаленной точкѣ, такъ какъ онѣ всѣ параллельны, слѣдовательно цилиндрическія поверхности суть развертывающіяся.

Въ коническихъ поверхностяхъ всѣ женератрисы пересѣкаются въ одной точкѣ, слѣдовательно это поверхности развертывающіяся. Въ коноидальныхъ поверхностяхъ двѣ послѣдовательныя женератрисы непересѣкаются, онѣ находятся въ различныхъ плоскостяхъ; въ самомъ дѣлѣ, женератриса въ этихъ поверхностяхъ, оставаясь параллельно данной плоскости, скользитъ по данной прямой и по данной кривой, каждое безконечно малое перемѣщеніе женератрисы можно разсматривать, какъ перемѣщеніе по касательной къ кривой и по данной прямой; безконечно малый элементъ касательной совпадетъ съ безконечно малымъ элементомъ кривой, но касательная и данная прямая, только въ весьма исключительныхъ случаяхъ находятся въ одной плоскости, слѣдовательно и два послѣдовательныя положенія женератрисы находятся въ различныхъ плоскостяхъ, т. е. онѣ непересѣкаются.

§ 687. Поверхности развертывающіяся, какъ видѣли выше, образуются при помощи одной директрисы, коноидальныя съ помощью двухъ директрисъ, изъ коихъ одна постоянная — прямая линія, а другая, какая нибудь, кривая. За этими награфлеными поверхностями слѣдуютъ поверхности, въ которыхъ женератриса, оставаясь параллельною данной плоскости, скользитъ по двумъ, какимъ нибудь, кривымъ, очевидно, это поверхмости косыя, такъ какъ въ каждый моментъ женератриса перемѣщается по двумъ касательнымъ (къ кривымъ — директрисамъ), которыя вообще не находятся въ одной плоскости — эти поверхности называются *цилиндроидами*.

§ 688. *Цилиндроиды*. Пусть данныя двѣ директрисы будутъ:

$$F_1(x,y,z)=0\ ,\ F_2(x,y,z)=0\ ,\ f_1(x,y,z)=0\ ,\ f_2(x,y,z)=0 \qquad (36)$$

Если за плоскость XY возьмемъ плоскость, которой женератриса, въ своемъ перемѣщеніи, остается параллельною, то уравненія женератрисы будутъ:

$$y=a_1x+a_2\quad ,\quad z=a_3 \qquad (37)$$

Исключая изъ этихъ уравненій и уравненій $F_1=0$, $F_2=0$ величины x, y, z, найдемъ зависимость между параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; пусть эта зависимость будетъ:

$$\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=0$$

Другую зависимость найдемъ, исключая x, y, z между уравненіями $f_1=0$, $f_2=0$ и уравненіями (37); пусть эта зависимость будетъ:

$$\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=0$$

откуда найдемъ:

$$\alpha_1=\psi_1(\alpha_3) \quad , \quad \alpha_2=\psi_2(\alpha_3)$$

подставляя эти выраженія въ первое изъ уравненій (37), найдемъ:

$$y=x\psi_1(z)+\psi_2(z) \tag{38}$$

Это общее уравненіе цилиндроидовъ, гдѣ функціи ψ_1 и ψ_2 зависятъ отъ директрисъ.

Пр. Пусть данныя двѣ директрисы будутъ кругъ:

$$y^2+z^2=r^2 \quad , \quad x=x_1 \tag{39}$$

и эллипсъ:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \quad , \quad x=0 \tag{40}$$

Если женератриса будетъ:

$$y=\alpha_1 x+\alpha_2 \quad , \quad z=\alpha_3 \tag{41}$$

то будемъ имѣть слѣдующія зависимости между параметрами α_1, α_2, α_3:

$$(\alpha_2 x_1+\alpha_2)^2+\alpha_3{}^2=r^2 \quad , \quad \frac{\alpha^2{}_2}{a^2}+\frac{\alpha^2{}_3}{b^2}=1$$

откуда:

$$\alpha_2=\frac{a\sqrt{r^2-\alpha^2{}_3}-b\sqrt{b^2-\alpha^2{}_3}}{bx_1} \quad , \quad \alpha_3=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-\alpha^2{}_3}$$

исключая изъ (41) параметры, найдемъ уравненіе поверхности цилиндроида:

$$y=x\left\{\frac{a\sqrt{r^2-z^2}-b\sqrt{b^2-z^2}}{bx_1}\right\}+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}$$

§ 689. Наконецъ слѣдуютъ награфленыя косыя поверхности, которыя образуются, когда прямая скользитъ по тремъ даннымъ, какимъ нибудь, кривымъ—директрисамъ, слѣдовательно эти поверхности образуются при помощи трехъ директрисъ. Легко показать, что прямая можетъ скользить но тремъ кривымъ; въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ, какую нибудь, точку на первой кривой и построимъ два конуса, коихъ вершины находятся во

взятой точкѣ, а основаніями, которыхъ служатъ двѣ другія кривыя, эти конусы пересѣкаются по прямой, которая, очевидно, упирается на всѣ три кривыя. Передвигая первую взятую точку по первой кривой и дѣлая такія-же построенія, какъ выше, для каждой точки, получимъ рядъ женератрисъ, которыя и описываютъ поверхность, очевидно, косую—награфленую. Изъ такихъ поверхностей мы уже видѣли одну — однополый гиперболоидъ.

Пусть данныя три директрисы будутъ:

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0$$
$$f_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, z) = 0$$
$$\varphi_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad \varphi_2(x, y, z) = 0$$

Пусть уравненія женератрисы будутъ:

$$x = \alpha_1 z + \alpha_2 \quad , \quad y = \alpha_3 z + \alpha_4$$

исключая x, y, z изъ этихъ уравненій и изъ каждой пары директрисъ, найдемъ слѣдующія зависимости между параметрами:

$$\alpha_2 = \psi_1(\alpha_1) \quad , \quad \alpha_3 = \psi_2(\alpha_1) \quad , \quad \alpha_4 = \psi_3(\alpha_1)$$

откуда:

$$x = \alpha_1 z + \psi_1(\alpha_1) \quad , \quad y = \psi_2(\alpha_1) z + \psi_3(\alpha_1)$$

исключая изъ этихъ уравненій α_1, найдемъ уравненіе искомой поверхности. Это исключеніе можно только тогда сдѣлать, когда будетъ извѣстенъ составъ функцій ψ_1, ψ_2, ψ_3, т. е. когда будутъ даны явно уравненія трехъ директрисъ.

Пр. Даны два вертикальные полукруга, описанные на противуположныхъ сторонахъ даннаго параллелограма, и дана прямая, проходящая черезъ центръ параллелограма перпендикулярно къ плоскостямъ данныхъ круговъ; найти уравненіе поверхности, описанной прямою, которая скользитъ по даннымъ двумъ кругамъ и по данной прямой?

Рѣшеніе. Возьмемъ плоскость параллелограма за плоскость XY, данную прямую за ось Y, а за начало координатъ центръ параллелограма, ось Z будетъ, очевидно, перпендикуляръ возставленный изъ начала къ плоскости параллелограма. При этой системѣ координатъ директрисы будутъ:

$$y = -b \quad , \quad (x-a)^2 + z^2 = r^2 \quad ; \quad y = +b \quad , \quad (x+a)^2 + z^2 = r^2$$
$$x = 0 \quad , \quad z = 0$$

Уравненія женератрисъ будутъ:

$$x = \alpha_1 (y - \alpha_2) \quad , \quad z = \alpha_3 (y - \alpha_2)$$

такъ какъ онѣ всегда встрѣчаютъ ось Y.

Такъ какъ женератриса скользитъ по даннымъ кругамъ, то имѣемъ:

$$\left\{\alpha_1(b+\alpha_3)+a\right\}^2+\alpha^2_3(b+\alpha_2)^2=r^2$$

$$\left\{\alpha_1(b-\alpha_2)+a\right\}^2+\alpha^2_3(b-\alpha_2)^2=r^2$$

откуда, вычитая эти уравненія, найдемъ:

$$\alpha^2_1+\alpha^2_3+\frac{a}{b}\alpha_2=0$$

исключая параметры α_1, α_2, α_3 изъ этихъ уравненій, найдемъ уравненіе искомой поверхности:

$$\left\{axy+b(x^2+z^2)\right\}^2=b^2r^2x^2+b^2z^2(r^2-a^2)$$

или:

$$\left\{axy+b(x^2+z^2)\right\}^2=b^2\left\{r^2x^2+z^2(r^2-a^2)\right\}$$

Конецъ второй и послѣдней части.

Замѣченныя опочатки.

Стр.	Строка.	Напечатано:	Читать:
243	21	(8)	(7)
271	16	Изъ данной точки внѣ	Изъ данной точки $(x_1 y_1)$ внѣ
—	17	$(x_1 y_1)$	(x, y)
324	3	$(a_2-a_1)(x-a_2)+(b_2-b_1)(y-b_2)-\frac{r^2_2(1-\lambda)}{\lambda}=0$	$(a_1-a_2)(x-a_2)+(b_1-b_2)(y-b_2)-r^2_2(1-\lambda)=0$
490	5	$r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)=0$	$r^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)=1$
542	19	$\frac{yf}{\partial y_1}$	$\frac{\partial f}{\partial y_1}$
626	15	$(z-z_1)\frac{c^2}{z^2}$	$(z-z_1)\frac{c^2}{z^2_1}$
638	17	$\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-\frac{(x-x_1)}{a}=0$	$\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-\frac{(x+x_1)}{a}=0$